

# CÔNICAS



Célio Pinto de Almeida

# CÔNICAS

G.Ermakoff CASA EDITORIAL  
RIO DE JANEIRO | 2019

Cônicas

Copyright © 2019 by Célio Pinto de Almeida

*Coordenação editorial:*

George Ermakoff

*Capa:*

Miriam Lerner e Marcelo Domingues

*Diagramação:*

Marcelo Domingues

*Desenhos:*

Michelle Bulhões

Imagem da capa:

As Seções Cônicas

Primeira edição

Tiragem: 1.000 exemplares – Distribuição gratuita

Este estudo dedico à minha família, à Sônia, ao Alexandre e ao Cristiano, sempre a meu lado, com o apoio imprescindível à sua execução.



# APRESENTAÇÃO

O presente estudo visita as cônicas, curvas planas especialíssimas, muito presente, tanto na Geometria quanto nos mais diversos aspectos da vida cotidiana, anotando suas principais propriedades e as relações métricas que lhes dizem respeito.

É um trabalho dedutivo e seu formato didático e lógico é proposital, dentro dos puros princípios da Geometria, dispensando simplórias “constatações” ilustradas. Seu propósito é, simplesmente, proporcionar ao leitor, mesmo que não versado em Matemática, sequências de raciocínios simples que conduzem às conclusões das propriedades enunciadas.

Foi inicialmente escrito e publicado em 1968, com desenhos primorosamente elaborados pelo arquiteto e professor Shoji Kamei que, como o autor, dedicava-se ao preparo de candidatos a escolas de nível superior, através dos difíceis vestibulares da época.

Esta nova versão é uma revisão das anteriores, acrescentando alguns detalhes, embora, em seu quase inteiro teor, respeite os escritos originais.

De modo a facilitar as inevitáveis consultas a propriedades anteriormente enunciadas e/ou demonstradas, todas elas são numeradas sequencialmente.

O título *Cônicas*, simplificação de Curvas Cônicas, ou de Seções Cônicas, deve-se ao fato de serem essas curvas, aqui em estudo, provenientes de seções planas em cones circulares retos, como, no decorrer do estudo, se demonstrará.

Acredita-se que as cônicas tenham sido estudadas pela primeira vez pelo matemático grego Menecmo, discípulo de Eudoxo, tendo sido, a partir daí, tema de interesse de inúmeros matemáticos e geômetras da Antiguidade, e não só.

Foi Apolônio de Perga, conhecido como o Grande Geômetra, quem mais se aprofundou na matéria, creditando-se a ele os mais completos estudos escritos sobre essas curvas. Deve-se a Apolônio a descoberta de se poder conseguir, num cone de revolução de duas folhas, cada uma das três cônicas pela variação do ângulo que o plano secante considerado forme com o eixo do cone, como adiante detalharemos. Também provou que o cone não tem que ser necessariamente reto. Sua magnífica obra *As Cônicas* veio a público cerca de dois séculos antes do nascimento de Cristo.

Dentro do enorme conjunto de matemáticos que se interessaram e estudaram as cônicas, merece lugar de destaque o geômetra belga Germinal Pierre Dandelin que, com colaboração de seu colega e compatriota Adolphe Quételet, proporcionou marcante aprofundamento no tema, pela inclusão de esferas inscritas nos cones de revolução, não só para claras e simples demonstrações, como, também, para precisar o posicionamento dos focos dessas seções planas, como apresentaremos no Capítulo XII do presente trabalho.

Dandelin recebeu especial contributo do matemático inglês Pierce Morton que, fazendo uso dos mesmos raciocínios que Dandelin havia utilizado para precisar as posições dos focos de duas seções bifocais, conseguiu, o que Dandelin não havia feito, determinar a posição do foco da parábola seção num cone de revolução por um plano paralelo a uma de suas geratrizes (número 188).



# LISTAGEM DE ASSUNTOS

A listagem abaixo apresenta, em cada capítulo, os principais assuntos, definições e teoremas, ao invés do habitual sumário de títulos, tais as quantidades de conceituações e demonstrações.

<b>Introdução</b>	Curvas planas .....	15
	Tangentes e normais .....	15
	Curvas ortogonais .....	15
	Convexidade .....	15
	Diâmetros de uma curva .....	16
	Eixos e vértices de uma curva .....	16
	Diâmetros conjugados .....	16
	Cordas suplementares .....	16
<b>Capítulo I – Elipse</b>	Condição de existência .....	17
	Natureza .....	17
	Eixos e centro de simetria .....	18
	Relações métricas .....	19
	Corde focal e parâmetro .....	20
	Excentricidade .....	20
	A elipse referida a seus eixos .....	21
	Círculos diretores .....	23
	Círculo principal .....	23
	Círculo auxiliar .....	23
	Determinação do ponto de contato .....	25
	Construção da elipse .....	26
	Construção das tangentes .....	26
	Teorema de La Hire .....	28
	Teoremas de Poncelet .....	31
	Círculo de Monge .....	34
	Pontos de corte de uma secante .....	35
<b>Capítulo II – Elipse como projeção ortogonal do círculo</b>	Área da elipse .....	39
	Construção a partir dos eixos .....	42
	Sistemas rígidos .....	48
	Teorema de La Hire .....	49
<b>Capítulo III – Elipse como afim ortogonal do círculo</b>	Afinidade espacial .....	51
	Afinidade plana .....	52
	Construção a partir dos eixos .....	56
	Tangentes paralelas a uma reta dada .....	57
	Tangentes por um ponto exterior .....	57
	Pontos de interseção de uma secante .....	58

<b>Capítulo IV – Diâmetros conjugados da elipse</b>	Diâmetros da elipse .....	59
	Diâmetros conjugados da elipse .....	60
	Determinação dos eixos .....	61
	Processo de Ocagne .....	62
	Processo de Mannheim .....	62
	Teoremas de Apollonius .....	63
<b>Capítulo V – Elipse como afim oblíqua do círculo</b>	Afinidade oblíqua entre elipse e círculo .....	66
	Sistema de afinidade oblíqua .....	67
	Construção da elipse .....	68
	Construção da tangente num ponto corrente .....	69
	Construção das tangentes paralelas a uma reta ...	69
	Construção das tangentes por um ponto exterior ...	69
	Pontos de interseção de uma secante .....	70
<b>Capítulo VI – Hipérbole</b>	Condição de existência .....	73
	Natureza .....	73
	Eixos e centro de simetria .....	74
	Relações métricas .....	74
	Corda focal e parâmetro .....	75
	Excentricidade .....	76
	A hipérbole referida a seus eixos .....	77
	Hipérbole equilátera .....	78
	Círculos diretores .....	80
	Círculo principal .....	80
	Determinação do ponto de contato .....	83
	Construção das tangentes .....	84
	Teorema de La Hire .....	86
	Teoremas de Poncelet .....	90
	Círculo de Monge .....	93
	Pontos de corte de uma secante .....	95
<b>Capítulo VII – Assíntotas da hipérbole</b>	A hipérbole possui duas assíntotas .....	97
	Hipérbole equilátera .....	99
	Hipérboles conjugadas .....	100
	Secantes à curva e às assíntotas .....	104
<b>Capítulo VIII – Diâmetros conjugados da hipérbole</b>	Diâmetros da hipérbole .....	107
	Diâmetros conjugados da hipérbole .....	108
	Construção direta da hipérbole .....	110
<b>Capítulo IX – Parábola</b>	Condição de existência .....	111
	Natureza .....	111
	Eixo e vértice .....	112
	Corda focal e parâmetro .....	113
	Equação da parábola .....	116

	Determinação do ponto de contato .....	117
	Construção das tangentes .....	118
	Teorema de La Hire .....	121
	Teoremas de Poncelet .....	123
	Reta de Simson .....	127
<b>Capítulo X – Parábola como limite de uma cônica bifocal</b>	Parábola como limite da elipse .....	129
	Parábola como limite da hipérbole .....	132
<b>Capítulo XI – Diâmetros da parábola</b>	Diâmetros da parábola .....	135
	Construção direta da parábola .....	139
<b>Capítulo XII – Seções cônicas</b>	Superfícies tangentes .....	143
	Inscrição de uma esfera num cone de revolução ...	144
	O estudo das seções cônicas .....	145
	Esferas de Dandelin .....	147
	Teorema de Dandelin .....	147
	Seção elítica .....	147
	Seção hiperbólica .....	150
	Seção parabólica .....	152
	A parábola como posição limite da elipse .....	155
	A parábola como posição limite da hipérbole .....	157
<b>Capítulo XIII – Excentricidades e diretrizes</b>	Excentricidades das cônicas bifocais .....	159
	Variação da excentricidade da elipse .....	159
	Variação da excentricidade da hipérbole .....	160
	Cálculo dos raios vetores para a elipse .....	161
	Cálculo dos raios vetores para a hipérbole .....	163
	Diretrizes da elipse .....	165
	Diretrizes da hipérbole .....	167
	Diretrizes das cônicas .....	168
	Diretriz da parábola .....	171



# ITENS DESTACADOS

A seguir, por ordem alfabética, vão listados os itens habitualmente mais procurados.

Afinidade espacial .....	51
Afinidade plana .....	52
Área da elipse .....	39
Assíntotas da hipérbole .....	97
Círculo de Monge da elipse .....	34
Círculo de Monge da hipérbole .....	93
Círculos diretores da elipse .....	23
Círculos diretores da hipérbole .....	80
Círculo principal da elipse .....	23
Círculo principal da hipérbole .....	80
Corda focal da elipse .....	20
Corda focal da hipérbole .....	75
Cordas suplementares .....	16
Curvas ortogonais .....	15
Diâmetros conjugados .....	16
Diâmetros conjugados da elipse .....	60
Diâmetros conjugados da hipérbole .....	108
Diâmetros da elipse .....	59
Diâmetros da hipérbole .....	107
Diâmetros de uma curva .....	16
Diretriz da parábola .....	111
Diretrizes da elipse .....	165
Diretrizes da hipérbole .....	167
Eixos de uma curva .....	16
Esferas de Dandelin .....	147
Excentricidade da elipse .....	20
Excentricidade da hipérbole .....	76
Hipérbole equilátera .....	78
Hipérbolas conjugadas .....	100
Parâmetro da elipse .....	20
Parâmetro da hipérbole .....	75
Parâmetro da parábola .....	113
Processo de Mannheim .....	62
Processo de Ocagne .....	62
Reta de Simson .....	127
Teorema de La Hire – elipse .....	28
Teorema de La Hire – hipérbole .....	86
Teorema de La Hire – parábola .....	121

Teorema de Dandelin .....	147
Teoremas de Apollonius .....	63
Teoremas de Poncelet – elipse .....	31
Teoremas de Poncelet – hipérbole .....	90
Teoremas de Poncelet – parábola .....	123
Vértices de uma curva .....	16

# INTRODUÇÃO

## 1 – Curvas planas

São denominadas curvas planas aquelas que pertencem a um único plano. Podem ser abertas ou fechadas.

## 2 – Tangentes e normais

Tangente a uma curva plana  $c$ , num ponto  $A$  da curva, é a posição limite ocupada por uma secante  $AB$  quando, mantido fixo o ponto  $A$ , faz-se  $B$  descrever o arco  $BA$  tendendo a coincidir com  $A$  (Figura 1).

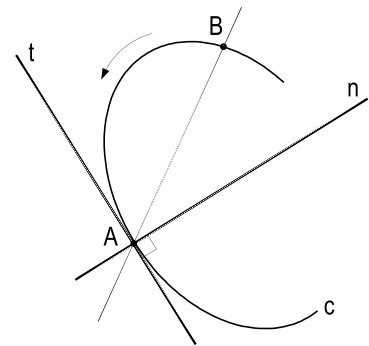


Figura 1

Normal a uma curva plana  $c$ , num ponto  $A$  da curva, é a perpendicular à tangente, nesse ponto (Figura 1).

## 3 – Curvas ortogonais

Duas curvas planas secantes são ortogonais num ponto  $A$  quando, sendo  $A$  um ponto de corte, suas tangentes, em  $A$ , são perpendiculares entre si (Figura 2).

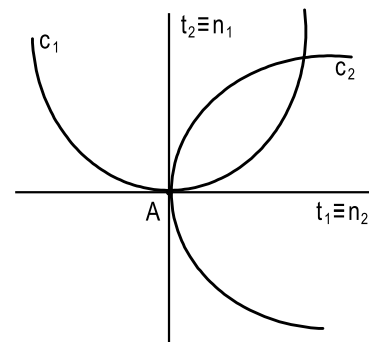


Figura 2

Da própria definição, conclui-se que, se duas curvas são ortogonais num ponto  $A$ , nesse ponto, a tangente a uma é normal à outra e vice-versa (Figura 2).

## 4 – Convexidade

Uma curva plana é convexa quando todas as tangentes a ela deixam-na inteiramente situada num dos dois semiplanos definidos por essas tangentes (Figura 3) e côncavas ou não-convexas, em caso contrário (Figura 4).

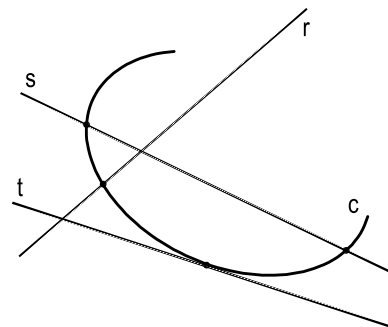


Figura 3

Toda reta secante a uma curva convexa possui no máximo dois pontos em comum com a curva (Figura 3); uma reta pode cortar uma curva côncava em mais de dois pontos (Figura 4).

### 5 – Diâmetros de uma curva

Por definição, diâmetro de uma curva, relativo a uma certa direção, é o lugar geométrico dos pontos médios das cordas da curva que possuem aquela direção (Figura 5).

É evidente que toda curva plana possui uma infinidade de diâmetros, em correspondência com a infinidade de direções que se pode arbitrar para suas cordas.

É claro que, se existe tangente  $t$  no extremo  $A$  de um diâmetro  $d$  de uma curva, ela é paralela às cordas que determinam esse diâmetro, pois essa tangente é a posição limite ocupada pelas secantes suportes das cordas consideradas, quando os pontos de corte com a curva tendem um ao outro (Figura 5).

### 6 – Eixos e vértices de uma curva

No caso particular em que, para uma certa direção, o diâmetro de uma curva é retilíneo e perpendicular àquela direção, diz-se que esse diâmetro é um eixo da curva (Figura 6). E porque todo eixo de uma curva é a mediatriz comum das cordas que o definem, ele funciona para a curva como um eixo de simetria. Todo ponto comum a um eixo e à curva é denominado vértice da curva.

Toda tangente a uma curva, num vértice, é perpendicular ao eixo que produz esse vértice.

### 7 – Diâmetros conjugados e cordas suplementares

Por definição, dois diâmetros retilíneos  $d$  e  $d'$ , relativos a duas direções  $\Delta$  e  $\Delta'$  (Figura 7), são ditos conjugados, quando são, respectivamente, paralelos a  $\Delta'$  e a  $\Delta$ .

Ainda por definição, duas cordas  $AB$  e  $AC$  que possuem um extremo comum são ditas suplementares (Figura 7) quando são respectivamente paralelas a dois diâmetros conjugados da curva.

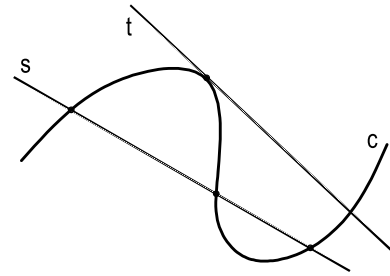


Figura 4

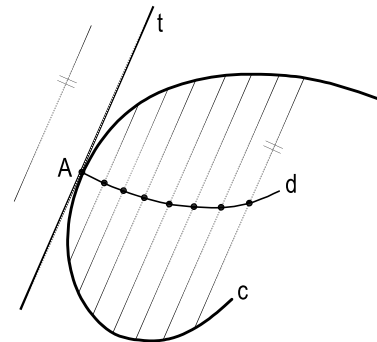


Figura 5

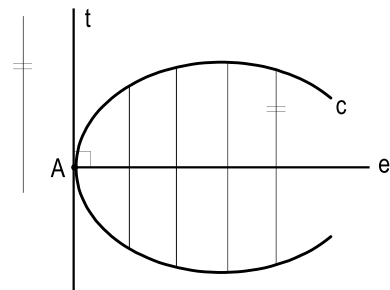


Figura 6

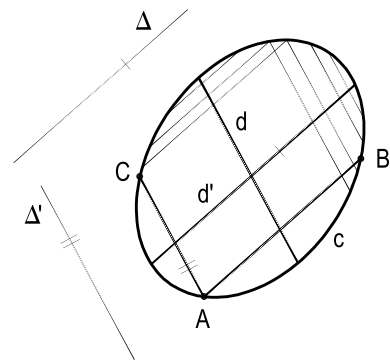


Figura 7



# CAPÍTULO I

## ELIPSE

### 8 – Definições

Elipse é a curva plana cujos pontos possuem a mesma soma de distâncias a dois pontos fixos de seu plano. Os pontos fixos são denominados focos da elipse e a distância entre eles distância focal. Os segmentos  $MF$  e  $MF'$  formados por um ponto  $M$  corrente da elipse e por cada um dos focos  $F$  e  $F'$  são denominados raios vetores do ponto  $M$  (Figura 8).

### 9 – Condição de existência

Designemos por  $2c$  a distância focal e por  $2a$  a soma constante dos raios vetores de cada ponto da elipse.

Para que exista a curva, ou, o que é o mesmo, para que existam triângulos como  $MF'F$  (Figura 8), é necessário e suficiente que:

$$FF' < MF + MF' \quad \text{ou} \quad \boxed{2c < 2a}$$

Assim, para que exista uma elipse é necessário e suficiente que sua distância focal seja menor que a soma constante das distâncias de cada um de seus pontos aos focos.

Tal obrigação implica em que os focos da elipse sejam sempre interiores a ela.

### 10 – Natureza

A elipse é uma curva contínua e fechada.

Contínua, porque cada acréscimo infinitésimo atribuído a um raio vetor corresponde à obtenção de um novo ponto da curva, infinitesimalmente distante do primeiro.

Fechada, porque não pode possuir ponto impróprio, uma vez que a soma dos raios vetores de cada um de seus pontos é constantemente finita.

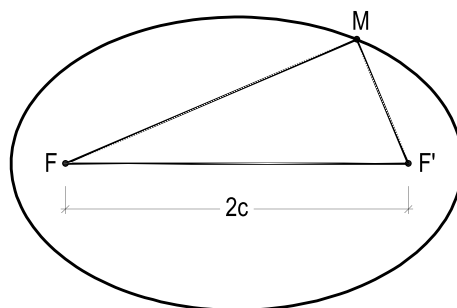


Figura 8

## 11 – Processo espontâneo para a construção da elipse, dada por seus focos e pelo valor da soma constante de seus pontos aos focos

Da própria definição da curva decorre o seguinte processo:

Sejam  $F$  e  $F'$  os focos dados e  $2a$  a soma constante dos raios vetores dos pontos da elipse. Arbitremos, sobre um segmento de reta  $PQ = 2a$ , pela escolha de um ponto  $J$  qualquer (Figura 9), dois valores  $m$  e  $n$ , tais que  $m + n = 2a$  e, com centros nos focos e raios iguais àqueles valores, descrevamos arcos de círculo, obtendo, por interseção, os pontos  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  da curva.

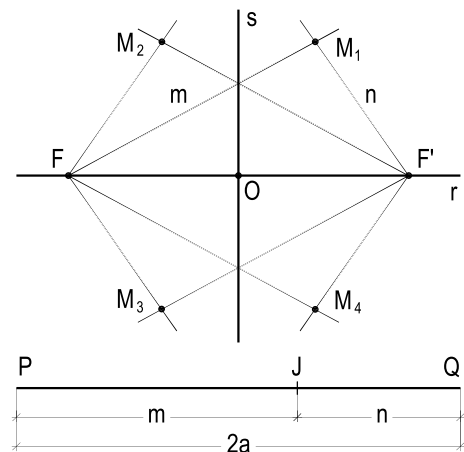


Figura 9

## 12 – Observação

A mudança da posição do ponto  $J$  sobre o segmento  $PQ = 2a$  e as conseqüentes variações dos valores de  $m$  e de  $n$  fornecem, por construção reiterada, novos pontos  $M$  da elipse (Figura 10).

## 13 – Eixos e centro de simetria

Examinando o processo espontâneo (número 11), conclui-se a igualdade dos triângulos  $M_1FF'$ ,  $M_2FF'$ ,  $M_3FF'$  e  $M_4FF'$  (3º caso) e, conseqüentemente, as simetrias dos pontos  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$ , tomados convenientemente aos pares em relação à reta  $r$  que contém os focos, em relação à mediatriz  $s$  do segmento  $FF'$  e, até, em relação ao ponto  $O$ , comum a essas retas (Figura 9).

Daí conclui-se que:

13.1 – A elipse possui dois eixos.

O eixo  $AA'$  (Figura 11), que contém os focos, é denominado transverso, real ou focal; o eixo  $BB'$  pertencente à mediatriz do segmento  $FF'$  (Figura 11) é denominado não transverso, imaginário ou não focal.

13.2 – A elipse possui quatro vértices.

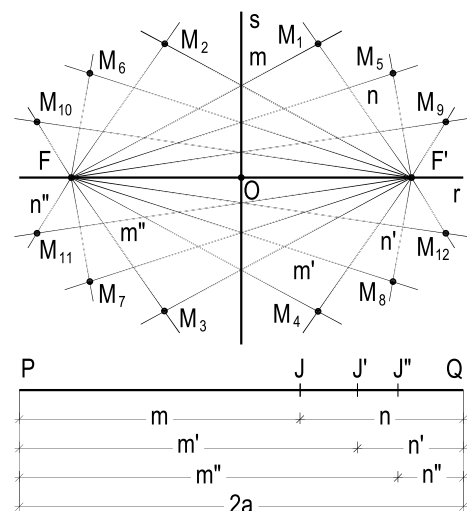


Figura 10

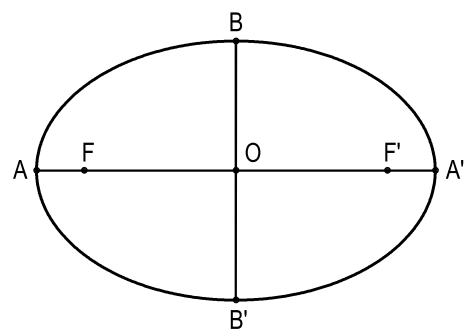


Figura 11

São os extremos A, A', B e B' dos eixos (Figura 11).

13.3 – A elipse possui centro.

É o ponto O comum aos eixos (Figura 11).

## 14 – Relações métricas

14.1 – O eixo transverso tem comprimento igual à soma dos raios vetores de cada ponto da elipse.

Sejam AA' o eixo transverso e 2a a soma, constante, dos raios vetores dos pontos de uma elipse de focos F e F' (Figura 12).

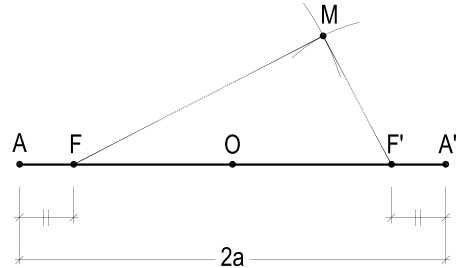


Figura 12

Porque A pertence à curva, vem:

$$AF' + AF = 2a$$

Mas como  $AF = F'A'$ , por serem simétricos em relação ao centro O da elipse,

$$AF' + F'A' = 2a$$

$$\therefore \boxed{AA' = 2a}$$

14.2 – Relação entre os eixos e a distância focal.

Sejam 2a, 2b e 2c, os valores dos dois eixos e a distância focal, respectivamente.

Porque  $AA' = 2a$  e porque B pertence à curva e à mediatriz de FF', temos (Figura 13):

$$BF = BF' = a$$

Assim, o triângulo retângulo BOF fornece:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

A relação acima também se escreve:

$$4a^2 = 4b^2 + 4c^2 \quad \therefore (2a)^2 = (2b)^2 + (2c)^2$$

$$\therefore \boxed{AA'^2 = BB'^2 + FF'^2}$$

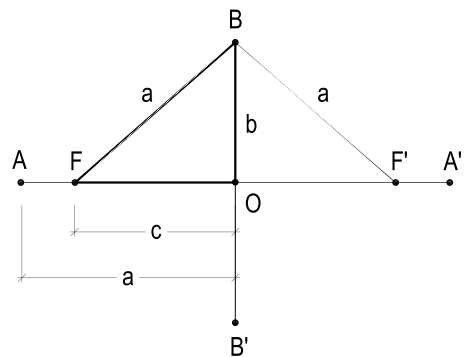


Figura 13

14.3 – Porque  $BF > BO$ , como hipotenusa e cateto, respectivamente, do triângulo BOF (Figura 13), temos:

$$a > b \quad \therefore 2a > 2b$$

Isto é, o eixo transverso AA' é necessariamente o maior dos dois. Por isso que habitualmente designaremos os eixos AA' e BB' (Figura 13) por eixo maior e menor, respectivamente.

#### 14.4 – Corda focal e parâmetro.

Corda focal de uma elipse é a que, passando por um dos focos, é perpendicular ao eixo transverso.

Parâmetro de uma elipse é a ordenada, em relação ao eixo transverso, do ponto da curva cuja projeção ortogonal sobre esse eixo coincide com um dos focos.

Assim, o parâmetro  $p$  vale a metade da corda focal  $c_f$ .

Para o cálculo da corda focal e do parâmetro, consideremos o triângulo retângulo  $RFF'$  (Figura 14), que dá:

$$RF'^2 = RF^2 + FF'^2 \quad (1)$$

Como  $R$  é ponto da curva e  $RF = p$ , vem:

$$RF + RF' = 2a \quad \therefore \quad RF' = 2a - p$$

Assim, a relação (1) se escreve:

$$(2a - p)^2 = p^2 + (2c)^2 \quad \therefore \quad 4a^2 + p^2 - 4ap = p^2 + 4c^2$$

$$\therefore \quad 4a^2 - 4ap = 4c^2 \quad \therefore \quad a^2 - ap = c^2$$

$$\therefore \quad ap = a^2 - c^2 = b^2 \quad \therefore \quad \boxed{p = \frac{b^2}{a}}$$

$$\text{E como } c_f = 2p, \quad \boxed{c_f = \frac{2b^2}{a}}$$

$$\therefore \quad c_f = \frac{4b^2}{2a} \quad \therefore \quad \boxed{c_f = \frac{(2b)^2}{2a}}$$

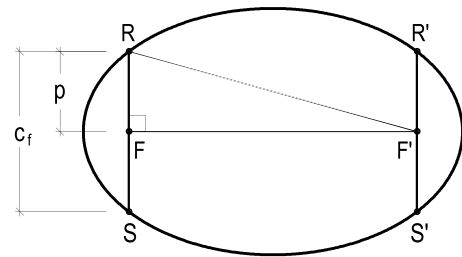


Figura 14

#### 14.5 – Excentricidade.

Excentricidade ( $e$ ) de uma elipse é a razão entre a semidistância focal ( $c$ ) e o semieixo transverso ( $a$ ).

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

$$\therefore \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Assim, a excentricidade ( $e$ ) será calculada por uma das seguintes expressões:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

## 15 – Observações

15.1 – Porque  $0 < c < a$ , conclui-se que  $0 < e < 1$ , isto é, que a excentricidade de uma elipse está necessariamente compreendida entre zero e um.

15.2 – Quando, mantido fixo o eixo maior de uma elipse, faz-se tender a zero o valor da excentricidade,  $c$  tende a zero, os focos aproximam-se, tendendo simultaneamente ao centro da curva. Nestas condições o eixo menor tende a igualar o maior e a elipse degenera num círculo de diâmetro coincidente com o eixo maior.

15.3 – Quando, mantido fixo o eixo maior de uma elipse, faz-se tender a um o valor da excentricidade,  $c$  tende a igualar o semieixo maior, os focos afastam-se, tendendo cada um a cada extremo do eixo real. Nestas condições, o eixo menor tende a se anular e a elipse degenera num segmento de reta – seu eixo maior.

15.4 – Do que foi acima detalhado conclui-se que a excentricidade de uma elipse é um parâmetro adimensional, mediante o qual se pode interpretar quanto a elipse em estudo se aproxima, ou se afasta, da forma circular. A excentricidade traduz, pois, quanto mais, ou menos, “alongada” é a elipse.

15.5 – A excentricidade de uma elipse pode ser expressa em função de seu eixo transverso e de seu parâmetro (ou de sua corda focal). De fato (números 14.4 e 14.5):

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{a}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 - \frac{2p}{2a}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 - \frac{c_f}{2a}}$$

## 16 – A elipse referida a seus eixos

Consideremos uma elipse referida a um sistema cartesiano e tal que seus eixos coincidam com os coordenados, os focos  $F$  e  $F'$  estando sobre o eixo das abscissas. Fazendo  $AA' = 2a$ ,  $BB' = 2b$ ,  $FF' = 2c$  e sendo  $M(x, y)$  um ponto genérico da elipse (Figura 15), podemos escrever:

$$MF + MF' = 2a \quad \therefore \quad MF = 2a - MF'$$

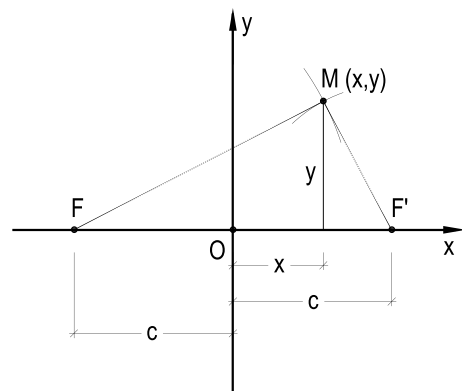


Figura 15

Elevando ao quadrado:

$$MF^2 = 4a^2 + MF'^2 - 4a(MF')$$

E como  $F(-c, 0)$  e  $F'(c, 0)$ , vem:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (c-x)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

$$\therefore x^2 + c^2 + 2cx + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 - 2cx + y^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

Simplificando:

$$a^2 - cx = a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado, resulta:

$$c^2 x^2 + a^4 - 2a^2 cx = a^2 c^2 + a^2 x^2 - 2a^2 cx + a^2 y^2$$

Simplificando e agrupando:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

E como  $a^2 - c^2 = b^2$  (número 14.2), vem: 
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta é a equação da elipse considerada, referida a seus eixos.

Dividindo os dois membros por  $(a^2 b^2)$ , obtém-se outra forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

## 17 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos cujas somas de distâncias a dois pontos fixos é constante é a elipse de eixo maior igual àquela constante, tendo por focos os dois pontos fixos.

Demonstração: Sejam  $F$  e  $F'$  os pontos fixos e  $2a$ , maior que  $FF'$ , a soma constante.

Consideremos a elipse de eixo maior igual a  $2a$ , com focos  $F$  e  $F'$  (Figura 16).

Já foi visto que, para todos os pontos  $M$  da curva:

$$MF + MF' = 2a \quad (1)$$

Sendo  $J$  e  $L$  pontos respectivamente exterior e interior à elipse (Figura 16), por envolventes e envolvidas, vem:

$$JF + JF' > MF + MF' \quad \therefore JF + JF' > 2a \quad (2)$$

$$LF + LF' < MF + MF' \quad \therefore LF + LF' < 2a \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) demonstram o teorema.

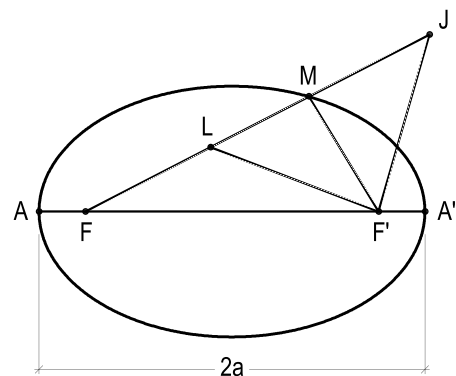


Figura 16

## 18 – Escólio

A elipse divide seu plano em duas regiões: a externa, à qual pertencem os pontos cujas somas de distâncias aos focos são maiores que o eixo transverso, e a interna, à qual pertencem os pontos cujas somas de distâncias aos focos são menores que o eixo transverso da curva.

## 19 – Círculos diretores, círculo principal e círculo auxiliar

Círculos diretores de uma elipse são os dois círculos que têm por centros cada um dos focos e raios iguais ao eixo transverso da elipse (Figura 17).

Círculo principal de uma elipse é o que tem por diâmetro o eixo maior da elipse; círculo auxiliar é o que tem por diâmetro o eixo menor (Figura 17).

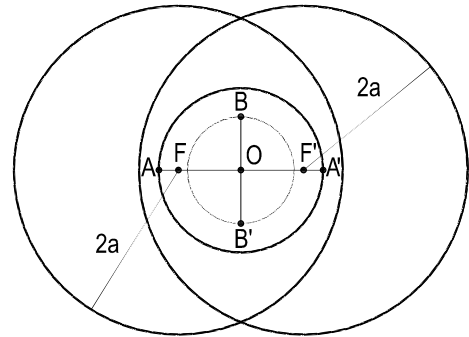


Figura 17

## 20 – Teorema

A bissetriz do ângulo externo formado pelos raios vetores relativos a um ponto qualquer da elipse é tangente à curva nesse ponto.

Demonstração: Sejam F e F' os focos e M um ponto corrente de uma elipse de eixo transverso  $2a$  e  $r$  a bissetriz do ângulo externo formado pelos raios vetores MF e MF'.

Tracemos por F' a perpendicular a  $r$ , obtendo S no prolongamento do raio vetor MF.

Porque o triângulo MSF' é isósceles, S é o simétrico de F', em relação à reta  $r$ . Assim, para todo ponto J de  $r$ , não coincidente com M (Figura 18), vale escrever:

$$JS = JF' \text{ e } MS = MF'$$

E, por axioma:

$$JF + JS > FS \quad \therefore \quad JF + JS > FM + MS$$

$$\text{ou } JF + JF' > MF + MF' \quad \therefore \quad JF + JF' > 2a$$

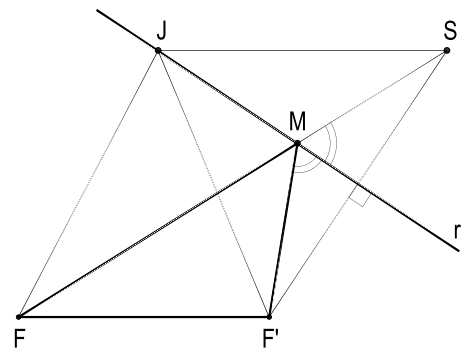


Figura 18

E, se todos os pontos J de  $r$  – exceto M – possuem somas de distâncias aos focos maiores que  $2a$ , pode-se concluir que todos esses pontos J são exteriores à elipse (número 18). Ora, isto é o mesmo que dizer que existe apenas um ponto – M – comum à reta  $r$  e à elipse.

E, como a elipse é uma curva fechada, fica provado que a reta  $r$  é a tangente, em M, à elipse.

## 21 – Corolários

21.1 – A bissetriz do ângulo interno formado pelos raios vetores relativos a um ponto qualquer da elipse é normal à curva nesse ponto (Figura 19).

Porque essa bissetriz é perpendicular à externa.

21.2 – Os pontos de interseção da tangente e da normal, relativas a um ponto corrente, com a reta que contém os focos formam, com os focos, uma divisão harmônica.

De fato, os pés  $R$  e  $R'$  da normal e da tangente, relativas a um ponto  $M$  corrente, são (Figura 19) os próprios pés das bissetrizes relativas ao vértice  $M$  no triângulo  $FMF'$  (*Geometria Plana*, número 166).

21.3 – As tangentes, nos vértices, são paralelas aos eixos (Figura 20).

É equivalente dizer que as normais, nos vértices, coincidem com os eixos da curva.

21.4 – Um dos focos, o ponto de contato de uma tangente qualquer e o simétrico do outro foco em relação a essa tangente são, sempre, colineares.

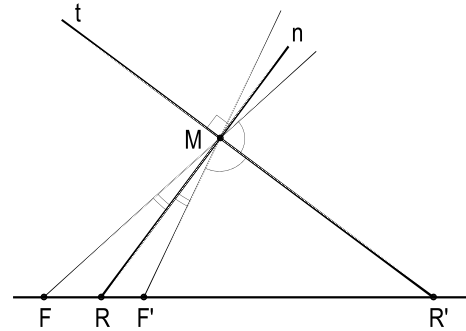


Figura 19

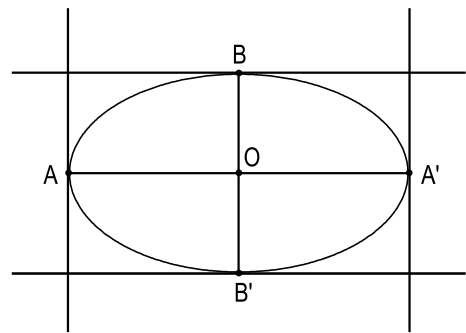


Figura 20

## 22 – Teorema

O lugar geométrico dos simétricos de um foco de uma elipse em relação às tangentes é o círculo diretor relativo ao outro foco.

Demonstração: Sendo  $r$  a tangente, num ponto genérico  $M$ , da elipse de focos  $F$  e  $F'$  e eixo maior  $2a$  e  $S$  o simétrico de  $F'$  em relação a  $r$ , o triângulo isósceles  $SMF'$  (Figura 21) dá:  $MF' = MS$ .

E como  $MF + MF' = 2a$ , vem:  $MF + MS = 2a$

Ou seja:  $FS = 2a$

Assim, o lugar dos simétricos  $S$  do foco  $F'$ , em relação às tangentes, é o círculo  $(F, 2a)$  diretor relativo ao foco  $F$ .

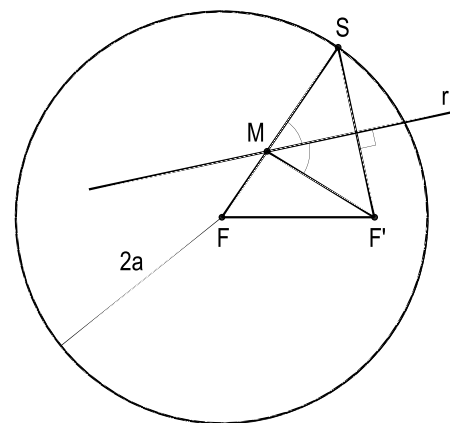


Figura 21



## 23 – Corolários

23.1 – O lugar geométrico dos pontos equidistantes de um círculo e de um ponto fixo interior ao círculo é a elipse, para a qual o ponto fixo é um dos focos e o círculo é o diretor relativo ao outro foco.

De fato, sendo  $(F, 2a)$  o círculo,  $F'$  o ponto fixo interior e  $M$  um ponto equidistante dos dois (Figura 21), pode-se escrever:

$$MS = MF'$$

Mas,  $FM + MS = FS = 2a$

Ou,  $MF + MF' = 2a$

Assim,  $M$  descreve a elipse de focos  $F$  e  $F'$  e eixo maior  $2a$ , para a qual o círculo considerado é um dos diretores.

23.2 – O lugar geométrico dos centros dos círculos pertencentes a um ponto fixo, interior a um círculo dado, e tangentes a este círculo é a elipse, para a qual o ponto fixo é um dos focos e o círculo dado é o diretor relativo ao outro foco.

Porque sendo  $(F, 2a)$  e  $F'$  o círculo e o ponto fixos dados e  $M$  o centro de um círculo pertencente a  $F'$  e tangente em  $S$  ao dado (Figura 22), podemos escrever:  $MS = MF'$ .

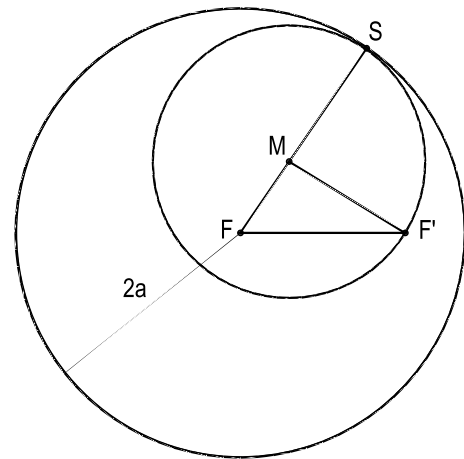


Figura 22

Assim, o ponto  $M$ , em estudo, será equidistante do círculo e do ponto fixo dados.

Teremos, pois, retornado à propriedade anterior.

## 24 – Determinação do ponto de contato de uma tangente dada

Quando são conhecidos os dois focos e uma tangente genérica  $t$  a uma elipse, para determinar rigorosamente o ponto de contato  $M$  da tangente com a curva, basta construir o simétrico  $S$  de um de seus focos em relação à tangente (Figura 23) e unir  $S$  ao outro foco (número 21.4).

O ponto de contato  $M$  será o de interseção de  $FS$  com  $t$ .

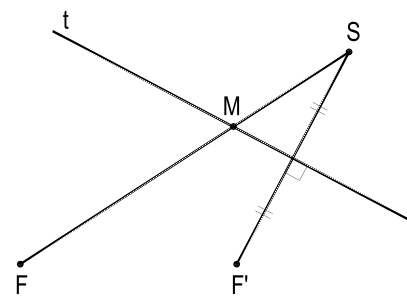


Figura 23

## 25 – Construção direta da elipse, a partir do círculo diretor

Análise: Porque o círculo diretor relativo ao foco  $F$  é o lugar dos simétricos  $S$  do foco  $F'$  em relação às tangentes (número 22), a mediatriz  $t$  do segmento formado pelo foco  $F'$  e por um ponto  $S$  qualquer do círculo diretor ( $F, 2a$ ) será uma tangente à elipse (Figura 24).

E porque a reta formada pelo foco  $F$  e pelo simétrico  $S$  do outro foco, em relação a uma tangente qualquer  $t$ , passa necessariamente pelo ponto de contato  $M$  dessa tangente (número 21.4), a interseção de  $FS$  com  $t$  produz um ponto  $M$  da elipse (Figura 24).

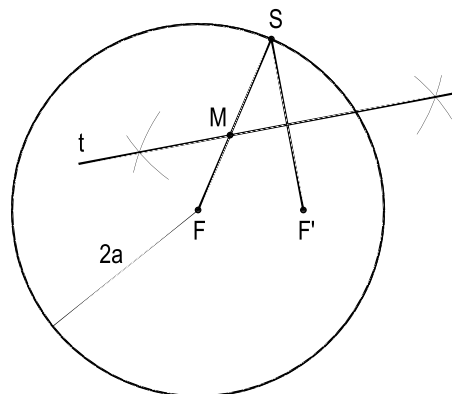


Figura 24

Construção: Dados os dois focos  $F$  e  $F'$  e o valor  $2a$  do eixo maior, constrói-se um dos círculos diretores, tomando-se, sobre ele, vários pontos  $S$  (Figura 25).

Para cada  $S$ , a interseção de  $FS$  com a mediatriz de  $F'S$  é um ponto  $M$  da elipse.

A maior vantagem que o processo proporciona está no fato de se ter, pela construção realizada, além de pontos correntes  $M$ , as tangentes  $t$  à curva, nesses pontos. As tangentes dão, implicitamente, uma razoável noção da mudança de curvatura da elipse.

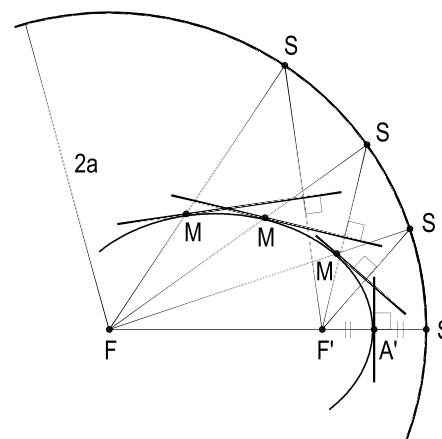


Figura 25

## 26 – Construção das tangentes

26.1 – Tangente num ponto  $M$  da curva (dados os dois focos e o ponto  $M$ ).

Para obter a tangente  $t$ , em  $M$ , basta prolongar um dos raios vetores –  $FM$  – e girar o outro –  $MF'$  – até tomar a posição  $MS$ , no prolongamento do primeiro (Figura 26).

A tangente será a perpendicular de  $M$  à reta  $F'S$ .

De fato, assim fazendo,  $t$  será a bissetriz do ângulo externo formado pelos raios vetores do ponto  $M$  (número 20).

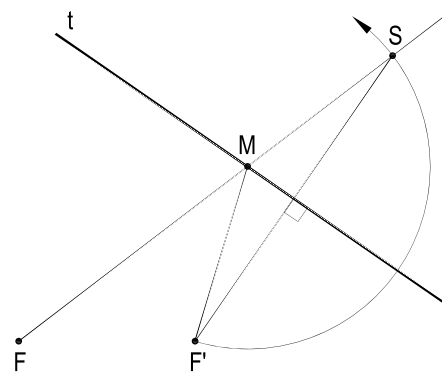


Figura 26

26.2 – Tangentes paralelas a uma reta  $r$  (dados os focos, o valor  $2a$  do eixo maior e a reta  $r$ ).

Análise: Sendo  $t_1$  e  $t_2$  as tangentes paralelas à reta dada  $r$  e  $(F, 2a)$  um dos círculos diretores, porque os simétricos  $S_1$  e  $S_2$  de  $F'$  em relação às tangentes pertencem ao diretor  $(F, 2a)$ ,  $t_1$  e  $t_2$  serão as mediatrizes dos segmentos  $F'S_1$  e  $F'S_2$  (Figura 27).

E porque as tangentes devem ser paralelas a  $r$ , os simétricos pertencerão à perpendicular traçada por  $F'$  à reta  $r$ .

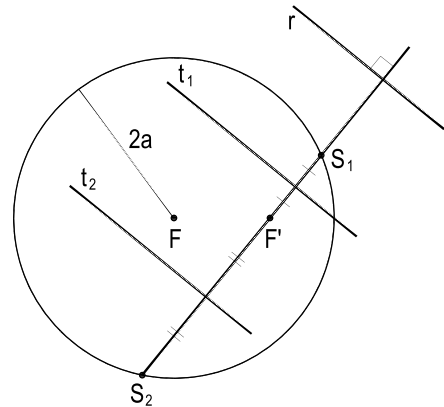


Figura 27

Construção: Sendo dados a direção  $r$  das tangentes, os dois focos e o valor  $2a$  do eixo maior, constrói-se inicialmente um dos círculos diretores  $(F, 2a)$  e, pelo segundo foco  $F'$ , a perpendicular a  $r$  (Figura 28) que corta aquele círculo segundo os pontos  $S_1$  e  $S_2$ .

Determina-se, então, as mediatrizes  $t_1$  e  $t_2$  dos segmentos  $F'S_1$  e  $F'S_2$ , respectivamente, as quais são as tangentes procuradas.

Para obter os pontos de contato  $M_1$  e  $M_2$  dessas tangentes, basta ligar os simétricos  $S_1$  e  $S_2$  ao foco  $F$  (número 24).

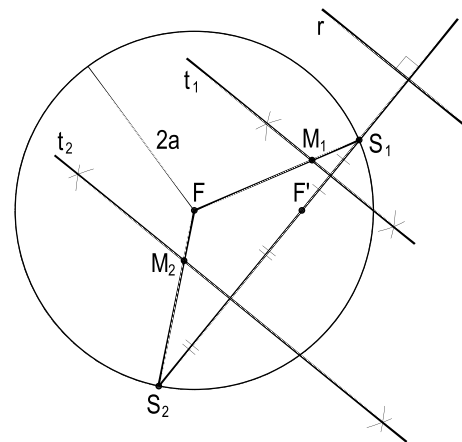


Figura 28

26.3 – Tangentes por um ponto  $J$  exterior (dados os dois focos, o valor  $2a$  do eixo maior e o ponto  $J$ ).

Análise: Sejam  $t_1$  e  $t_2$  as tangentes procuradas e  $(F, 2a)$  um dos círculos diretores (Figura 29).

Porque os simétricos  $S_1$  e  $S_2$  do foco  $F'$  em relação às tangentes, pertencem àquele círculo (número 22), conclui-se que:  $JS_1 = JF' = JS_2$ .

Então, esses simétricos  $S_1$  e  $S_2$  devem também pertencer a um círculo de centro  $J$  e raio  $JF'$  (Figura 29).

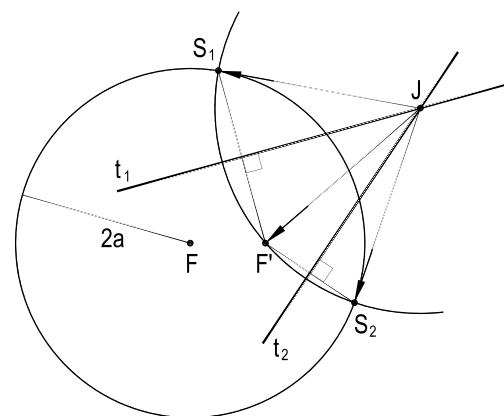


Figura 29

Construção: Dados o ponto J, os dois focos e o valor do eixo maior  $2a$ , constrói-se um dos círculos diretores  $(F, 2a)$  e o círculo que tem centro em J e que passa pelo segundo foco  $F'$  (Figura 30). Os dois círculos cortam-se segundo os pontos  $S_1$  e  $S_2$ , simétricos de  $F'$  em relação às tangentes procuradas.

Assim, as perpendiculares traçadas por J aos segmentos  $F'S_1$  e  $F'S_2$  são as tangentes  $t_1$  e  $t_2$  pedidas, mediatrizes que são dos segmentos  $F'S_1$  e  $F'S_2$ , respectivamente.

Para determinar os pontos de contato  $M_1$  e  $M_2$  dessas tangentes, basta unir os simétricos  $S_1$  e  $S_2$  ao foco F (número 24).

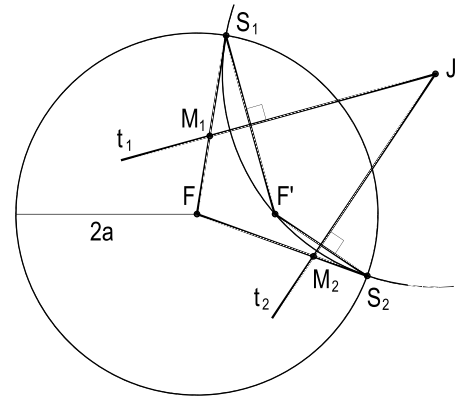


Figura 30

## 27 – Teorema de La Hire

O lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos de uma elipse sobre as tangentes à curva é seu círculo principal.

Demonstração: Seja  $t$  uma tangente qualquer à elipse de focos  $F$  e  $F'$  e de eixo maior  $AA' = 2a$  (Figura 31).

Porque o simétrico  $S$  de  $F'$  em relação àquela tangente pertence ao círculo diretor  $(F, 2a)$  relativo ao outro foco (número 22), vem  $FS = 2a$ .

O ponto  $P$ , médio de  $F'S$ , é a projeção ortogonal de  $F'$  sobre  $t$ , em estudo. E porque o ponto  $O$ , médio de  $FF'$ , é o próprio centro da elipse (Figura 31), o triângulo  $FF'S$  dá:

$$OP = \frac{1}{2} \cdot FS$$

$$\therefore OP = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$$

Assim, porque a projeção  $P$  de um dos focos sobre uma tangente genérica dista  $a$  do centro  $O$  da elipse, conclui-se que o lugar geométrico dos pontos  $P$  é o círculo  $(O, a)$  principal da elipse.

Então o lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos de uma elipse sobre as tangentes à curva é o seu círculo principal.

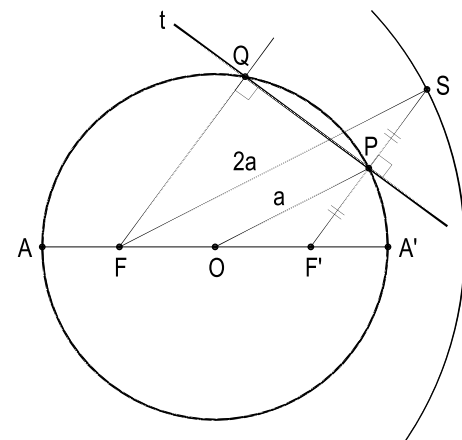


Figura 31

## 28 – Teorema

O produto das distâncias de um dos focos de uma elipse a duas tangentes paralelas é constante e igual ao quadrado do semieixo menor.

Demonstração: Sejam  $t$  e  $t'$  duas tangentes paralelas a uma elipse e  $P$  e  $P'$  as projeções ortogonais do foco  $F$  sobre elas (Figura 32).

Do teorema de La Hire, sabe-se que  $P$  e  $P'$  pertencem ao círculo  $(O, a)$  principal da elipse.

Sendo  $d$  e  $d'$  as distâncias de  $F$  àquelas tangentes, a potência  $P_{F(O)}$  de  $F$  em relação ao círculo  $(O, a)$  fornece (*Geometria Plana*, números 234 e 242):

$$P_{F(O)} = FP \cdot FP' = FA \cdot FA' \quad \therefore \quad d \cdot d' = (a - c)(a + c) = a^2 - c^2$$

Como  $a^2 - c^2 = b^2$ , vem:  $d \cdot d' = b^2$

Assim, o produto das distâncias...

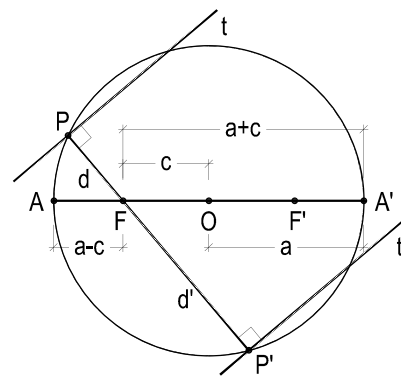


Figura 32

## 29 – Corolário

O produto das distâncias dos dois focos de uma elipse a uma tangente qualquer é constante e igual ao quadrado do semieixo menor.

De fato, porque duas tangentes paralelas  $t$  e  $t'$  são simétricas em relação ao centro  $O$  da elipse, os triângulos iguais  $FOP'$  e  $F'OP''$  (Figura 33) dão:  $d' = d''$

Logo,  $d \cdot d' = d \cdot d'' \quad \therefore \quad d \cdot d'' = b^2$

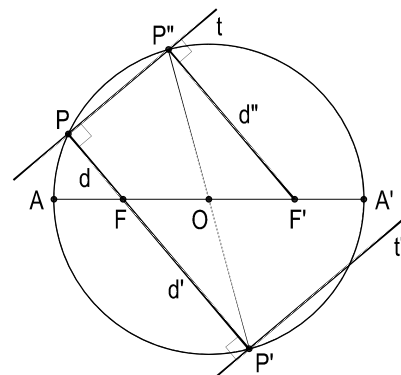


Figura 33

## 30 – Construções

Do teorema de La Hire (número 27) resultam as seguintes construções elementares:

30.1 – Determinação dos focos a partir do eixo maior  $AA'$  e de uma tangente  $t$ .

Para obter os focos, conhecendo uma tangente genérica  $t$  e o eixo maior  $AA'$ , basta construir o círculo principal e determinar os pontos  $P$  e  $P'$  em que ele corta aquela tangente (Figura 34).

Porque  $P$  e  $P'$  são as projeções respectivas dos focos sobre a tangente  $t$  (número 27), as perpendiculares a  $t$ , traçadas por  $P$  e por  $P'$ , cortam o eixo  $AA'$  segundo os focos  $F$  e  $F'$  procurados.

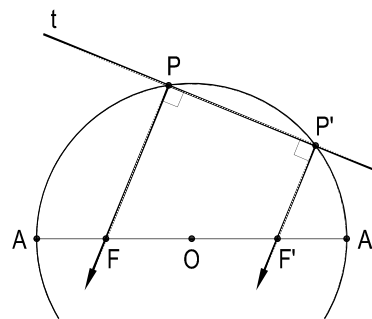


Figura 34

30.2 – Determinação dos eixos de uma elipse a partir de seus focos  $F$  e  $F'$  e de uma tangente  $t$ .

Dados os dois focos  $F$  e  $F'$  e uma tangente genérica  $t$ , para determinar o eixo maior, basta projetar ortogonalmente um dos focos sobre a tangente, obtendo um ponto  $P$  do círculo principal (número 27). E, como o centro desse círculo é o ponto  $O$ , médio de  $FF'$  – o próprio centro da elipse – descreve-se o círculo  $(O, OP)$  que corta a reta  $FF'$  (Figura 35) segundo os vértices  $A$  e  $A'$  do eixo maior.

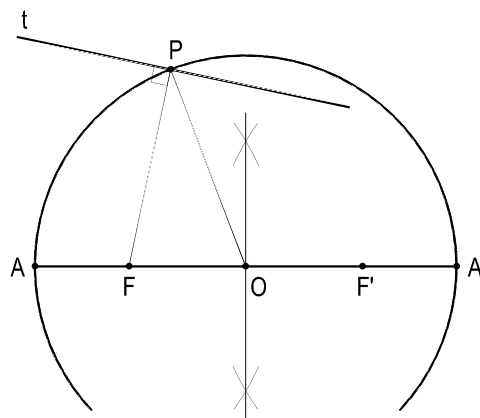


Figura 35

Para obter o eixo menor  $BB'$ , já sendo conhecido o valor  $2a$  do maior, basta construir os triângulos retângulos  $FOB$  e  $FOB'$  (Figura 36), com hipotenusas iguais ao semieixo maior  $a$  (número 14.2), o que se consegue descrevendo o círculo de centro  $F$  e raio  $a$ , até que ele corte a mediatriz  $s$  do segmento  $FF'$ .

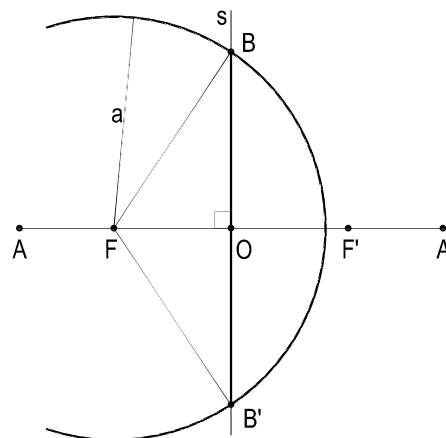


Figura 36

30.3 – Construção das tangentes a uma elipse paralelas a uma reta  $r$  (dados o eixo maior  $AA'$ , um dos focos  $F'$  e a reta  $r$ ).

Com  $AA'$  por diâmetro, constrói-se (Figura 37) o círculo principal, ao qual pertencerão as projeções  $P_1$  e  $P_2$  dos focos sobre as tangentes procuradas (número 27).

E, como elas devem ter a direção da reta  $r$ , as projetantes  $F'P_1$  e  $F'P_2$  serão perpendiculares à reta  $r$  dada.

Assim, traçando, pelo foco dado  $F'$ , a perpendicular a  $r$ , obtém-se, por interseção com o círculo, os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , por onde passam as tangentes  $t_1$  e  $t_2$  pedidas (Figura 37).

Para obter os pontos de contato dessas tangentes, não incluídos na Figura 37, basta determinar o segundo foco da elipse e operar como o disposto no item 24.

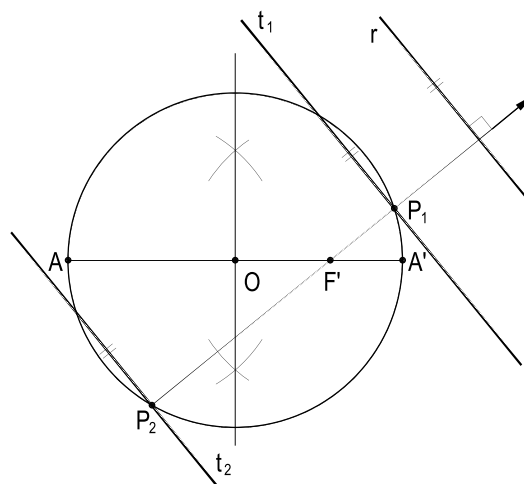


Figura 37

30.4 – Construção das tangentes a uma elipse por um ponto J exterior (dados seu eixo maior AA', um dos focos F' e o ponto exterior J).

Análise: Sejam  $t_1$  e  $t_2$  as tangentes procuradas e (O, a) o círculo principal, ao qual pertencerão as projeções ortogonais  $P_1$  e  $P_2$  do foco  $F'$  sobre elas. Porque os triângulos  $JF'P_1$  e  $JF'P_2$  são retângulos, os pontos  $P_1$  e  $P_2$  pertencerão ao círculo de diâmetro  $JF'$  (Figura 38).

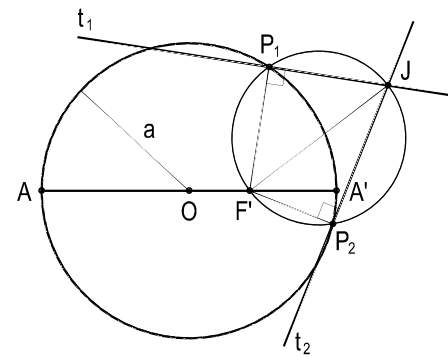


Figura 38

Construção: Constrói-se o círculo principal e o círculo que tem por diâmetro o segmento  $JF'$ , formado pelo foco dado  $F'$  e pelo ponto dado  $J$ , os quais se cortam segundo os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , por onde passam as tangentes procuradas (Figura 39).

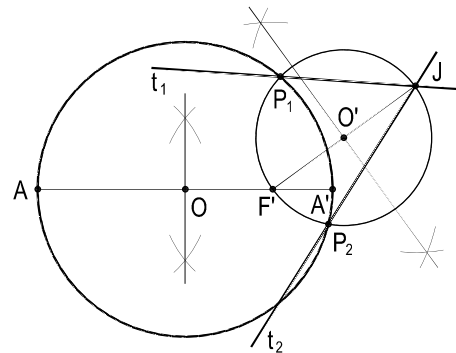


Figura 39

### 31 – Teoremas de Poncelet

1. As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma elipse são duas cevianas isogonais do triângulo formado por esse ponto e pelos dois focos da elipse.
2. A reta que une um foco de uma elipse a um ponto exterior é a bissetriz do ângulo formado pelas retas que unem aquele foco aos pontos de contato das duas tangentes traçadas pelo ponto exterior.

Demonstrações:

1. Sejam  $t$  e  $t'$  as tangentes de um ponto  $J$  exterior a uma elipse de focos  $F$  e  $F'$  e de eixo maior  $2a$ .

Sendo  $S$  e  $S'$  os simétricos de  $F$  e de  $F'$ , respectivamente em relação a  $t$  e a  $t'$  (Figura 40), podemos escrever:

$$JS = JF \quad (1) \quad \text{e} \quad JF' = JS' \quad (2)$$

E, como  $FS'$  e  $F'S$  são raios dos dois círculos diretores da elipse (número 22), temos:

$$F'S = FS' \quad (3)$$

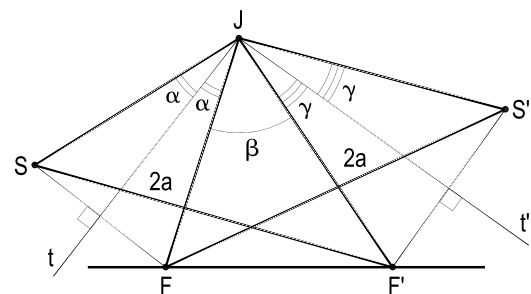


Figura 40

As relações (1), (2) e (3) asseguram a igualdade dos triângulos JSF' e JS'F (3º caso). Daí decorre a igualdade dos ângulos  $(2\alpha + \beta)$  e  $(\beta + 2\gamma)$ , opostos aos lados iguais F'S e FS'.

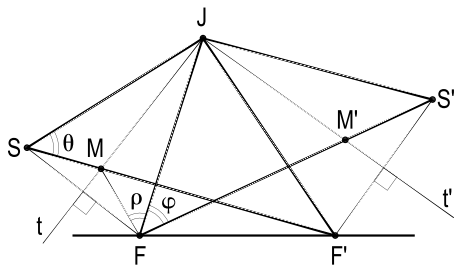


Figura 41

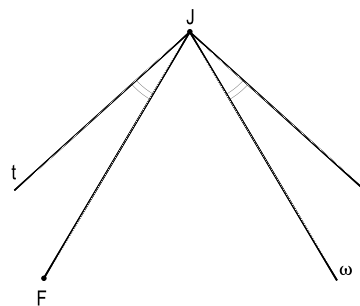


Figura 42

$$\text{Então: } 2\alpha + \beta = \beta + 2\gamma \quad \therefore \quad 2\alpha = 2\gamma \quad \therefore \quad \alpha = \gamma$$

Assim, para o triângulo JFF', t e t' são duas cevianas isogonais, como se queria provar.

- Além do que já foi considerado, incluamos os pontos de contato M e M' das tangentes t e t' (Figura 41).

Os triângulos iguais JSF' e JS'F dão:

$$\theta = \varphi \quad (1)$$

E a simetria dos pontos S e F, e conseqüentemente dos triângulos JSM e JFM, em relação à tangente t, permite escrever:

$$\theta = \rho \quad (2)$$

De (1) e (2), vem:  $\varphi = \rho$

Isto é, FJ é a bissetriz do ângulo formado pelas retas FM e FM'. Como se queria provar.

### 32 – Corolário do primeiro teorema de Poncelet

Dados um ângulo  $t \hat{J} t'$  e um ponto F interior a ele, o lugar geométrico dos segundos focos F' das elipses que têm um foco fixo F e que são tangentes às retas t e t' é a semirreta J $\omega$  isogonal de JF em relação aos lados do ângulo dado (Figura 42), exceto, naturalmente, o ponto J.

### 33 – Observação

Esse corolário, do primeiro teorema de Poncelet (número 32), pode ser instituído diretamente.

De fato, se considerarmos os simétricos S e S' do foco F em relação às tangentes t e t' à elipse (Figura 43), porque S e S' pertencerão ao círculo diretor relativo ao foco móvel F', seu centro F' deverá pertencer à mediatriz do segmento SS'.

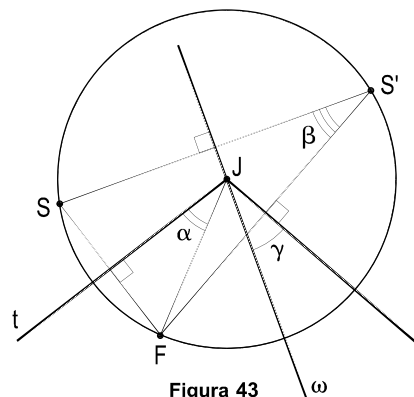


Figura 43



Mas, porque  $t$  e  $t'$  são as mediatrizes dos lados  $FS$  e  $FS'$  do triângulo  $FSS'$  (Figura 43),  $J$  é o circuncentro desse triângulo.

E, assim, a mediatriz  $\omega$  de  $SS'$ , em estudo, passará necessariamente por  $J$ .

E se, finalmente, considerarmos o círculo circunscrito ao triângulo  $FSS'$ , comparando o ângulo central  $\alpha$  e o ângulo inscrito  $\beta$  (Figura 43), teremos:

$$\alpha = \beta = \frac{FS}{2} \quad (1)$$

$$\text{Por terem lados perpendiculares: } \gamma = \beta \quad (2)$$

Das relações (1) e (2), vem:  $\alpha = \gamma$

A mediatriz de  $SS'$  servirá, pois, de suporte à semirreta  $w$ , isogonal de  $JF$  em relação aos lados do ângulo  $t \hat{J} t'$ . E, naturalmente, só funciona como lugar para o foco móvel  $F'$  a porção da mediatriz situada no interior do ângulo, uma vez que  $J$  é necessariamente exterior às elipses consideradas.

### 34 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma elipse é o círculo concêntrico com ela, tendo raio igual à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são iguais aos semieixos da elipse.

Demonstração: Seja  $J$  um ponto qualquer do lugar, isto é, tal que as tangentes  $t$  e  $t'$  de  $J$  à elipse de focos  $F$  e  $F'$  sejam perpendiculares entre si.

Consideremos o simétrico  $S$  de  $F$  em relação à tangente  $t$ , que nos dá (Figura 44):

$$\alpha = \varphi \quad (1)$$

$$e \quad JS = JF \quad (2)$$

Do primeiro teorema de Poncelet, temos:

$$\alpha = \gamma \quad (3)$$

$$(1) \text{ e } (3) \text{ dão: } \varphi = \gamma \quad (4)$$

A hipótese e a relação (4) permitem escrever:

$$\gamma + \alpha + \beta = 90^\circ \quad \therefore \quad \varphi + \alpha + \beta = 90^\circ$$

Assim, o triângulo  $JSF'$  é retângulo em  $J$  (Figura 44). Logo:

$$JS^2 + JF'^2 = F'S^2$$

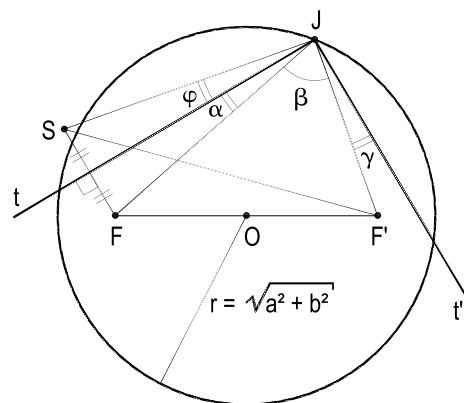


Figura 44

Como  $F'S = 2a$  (número 22) e  $JS = JF$  (relação 2):  $JF^2 + JF'^2 = (2a)^2$ .

E, porque, então, a soma dos quadrados das distâncias de J aos pontos fixos F e F' é constante, o lugar desses pontos J é um círculo (*Geometria Plana*, número 204.1) que tem por centro o ponto O, médio de FF' (Figura 44), e raio OJ, calculável pela expressão:

$$OJ = \frac{1}{2} \sqrt{2(JF^2 + JF'^2) - FF'^2}$$

$$\therefore OJ^2 = \frac{1}{4} [2(2a^2) - (2c)^2] = \frac{1}{4} (8a^2 - 4c^2)$$

$$\therefore OJ^2 = \frac{4}{4} (2a^2 - c^2) = a^2 + (a^2 - c^2)$$

E como (número 14.2)  $a^2 - c^2 = b^2$ , vem:

$$OJ^2 = a^2 + b^2$$

Assim, o lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma elipse é o círculo com ela concêntrico, com raio igual à hipotenusa de um triângulo, de catetos respectivamente iguais aos semieixos da elipse.

### 35 – Círculo de Monge

Para toda elipse, o círculo, como acima instituído, de cujos pontos se pode traçar tangentes perpendiculares a ela é denominado círculo ortótico da elipse (Figura 45) ou, como homenagem ao geômetra francês Gaspard Monge, seu criador, círculo de Monge da elipse.

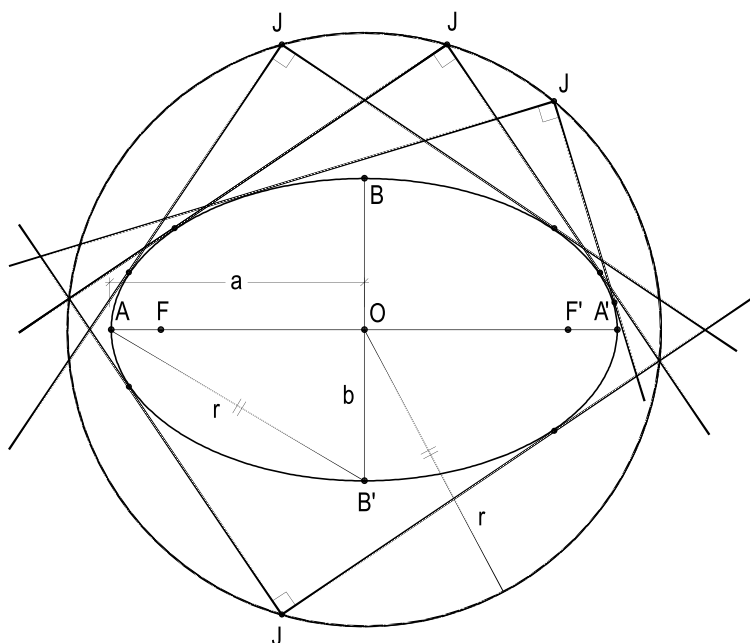


Figura 45

### 36 – Teorema

Os quatro raios vetores de dois pontos genéricos de uma elipse são tangentes a um mesmo círculo.

Demonstração: Consideremos dois pontos quaisquer  $M$  e  $N$  de uma elipse de focos  $F$  e  $F'$ , assim como as duas tangentes  $JM$  e  $JN$  à curva, naqueles dois pontos, bem como seus raios vetores  $FM$ ,  $FN$ ,  $F'M$  e  $F'N$  (Figura 46).

Unamos os focos ao ponto  $J$ , de encontro das duas tangentes, e anotemos que (número 20):

$$\alpha = \beta \quad (1)$$

Pelo segundo teorema de Poncelet (número 31.2),

$$\gamma = \varphi \quad (2)$$

$$\text{e } \theta = \rho \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) implicam em que o ponto  $J$  pertença às bissetrizes dos ângulos  $\widehat{XNF}$ ,  $\widehat{XF'M}$  e  $\widehat{MF'N}$  e, por isso, que o ponto  $J$  equidiste das retas  $F'N$ ,  $F'M$ ,  $FM$  e  $FN$ , sendo, então, centro de um círculo tangente a essas quatro retas, ou seja, aos quatro raios vetores dos pontos correntes genéricos  $M$  e  $N$  considerados, o que prova o teorema.

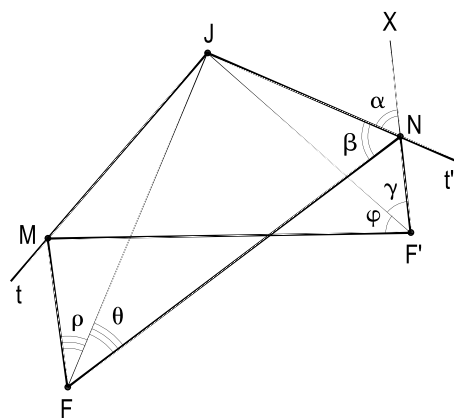


Figura 46

### 37 – Determinação rigorosa dos pontos de corte de uma reta dada com uma elipse dada por seus focos $F$ e $F'$ e pelo valor $2a$ de seu eixo maior

Análise: Consideremos, além da reta dada  $r$  e dos focos  $F$  e  $F'$ , o círculo diretor  $(F, 2a)$  da elipse. Os pontos  $M$  e  $N$ , comuns à reta e à curva, são (número 23.2) centros de dois círculos que, passando por  $F'$ , tangenciam internamente o círculo diretor considerado (Figura 47).

Assim, o problema proposto reside em determinar, sobre a reta  $r$ , os centros  $M$  e  $N$  dos círculos tangentes ao círculo  $(F, 2a)$  e pertencentes ao ponto  $F'$ .

Porque  $r$  servirá de suporte a um diâmetro do círculo  $M$ , um dos procurados, este círculo passará também pelo ponto  $J$ , simétrico de  $F'$  em relação a  $r$  (Figura 47).

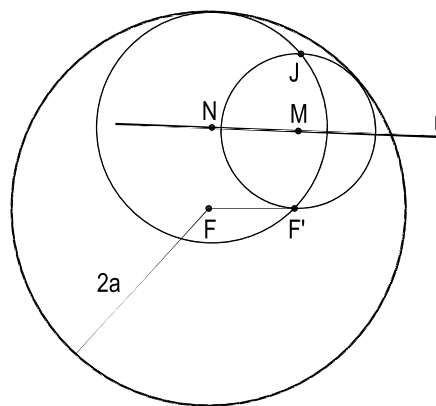


Figura 47

E, se considerarmos um terceiro círculo X, também pertencente aos pontos  $F'$  e  $J$  e secante ao diretor, poderemos obter o centro radical  $CR$  dos três círculos e, em seguida, o eixo radical  $CRT$  entre o diretor e o círculo  $M$ , o qual tem de ser a tangente comum aos dois, logo tangente ao diretor (Figura 48).

E, obtido o ponto  $T$  de contato desse eixo radical com o diretor, porque  $T$  é o próprio ponto de contato deste círculo com o procurado, a reta  $FT$  corta  $r$  segundo o ponto  $M$  pedido (Figura 48).

O segundo ponto ( $N$ ) provirá da união de  $F$  ao ponto de contato  $T'$  da segunda tangente traçada do centro radical  $CR$  ao círculo diretor ( $F, 2a$ ) (Figura 48).

Resolução: De posse do valor  $2a$  do eixo maior, constrói-se um dos círculos diretores ( $F, 2a$ ) da elipse.

Determina-se, então, o simétrico  $J$  de  $F'$  em relação a  $r$  e, arbitrando um ponto  $X$  sobre  $r$ , traça-se um círculo auxiliar pertencente aos pontos  $F'$  e  $J$  e secante ao diretor nos pontos 1 e 2 (Figura 49).

O eixo radical entre o círculo auxiliar  $X$  e o procurado é a própria reta  $F'J$  e o eixo radical entre o círculo diretor e o auxiliar  $X$  passa pelos dois pontos 1 e 2 de corte desses círculos. E, por interseção desses dois eixos, obtém-se o centro radical  $CR$  dos três círculos em jogo (Figura 49).

Determina-se, a seguir, com rigor, os pontos de contato  $T$  e  $T'$  das tangentes do centro radical  $CR$  ao círculo diretor e, unindo-os a  $F$ , obtém-se, sem construir a elipse, os pontos  $M$  e  $N$  em que ela é cortada pela reta  $r$  (Figura 49).

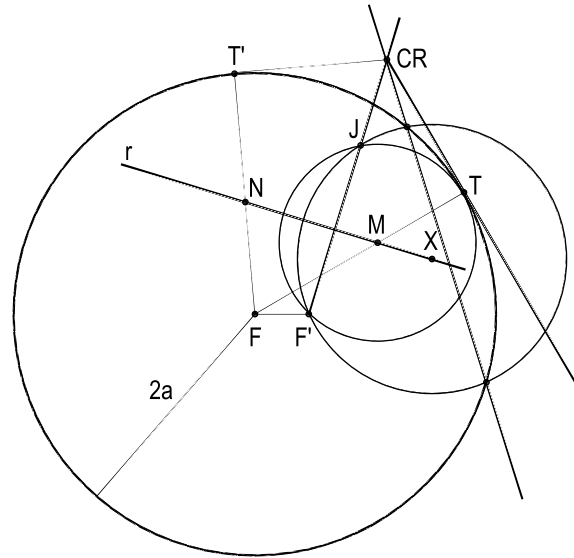


Figura 48

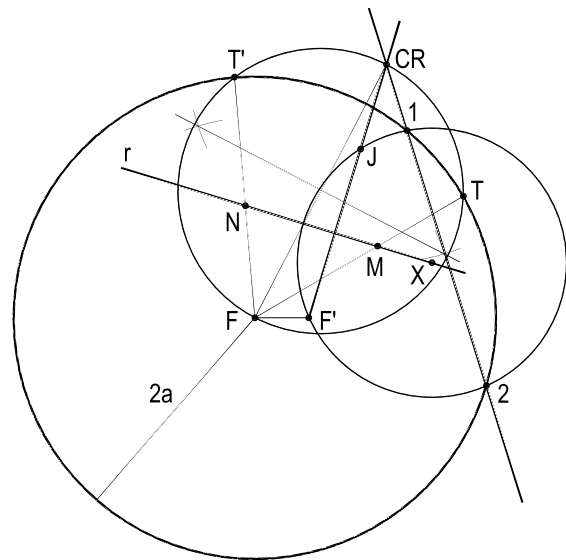


Figura 49

# CAPÍTULO II

## ELIPSE COMO PROJEÇÃO ORTOGONAL DO CÍRCULO

### 38 – Teorema

A projeção ortogonal de um círculo sobre um plano oblíquo ao seu é uma elipse.

Demonstração: Consideremos o círculo (c) pertencente ao plano ( $\gamma$ ) e estudemos sua projeção ortogonal sobre um plano ( $\pi$ ), oblíquo a ( $\gamma$ ), que, por comodidade, admitimos passar pelo centro O do círculo.

Designemos por a o raio do círculo e por b o segmento OB, projeção sobre ( $\pi$ ) do raio O(B) perpendicular ao diâmetro AA' situado sobre a interseção  $\gamma\pi$  dos dois planos (Figura 50).

Além disso, consideremos um ponto (M) qualquer do círculo e sua projeção M sobre ( $\pi$ ) e efetuemus a rotação de ( $\gamma$ ), em torno de  $\gamma\pi$ , até que este plano venha a coincidir com ( $\pi$ ) (Figura 50).

Para o sistema cartesiano pertencente a ( $\pi$ ), em que os eixos das abscissas e das ordenadas são, respectivamente, as retas AA' e BB' (Figura 51), os pontos M e  $\bar{M}$  têm, respectivamente, coordenadas (x, y) e (x,  $\bar{y}$ ).

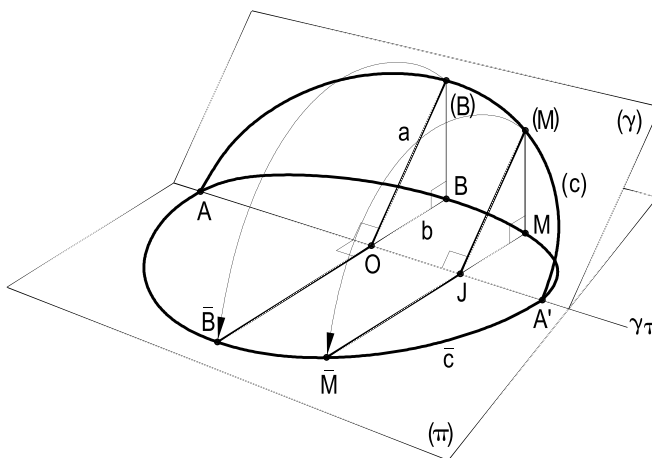


Figura 50

E (Figura 50) o triângulo OJM $\bar{M}$  fornece:

$$x^2 + \bar{y}^2 = a^2 \quad (1)$$

Mas os triângulos semelhantes (B)BO e (M)MJ (Figura 50) fornecem:

$$\frac{\bar{y}}{y} = \frac{a}{b} \quad \therefore \quad \bar{y} = \frac{ay}{b} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem:

$$x^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2 = a^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

ou 
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Assim, (número 16), a projeção ortogonal do círculo (c) sobre  $(\pi)$  é uma elipse de eixos  $2a$  e  $2b$ .

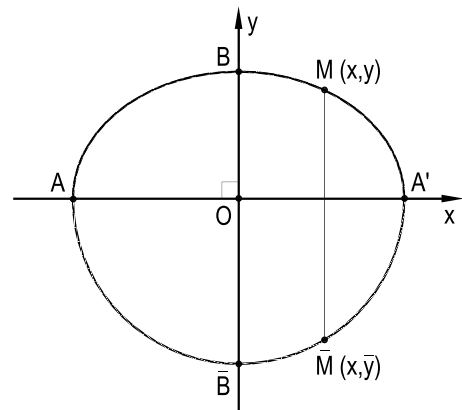


Figura 51

### 39 – Observações

39.1 – O eixo maior  $2a$  da elipse é a projeção do diâmetro do círculo paralelo ao plano de projeção (Figura 52).

39.2 – O eixo menor  $2b$  da elipse é a projeção do diâmetro do círculo de maior declive de  $(\gamma)$  em relação a  $(\pi)$  (Figura 52).

39.3 – A distância focal  $2c$  da elipse é igual à diferença entre as distâncias  $(B)B$  e  $(B')B'$  dos extremos do diâmetro  $(B)(B')$  de maior declive do círculo ao plano de projeção (Figura 52).

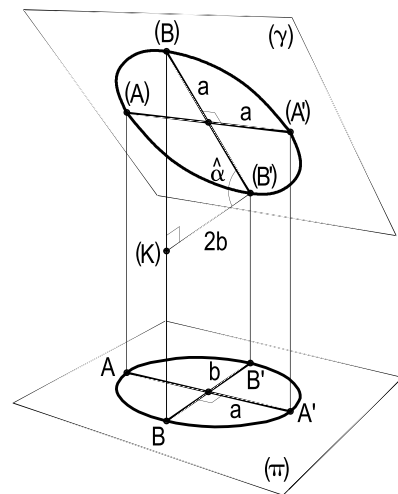


Figura 52

De fato, se considerarmos, por  $(B')$ , a paralela  $(B')(K)$  ao eixo menor  $BB'$  da elipse e se a limitarmos entre as projetantes de  $(B)$  e de  $(B')$ , o triângulo  $(B)(B')(K)$  (Figura 53) fornece:

$$(B)(K)^2 = (B)(B')^2 - (B')(K)^2 \quad \therefore \quad (B)(K)^2 = (2a)^2 - (2b)^2$$

Mas como (número 14.2),  $(2a)^2 - (2b)^2 = (2c)^2$ , chegamos a:

$$(B)(K) = 2c$$

39.4 – O cosseno do ângulo formado entre os planos do círculo e da elipse mede a razão entre os eixos, menor e maior, da elipse (Figuras 52 e 53).

$$\cos \alpha = \frac{(B')(K)}{(B)(B')} = \frac{2b}{2a}$$

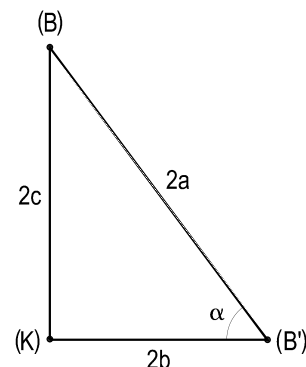


Figura 53

39.5 – O seno do ângulo formado entre os planos do círculo e da elipse mede a excentricidade da elipse.

$$\text{sen } \alpha = \frac{(B)(K)}{(B)(B')} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \quad (\text{Figura 53}) \quad \therefore \quad \text{sen } \alpha = e$$

39.6 – Quando o plano ( $\gamma$ ) é paralelo a ( $\pi$ ), a projeção do círculo faz-se em verdadeira grandeza, ou seja, é outro círculo, igual àquela.

39.7 – Quando o plano ( $\gamma$ ) é perpendicular a ( $\pi$ ), a projeção do círculo é um segmento de reta igual ao seu diâmetro.

39.8 – O círculo principal da elipse é igual ao círculo que deu, por projeção, aquela elipse.

#### 40 – Área da elipse

Considerando a elipse de eixos  $2a$  e  $2b$  como projeção ortogonal de um círculo, sabe-se que o diâmetro do círculo é igual ao eixo maior da elipse (número 39.1) e que o cosseno do ângulo  $\alpha$  formado entre os planos das duas figuras é igual à razão  $2b/2a$  entre os eixos da elipse (número 39.4).

A área  $S$  da elipse projeção é calculável (*Geometria Espacial*, número 53) em função da área ( $S$ ) do círculo e daquele ângulo  $\alpha$  pela expressão:

$$S = (S) \cos \alpha \quad \therefore \quad S = \pi a^2 \frac{2b}{2a}$$

Ou seja,  $S = \pi ab$

#### 41 – Observação

A área da elipse é igual à média geométrica entre as áreas de seus círculos principal e auxiliar.

De fato (Figura 54), para a área  $S$  da elipse, vale escrever:

$$S^2 = (\pi ab)^2$$

$$\therefore \quad \boxed{S^2 = (\pi a^2) \cdot (\pi b^2)}$$

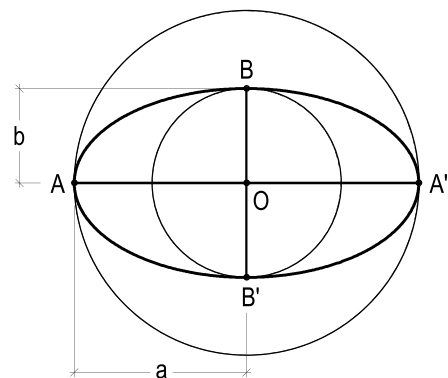


Figura 54

## 42 – Teorema

Existe uma razão constante entre as ordenadas, em relação ao eixo maior, dos pontos de uma elipse e de seus correspondentes no círculo principal. Entenda-se por correspondentes dois pontos de abscissas iguais, um na elipse, outro no seu círculo principal.

Demonstração: Consideremos um círculo (c) pertencente a um plano ( $\gamma$ ) e a elipse, projeção de (c) sobre um plano ( $\pi$ ) oblíquo a ( $\gamma$ ), que contém o centro (O) daquele círculo, bem como um ponto (M), genérico de (c), e sua projeção M sobre ( $\pi$ ) (Figura 55).

Rebatendo-se ( $\gamma$ ) sobre ( $\pi$ ), obtém-se o círculo (c) principal da elipse (número 39.8)

E, porque o triângulo (M)JM, de rebatimento do ponto (M), pertence a um plano perpendicular à charneira  $\gamma\pi$ ,  $\bar{M}$  e M pertencerão a uma reta  $J\bar{M}M$  perpendicular ao eixo maior da elipse (Figuras 55 e 56).

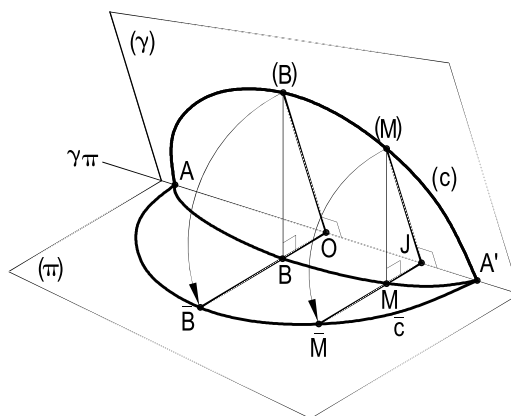


Figura 55

Como os triângulos de rebatimento relativos a todos os pontos (M) do círculo são semelhantes ao triângulo (B)OB (Figura 55), para todo par de pontos correspondentes M e  $\bar{M}$  da elipse e de seu círculo principal maior vale escrever:

$$\frac{JM}{J(M)} = \frac{OB}{O(B)} = \frac{b}{a}$$

E como  $J\bar{M} = J(M)$ , vem:

$$\boxed{\frac{JM}{J\bar{M}} = \frac{b}{a}}$$

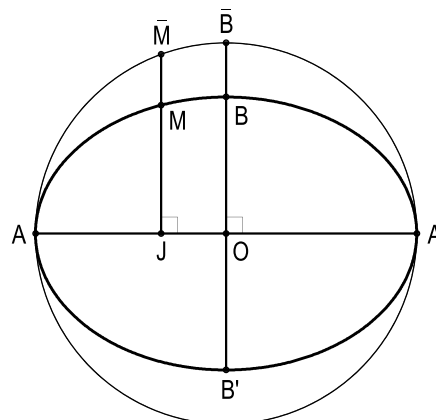


Figura 56

Então, existe uma razão constante...



### 43 – Teorema

Existe uma razão constante entre as abscissas, em relação ao eixo menor, dos pontos de uma elipse e de seus correspondentes no círculo auxiliar. Entenda-se por correspondentes dois pontos de ordenadas iguais, um na elipse, outro no seu círculo auxiliar.

Demonstração: Consideremos os círculos principal e auxiliar de uma elipse e tracemos, por um ponto M qualquer da elipse, a perpendicular  $M\bar{M}$  ao eixo maior, bem como o raio  $O\bar{M}$  do círculo principal, o qual corta o círculo auxiliar segundo o ponto  $\bar{M}'$  (Figura 57).

Pelo teorema anterior (número 42), podemos (Figura 57) escrever:

$$\frac{JM}{JM'} = \frac{b}{a} \quad (1)$$

Mas, naturalmente,

$$\frac{O\bar{M}'}{OM} = \frac{b}{a} \quad (2)$$

(1) e (2) fornecem, então,  $\frac{JM}{JM'} = \frac{O\bar{M}'}{OM}$

Daí se concluir que a reta  $M\bar{M}'$ , por dividir proporcionalmente os lados  $\bar{M}O$  e  $\bar{M}J$  do triângulo  $\bar{M}OJ$ , é paralela ao eixo maior, ou seja, perpendicular ao eixo menor.

Assim, os triângulos  $LO\bar{M}'$  e  $JOM$  são semelhantes, fornecendo:

$$\frac{L\bar{M}'}{OJ} = \frac{O\bar{M}'}{OM} = \frac{b}{a}$$

E como  $OJ = LM$ , temos:  $\frac{L\bar{M}'}{LM} = \frac{b}{a}$

Então, existe uma razão constante...

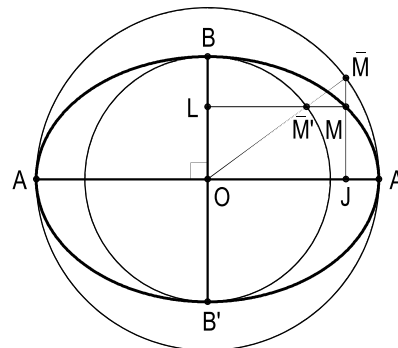


Figura 57

### 44 – Corolário

Toda elipse pode ser considerada como transformada de um círculo, quando se conserva fixo um dos diâmetros desse círculo e se multiplica as distâncias de todos os seus pontos ao diâmetro fixo por uma constante.

Se essa constante for menor que um, o círculo dado será o principal da elipse obtida e o diâmetro mantido fixo será seu eixo maior (Figura 58).

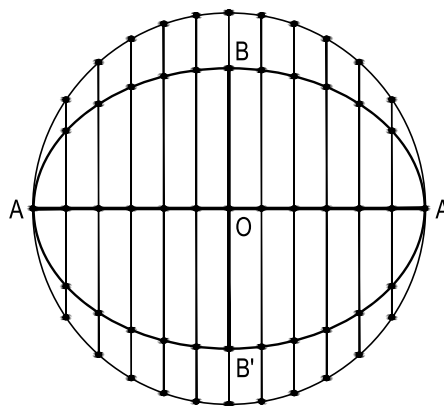


Figura 58

Se a constante for maior que um, o círculo dado funcionará como auxiliar da elipse obtida e o diâmetro mantido fixo como seu eixo menor (Figura 59).

Assim, toda elipse pode ser considerada como transformada tanto de seu círculo principal (Figura 58) quanto de seu círculo auxiliar (Figura 59).

#### 45 – Construção da elipse a partir dos eixos

Para obter um ponto M corrente de uma elipse, a partir de seus dois eixos, basta considerar os círculos principal e auxiliar, uma reta qualquer r que passe pelo seu centro comum e traçar pelos pontos  $\bar{M}$  e  $\bar{M}'$  (Figura 60), segundo os quais ela corta aqueles dois círculos, as paralelas aos eixos.

O ponto M comum a estas duas retas pertencerá à elipse, uma vez que a paralela  $\bar{M}'M$  ao lado OJ do triângulo  $OJ\bar{M}$  (Figura 60) permite escrever:

$$\frac{JM}{JM} = \frac{O\bar{M}'}{OM} = \frac{b}{a}$$

E, assim (número 44), M pertence à elipse procurada.

Para a construção da elipse bastará, então, repetir o processo citado, utilizando diferentes retas, todas pertencentes ao centro da elipse (Figura 61).

#### 46 – Determinação do eixo menor a partir do eixo maior e de um ponto corrente

Sendo dados o eixo maior  $AA'$  e um ponto corrente M de uma elipse, para obter seu eixo menor  $BB'$ , basta construir o círculo principal e restituir o triângulo  $M\bar{M}\bar{M}'$  (Figura 62), mediante o que é possível construir o círculo auxiliar da elipse, determinando, como consequência, seu eixo menor  $BB'$  (Figura 62).

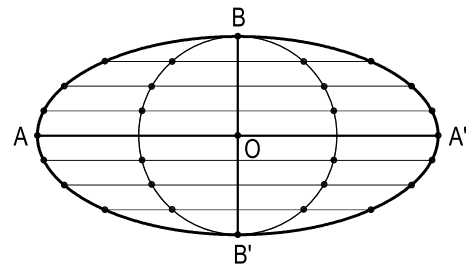


Figura 59

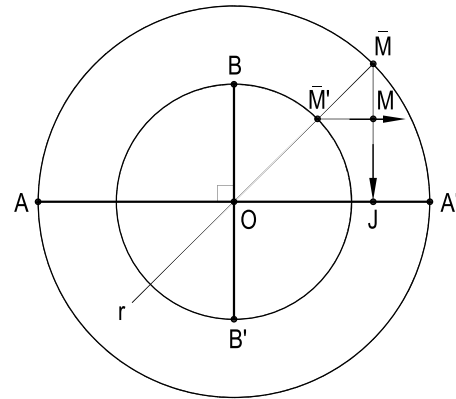


Figura 60

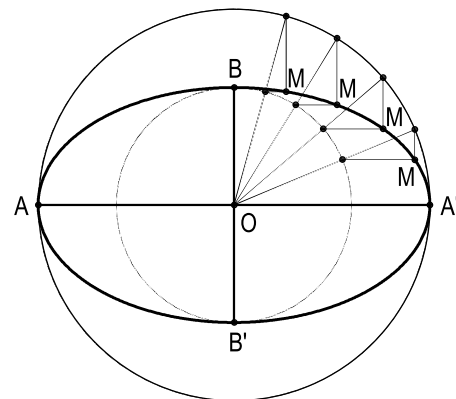


Figura 61

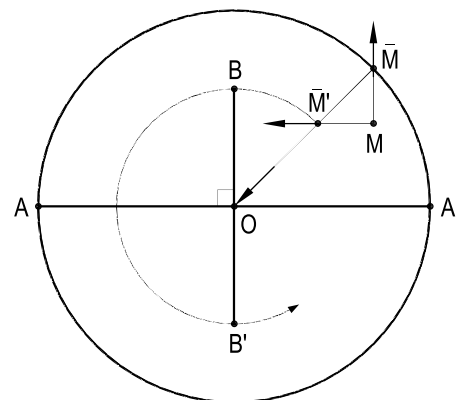


Figura 62

#### 47 – Determinação do eixo maior a partir do eixo menor e de um ponto corrente

Sendo dados o eixo menor  $BB'$  e um ponto corrente  $M$  de uma elipse, para determinar o eixo maior  $AA'$ , basta construir o círculo auxiliar e restituir o triângulo  $\overline{MM'M}$  (Figura 63), pois, obtido o ponto  $\overline{M}$ , é imediato determinar, com o auxílio do círculo principal, o eixo maior da elipse (Figura 63).

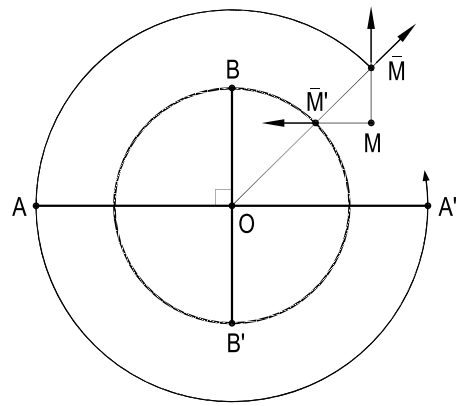


Figura 63

#### 48 – Teorema

Quando um segmento de comprimento constante se desloca apoiado pelos extremos em duas retas perpendiculares fixas, os pontos da reta que serve de suporte ao segmento descrevem elipses cujos eixos pertencem às retas fixas.

Demonstração: Sejam  $r$  e  $s$  as retas fixas,  $XY$  o segmento móvel – mas de comprimento constante – e  $M$  um ponto arbitrariamente escolhido sobre o segmento (Figura 64) ou sobre um dos prolongamentos do segmento  $XY$  (Figura 65).

Designemos, nas duas hipóteses consideradas, por  $a$  e  $b$  as distâncias, constantes, de  $M$  aos pontos  $Y$  e  $X$ , respectivamente.

Tracemos a perpendicular  $MJ$  à reta  $r$ , bem como a paralela  $JL$  a  $XY$  (Figuras 64 e 65) e completamos o retângulo  $JOL\overline{M}$ .

O paralelogramo  $JMYL$  fornece  $JL = MY$ . E o retângulo  $JOL\overline{M}$ ,  $O\overline{M} = JL = a$ .

E, porque  $O\overline{M}$  tem valor constante, igual à porção  $a$ , distância constante de  $M$  ao extremo  $Y$ , enquanto o ponto  $M$  se desloca,  $\overline{M}$  descreve o círculo  $(O, a)$ .

Os triângulos semelhantes  $JMX$  e  $OJL$  (Figuras 64 e 65) permitem escrever:

$$\frac{JM}{OL} = \frac{MX}{JL} \quad \text{ou} \quad \frac{JM}{JM} = \frac{MX}{MY} = \frac{b}{a}$$

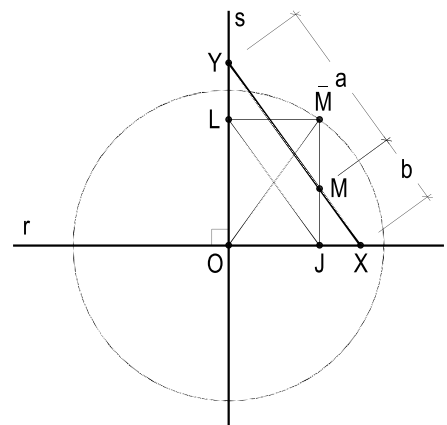


Figura 64

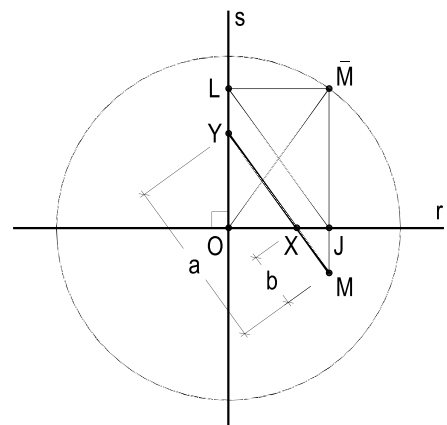


Figura 65

Como a razão  $\frac{b}{a}$  é constante, os pontos  $\bar{M}$  podem ser considerados como transformados dos pontos  $M$  do círculo  $(O, a)$  obtidos pela multiplicação das ordenadas  $J\bar{M}$  (em relação ao diâmetro  $r$  do círculo) pela constante  $\frac{b}{a}$ .

Assim, o lugar geométrico dos pontos  $M$ , em estudo, é uma elipse (número 44) cujos eixos pertencem às retas fixas  $r$  e  $s$ .

## 49 – Escólios

49.1 – As distâncias constantes  $a$  e  $b$  do ponto  $M$  considerado aos extremos do segmento  $XY$  são respectivamente iguais aos semieixos da elipse obtida.

49.2 – Quando o ponto  $M$  considerado está mais próximo de  $X$  que de  $Y$  (Figuras 66 e 67), a elipse por ele descrita tem seu eixo maior sobre a reta  $r$ .

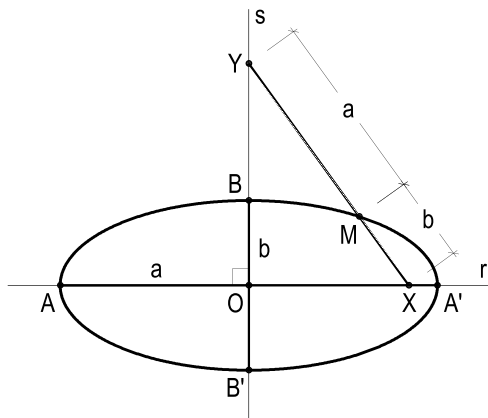


Figura 66

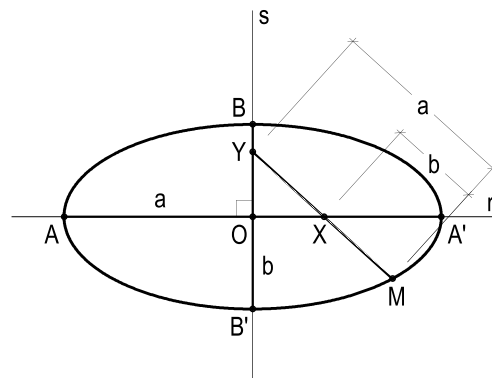


Figura 67

49.3 – Quando o ponto  $M$  considerado está mais próximo de  $Y$  que de  $X$  (Figuras 68 e 69), a elipse por ele descrita tem seu eixo maior sobre a reta  $s$ .

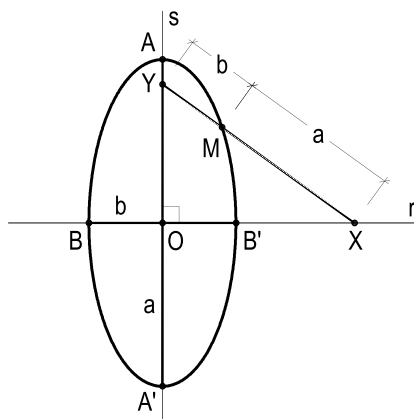


Figura 68

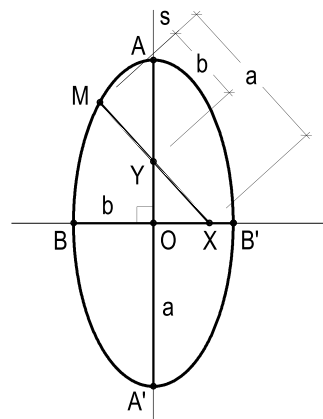


Figura 69

49.4 – No caso particular em que o ponto M é o médio do segmento XY (Figura 70), porque  $OM = \frac{1}{2} XY$  (*Geometria Plana*, número 76), M descreve o círculo de centro O e diâmetro igual ao segmento XY.

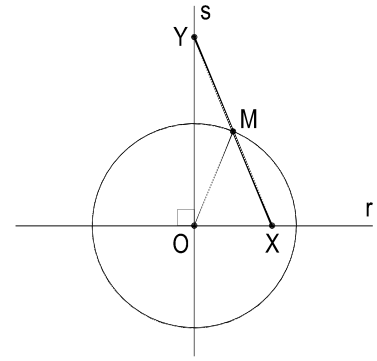


Figura 70

Ainda assim, pode ser aceito como válido o teorema, desde que se entenda esse círculo como uma elipse degenerada de excentricidade nula (número 15.2).

49.5 – Nos casos particulares em que o ponto M coincide com um dos extremos do segmento XY, M descreve um segmento  $X_1X_2$  (ou  $Y_1Y_2$ ) pertencente à reta r (ou à reta s) (Figura 71).

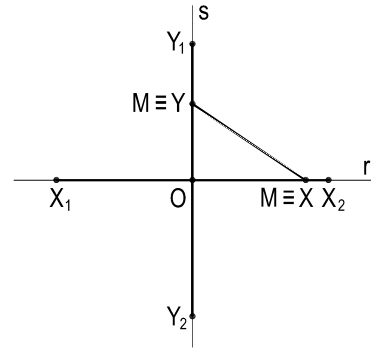


Figura 71

Pode-se ainda, no entanto, aceitar como válido o teorema, desde que se entenda cada um desses segmentos como uma elipse degenerada de excentricidade unitária (número 15.3).

49.6 – É pela aplicação do acima demonstrado que se pode, de maneira muito simples, construir, por pontos, uma elipse, da qual são dados, em grandeza e posição, os eixos transversos AA' e não transversos BB'.

O processo, decorrência natural do demonstrado, consiste em construir uma tira de papel (ou de outro material disponível) com comprimento  $a + b$ , onde as parcelas são as medidas dos semieixos dados, marcando, com exatidão, sobre ela, o ponto de separação dessas duas parcelas.

O que se faz, então, é aplicar, em diversas posições, a tira assim construída, fazendo suas extremidades pertencerem às retas r e s (Figuras 66 e 68), suportes dos eixos dados, assinalando, para cada posição da tira, um ponto M, de separação das parcelas a e b, que, então, há de pertencer à elipse procurada.

A repetição, tanto quanto se queira, desse processo, fornecerá a quantidade necessária de pontos correntes M da elipse, podendo-se, é claro, para cada um dos quatro quadrantes da curva, repetir a construção ou operar com simetrias dos pontos M já determinados, em relação a cada um dos eixos e ao próprio centro da elipse.

49.7 – O procedimento acima descrito pode, é claro, ser efetuado, também, pela construção de uma tira menor, de comprimento igual ao semieixo maior a da elipse, com a aplicação nele de um segmento de medida b, igual ao semieixo menor da curva (Figuras 67 e 69).

Daí por diante, toda a operação se repete.

Esta opção é recomendada para espaços menores disponíveis para a construção da curva.

## 50 – Determinação de um ponto corrente

Dados os dois eixos ( $2a$  e  $2b$ ) de uma elipse, para obter um ponto  $M$  genérico da curva, basta arbitrar um ponto  $X$  sobre a reta suporte do eixo real  $AA'$  e construir um segmento  $XY$  ( $Y$  sobre o suporte do eixo imaginário  $BB'$ ) igual à soma  $a + b$  (Figura 72) dos semieixos e localizar, sobre o segmento  $XY$ , o ponto  $M$ , tal que  $MX = b$  (número 48).

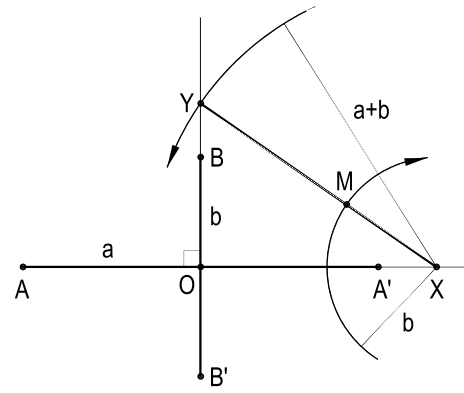


Figura 72

Da mesma forma, escolhido um ponto  $X$  qualquer do eixo real  $AA'$ , poderíamos trabalhar com a diferença  $a - b$  entre os dois semieixos e, com centro em  $X$  e raio  $(a - b)$ , obter o ponto  $Y$  sobre o eixo menor e, enfim, sobre a reta  $YX$ , aplicar o valor  $b$  do semieixo menor, para obter o ponto corrente procurado  $M$  (Figura 73) (número 48).

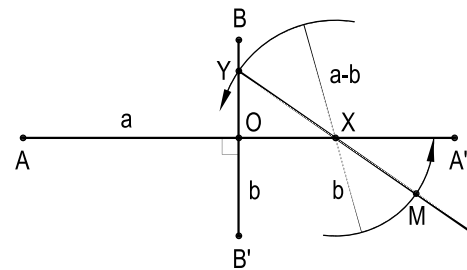


Figura 73

## 51 – Observação

O processo direto acima descrito permite, pela variação da posição do ponto  $X$ , obter um número qualquer de pontos da elipse e, em consequência, construí-la.

A Figura 74 mostra bem esse processo simples.

E, obtidos os pontos de um quadrante, os outros três podem ser construídos pela própria repetição deste processo, ou por simetrias, em relação aos eixos.

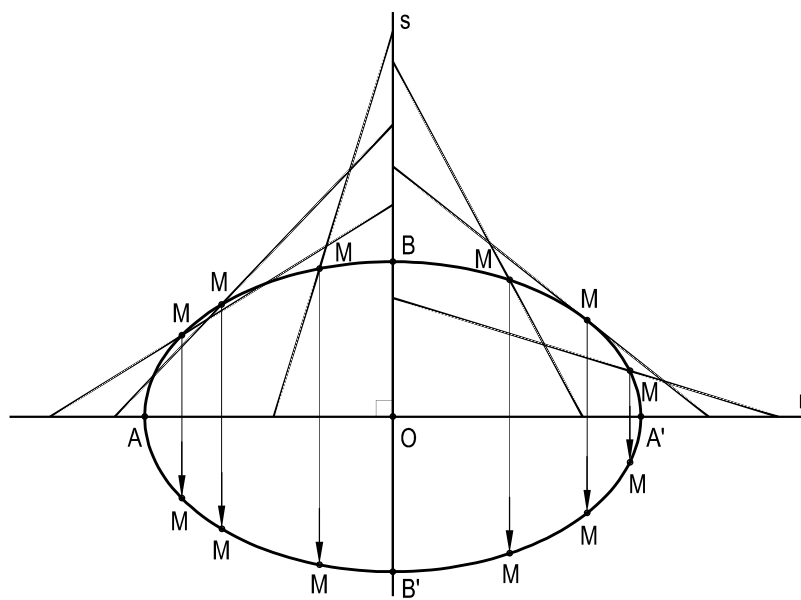


Figura 74

## 52 – Determinação do eixo menor a partir do eixo maior e de um ponto corrente M

Sendo dados o eixo maior  $AA'$  e um ponto corrente  $M$  de uma elipse, para determinar, em posição e grandeza, o eixo menor  $BB'$ , deve-se, inicialmente, construir a mediatriz  $s$  de  $AA'$ , suporte do segundo eixo.

Sendo  $2a$  o valor do eixo dado  $AA'$ , conhecendo-se, agora, graficamente, sua metade  $a$ , pode-se, com centro em  $M$ , descrever um arco do círculo de raio  $a$  que corta  $s$  num ponto  $Y$ . Unindo  $Y$  a  $M$ , encontra-se, sobre a reta suporte do eixo maior (Figura 75) o ponto  $X$ .

O segmento  $MX = b$  mede, então, o semieixo menor (número 48), com o que torna-se imediato construir  $BB'$ .

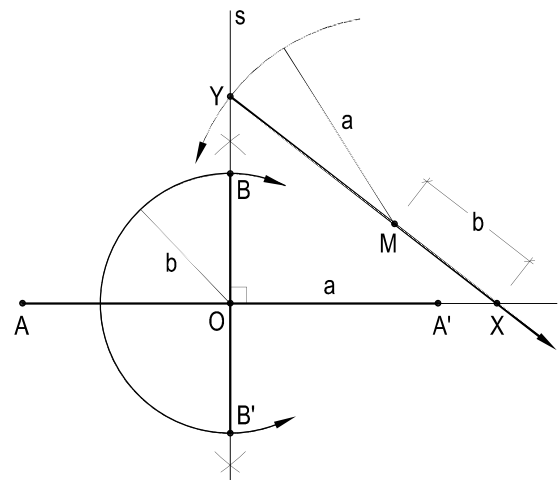


Figura 75

## 53 – Determinação do eixo maior a partir do eixo menor e de um ponto corrente M

Dados o eixo menor  $BB'$  e um ponto corrente  $M$  de uma elipse, para determinar, em posição e grandeza, seu eixo maior  $AA'$ , constrói-se, inicialmente, a mediatriz  $r$  de  $BB'$ .

Conhecido, assim, o valor  $b$  do semieixo menor, pode-se, com centro em  $M$ , descrever um arco de círculo de raio  $b$ , que corta  $r$  num ponto  $X$  (Figura 76). A união de  $X$  a  $M$  fornece, sobre o suporte do eixo dado, o ponto  $Y$ .

O segmento  $MY = a$  (Figura 76) mede, então, o semieixo maior (número 48), tornando-se, assim, imediato determinar os vértices  $A$  e  $A'$  do eixo pedido.

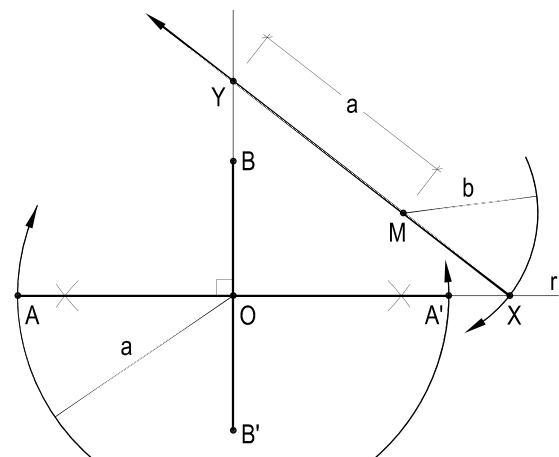


Figura 76

## 54 – Sistemas rígidos

Diz-se que um ponto está rigidamente ligado a um segmento móvel, mas de comprimento constante, quando, ao longo de todo o seu movimento, o ponto permanece a distâncias constantes dos extremos do segmento, ou seja, quando o triângulo que tal ponto forma com os extremos do segmento permanece rígido, inalterado, embora em movimento, acompanhando o próprio movimento do segmento.

Assim é o ponto  $M$ , da Figura 77, rigidamente ligado ao segmento  $PQ$ , de comprimento constante, ao longo do seu movimento, apoiado na curva  $c$ , segundo determinadas leis de translação e rotação estabelecidas.

Observe-se que, ao longo de todo o movimento (Figura 77), por estarem rigidamente ligados ao segmento invariável  $PQ$ , os ângulos do triângulo  $MQP$  permanecem constantes.

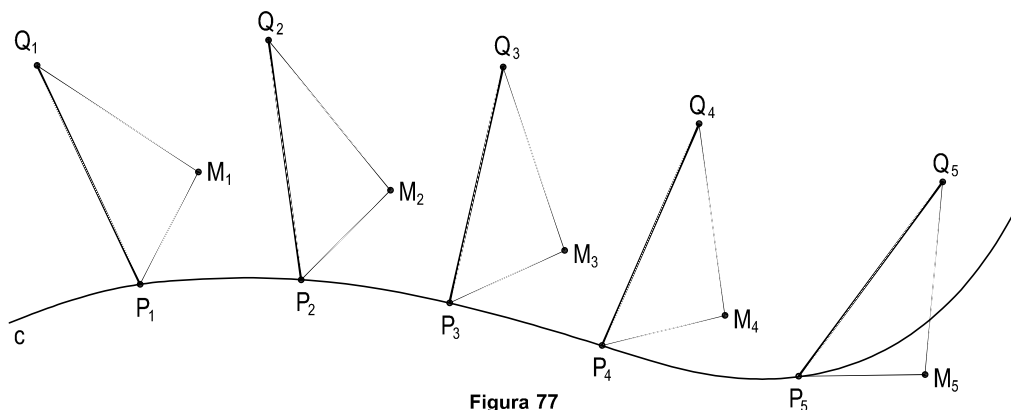


Figura 77

Além disso, é importante ressaltar que todos os elementos relacionados ao triângulo  $MQP$  permanecem também inalterados em suas grandezas, embora possam variar suas posições ao longo do movimento. Assim são, por exemplo, todas as suas cevianas, seus círculos circunscrito, inscrito e exinscritos, etc.

Tudo se passa da mesma forma quando se escolhe diferente movimento para o segmento invariável  $PQ$ , como o exemplificado na Figura 78, em que seus extremos se deslocam sobre duas retas,  $r$  e  $s$ , oblíquas.

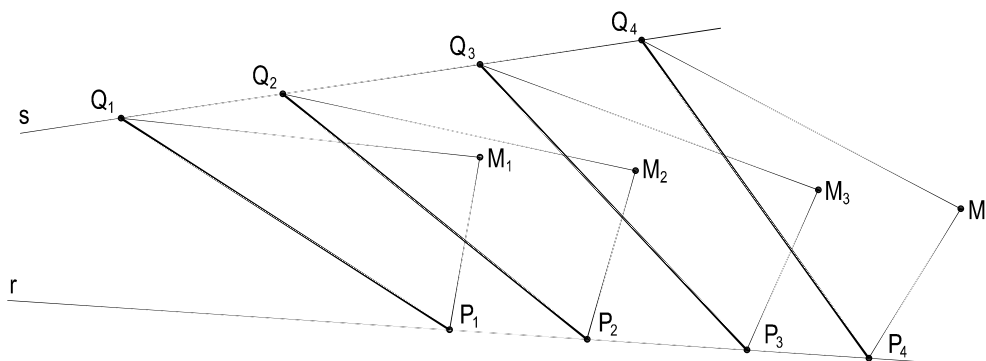


Figura 78



Naturalmente, até por ser um caso particular, o sistema rígido que um ponto  $M$  forma com um segmento  $PQ$  móvel, mas de comprimento constante, permanece invariável, em grandeza, quando os extremos  $P$  e  $Q$  do segmento descrevem duas retas perpendiculares  $r$  e  $s$  (Figura 79). E, por ser um sistema rígido, todos os elementos, pontos, retas, ângulos e demais outras quaisquer figuras que rigidamente se associem ao triângulo  $MPQ$  manterão, ao longo do movimento estabelecido, suas respectivas grandezas.

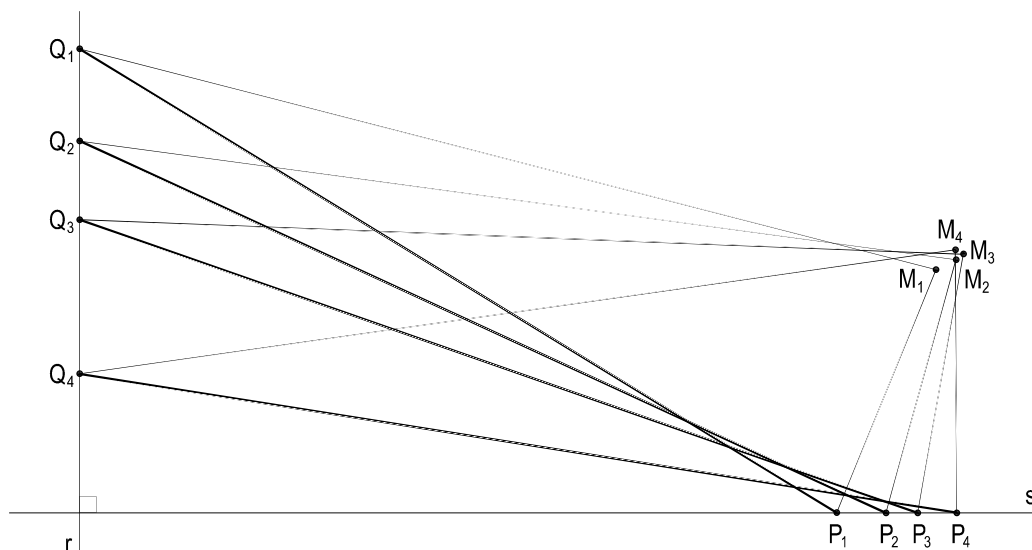


Figura 79

## 55 – Teorema de La Hire

Quando um segmento de comprimento constante se desloca apoiado pelos extremos em duas retas fixas quaisquer, um ponto qualquer rigidamente ligado ao segmento móvel descreve uma elipse.

Demonstração: Sejam  $z$  e  $w$  duas retas quaisquer, fixas,  $PQ$  um segmento móvel, mas de comprimento constante, que se desloca apoiado por seus extremos  $P$  e  $Q$ , respectivamente em  $z$  e  $w$ , e  $M$  um ponto invariavelmente ligado ao segmento  $PQ$ .

Consideremos o ponto  $O$ , comum às retas  $z$  e  $w$ , e o círculo circunscrito ao triângulo  $OPQ$ . Designemos por  $C$  o centro desse círculo e unamo-lo ao ponto  $M$ , criando a reta  $MXCY$  (Figura 80).

Porque o sistema formado pelo ponto  $M$  e pelo segmento  $PQ$  é, por hipótese, rígido, os valores do segmento  $PQ$  e do ângulo  $\widehat{POQ}$  são constantes.

O raio do círculo circunscrito ao triângulo  $OPQ$  será também constante e igual ao raio do arco capaz do ângulo  $\widehat{POQ}$ , em relação ao segmento  $PQ$  (Figura 80).

Assim, esse círculo pode também ser considerado como estando rigidamente ligado ao segmento PQ e, portanto, ao ponto M (Figura 80), sofrendo, então, os mesmos deslocamentos que os pontos P, Q e M.

Como estes pontos e o círculo considerado formam um sistema indeformável, o diâmetro XY, cujo suporte passa por M, dá formação aos segmentos MX e MY, aos arcos PX e QY e aos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , todos constantes, portanto.

Mas, se  $\alpha$  e  $\beta$  não variam com o deslocamento de PQ, as retas r e s, suportes dos segmentos OX e OY (Figura 80), são fixas. E são perpendiculares, já que o triângulo XOY se inscreve num semicírculo.

Mas, se  $\alpha$  e  $\beta$  não variam com o deslocamento de PQ, as retas r e s (Figura 80) são fixas, porque o ponto O, comum às duas, permanece, sempre, fixo. E são perpendiculares, já que o triângulo XOY se inscreve num semicírculo (*Geometria Plana*, número 128.2).

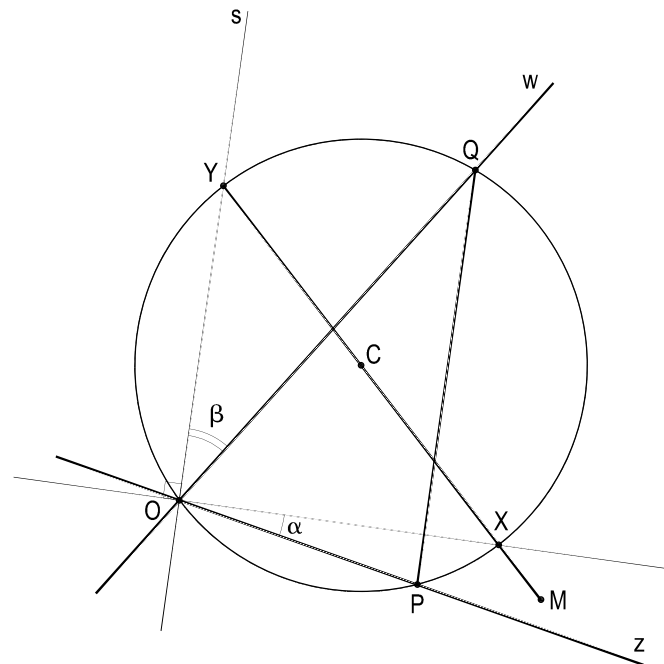


Figura 80

Assim, o movimento imposto aos pontos P, Q e M implicará no deslocamento do segmento constante XY, apoiado por seus extremos nas retas fixas r e s.

E, porque estas duas retas são perpendiculares, o ponto M, de XY, descreverá (número 48) uma elipse cujos eixos pertencerão às retas r e s.

Então, quando um segmento de comprimento constante se desloca apoiado pelos extremos em duas retas fixas quaisquer, um ponto qualquer rigidamente ligado ao segmento móvel descreve uma elipse.

# CAPÍTULO III

## ELIPSE COMO AFIM ORTOGONAL DO CÍRCULO

### 56 – Afinidade espacial

Dados dois planos quaisquer, afinidade espacial é a transformação de pontos de um deles para o outro através de retas paralelas entre si, mas não paralelas a quaisquer dos dois planos.

Assim, considerando dois planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  secantes e uma reta  $(d)$  não paralela a nenhum deles, observa-se que toda reta paralela a  $(d)$  faz associar dois pontos, como  $(A)$  e  $(\bar{A})$ , ou  $(B)$  e  $(\bar{B})$ , na Figura 81, traços dessas paralelas com esses dois planos.

Essa transformação dos pontos de  $(\alpha)$  em pontos de  $(\beta)$ , ou reciprocamente, de modo tal que pares de pontos correspondentes (um em cada plano) pertençam sempre a retas paralelas a  $(d)$  denomina-se afinidade.

Observemos ainda que a transformada de uma reta genérica  $(r)$  de  $(\alpha)$  é outra reta  $(\bar{r})$ , de  $(\beta)$ , e que essas duas retas concorrem, necessariamente, sobre a interseção  $(e)$  dos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  (Figura 81).

De fato,  $(\bar{r})$  é a interseção de  $(\beta)$  com o plano  $(\gamma)$  pertencente a  $(r)$  e paralelo a  $(d)$ . Assim,  $(r)$  e  $(\bar{r})$ , sendo coplanares e não paralelas, possuem um ponto comum. E esse ponto  $(J) \equiv (\bar{J})$ , por pertencer a  $(\alpha)$  e a  $(\beta)$ , deve estar situado sobre a reta  $(e)$ , interseção de  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ .

A afinidade é, pois, a transformação pontual que a cada ponto de  $(\alpha)$  faz corresponder um ponto de  $(\beta)$ , de modo tal que pares de pontos correspondentes pertençam a retas paralelas e que pares de retas correspondentes concorram sobre a interseção dos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  ou sejam paralelas entre si.

Os elementos correspondentes, como os pontos  $(A)$  e  $(\bar{A})$  e as retas  $(r)$  e  $(\bar{r})$ , são denominados afins, a reta  $(e)$ , interseção de  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , e a direção  $(d)$ , fixa, escolhida, são respectivamente denominadas eixo e direção de afinidade.

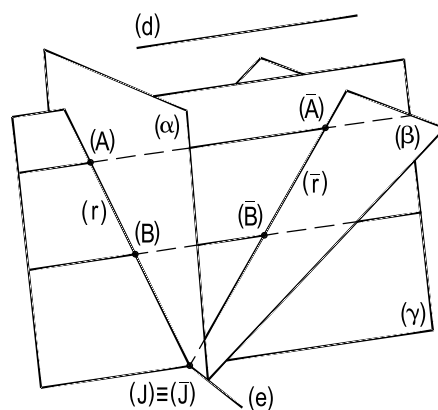


Figura 81

## 57 – Observações

57.1 – No caso particular em que os dois planos considerados ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) são paralelos, a afinidade converte-se em translação, segundo a direção (d) fixada (Figura 82).

E, naturalmente, a transformação proporciona uma figura ( $\bar{F}$ ) igual à original (F) (Figura 82).

Entende-se, neste caso, que o eixo de afinidade foi rejeitado ao infinito.

57.2 – Quando a direção (d) da afinidade é perpendicular a um dos planos, ( $\beta$ ) na Figura 83, a afinidade resulta numa projeção ortogonal sobre este plano.

A figura ( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ ), transformada de outra (A)(B)(C), do plano ( $\alpha$ ), tem, então, perímetro e área menores que as daquela.

## 58 – Afinidade plana

Consideremos um sistema de afinidade espacial e efetuemos sua projeção cilíndrica sobre um plano ( $\pi$ ) genérico (Figura 84).

Tal projeção pode ser ortogonal ou oblíqua, indiferentemente.

Porque o paralelismo dos raios da afinidade espacial e a concorrência das retas afins sobre o eixo se conservam na projeção, obtém-se uma transformação pontual plana com as mesmas características da afinidade espacial. Essa transformação é denominada afinidade plana ou, simplesmente, afinidade.

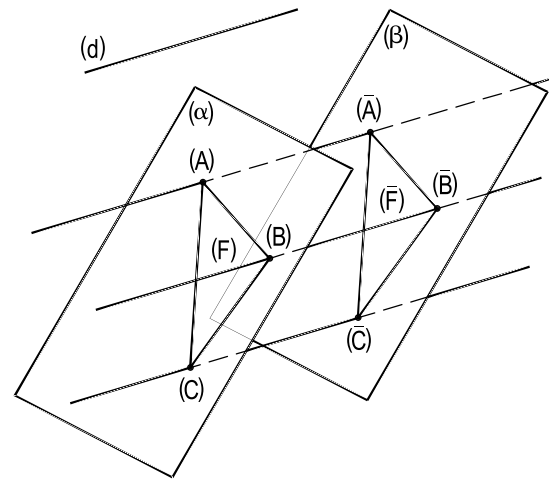


Figura 82

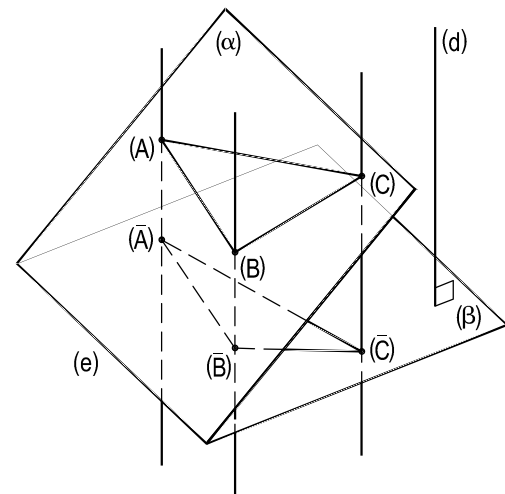


Figura 83

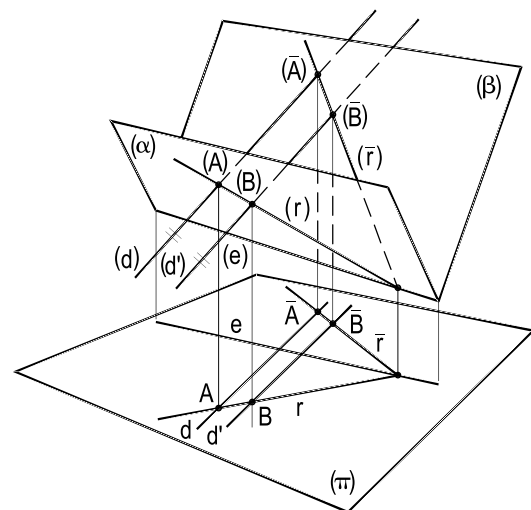


Figura 84

## 59 – Afinidades ortogonal e oblíqua

Diz-se, assim, que duas figuras pertencentes a um plano são afins quando se correspondem ponto a ponto e reta a reta de modo tal que pares de pontos correspondentes pertençam a retas paralelas e pares de retas correspondentes concorram sobre uma reta fixa ou sejam paralelas.

Conforme a direção  $d$  e o eixo  $e$  de afinidade sejam perpendiculares (Figura 85) ou oblíquos (Figura 86), a afinidade diz-se, respectivamente, ortogonal ou oblíqua.

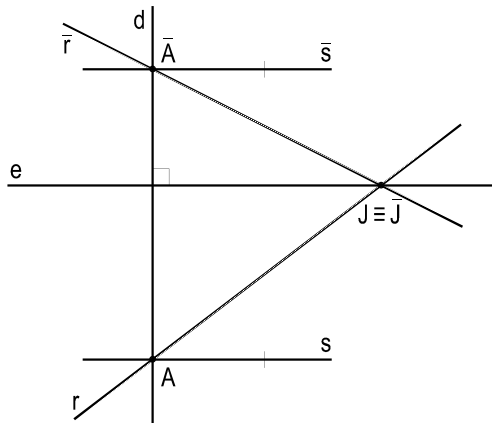


Figura 85

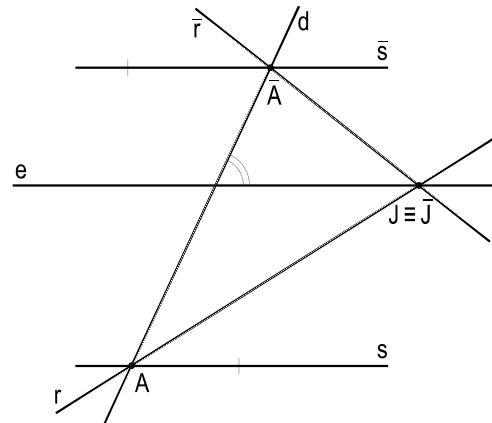


Figura 86

## 60 – Observações

60.1 – Um sistema de afinidade fica precisamente determinado pelo conhecimento do eixo ( $e$ ) e de um par de pontos afins ( $A$  e  $\bar{A}$ ).

De fato, a partir desses dados, para obter o afim de um ponto qualquer  $B$ , basta traçar a reta  $BA$  e construir sua afim (que passará por  $\bar{A}$  e pelo ponto  $J \equiv \bar{J}$  em que  $BA$  encontra o eixo). O ponto  $\bar{B}$  procurado pertencerá à reta  $J\bar{A}$  e à paralela a  $A\bar{A}$  (direção de afinidade) traçada por  $B$  (Figura 87).

E, com construção igual, é possível levar qualquer figura de um sistema ao outro.

60.2 – Dadas duas curvas afins, a reta afim de uma tangente a uma delas é tangente à outra e os pontos de contato são afins (Figura 88).

De fato, essas duas tangentes são as posições limites ocupadas por duas secantes afins às duas curvas.

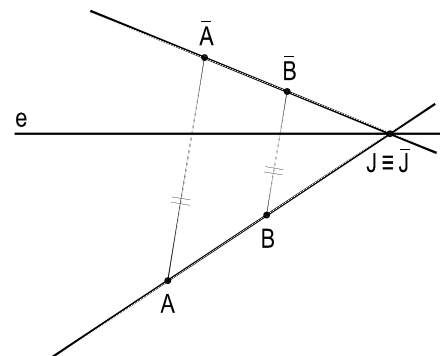


Figura 87

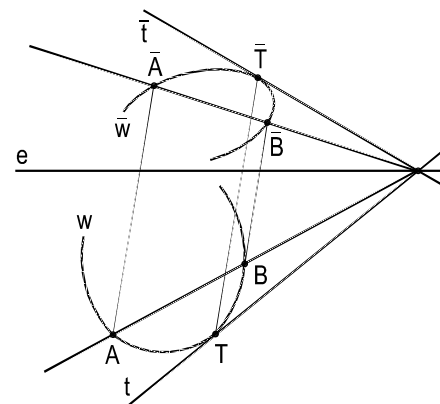


Figura 88

60.3 – De um modo mais geral, dadas duas curvas tangentes a e b (Figura 89), suas transformadas  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$ , mediante uma afinidade qualquer, são outras duas curvas tangentes. E os pontos T e  $\bar{T}$  de contato são afins.

Assim, as tangentes comuns t e  $\bar{t}$  (Figura 89), a cada par de curvas tangentes, são afins, cortando-se, então, num ponto  $J \equiv \bar{J}$  do eixo e.

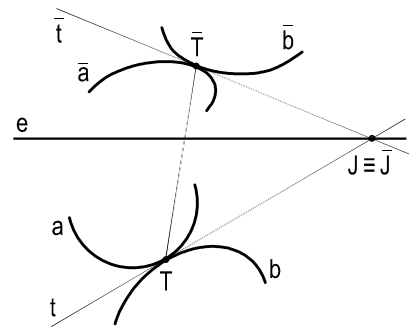


Figura 89

## 61 – Teorema

Em toda afinidade ortogonal plana, a razão entre as distâncias de pares de pontos afins ao eixo é constante.

Demonstração: Consideremos uma transformação por afinidade ortogonal entre dois sistemas de pontos A, B, C, D, ... e  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ,  $\bar{D}$ , ... (Figura 90). Os triângulos semelhantes JA $\bar{A}$  e J $\bar{B}\bar{B}$ , IB $\bar{B}$  e IC $\bar{C}$ , LC $\bar{C}$  e LD $\bar{D}$ , etc. permitem escrever:

$$\frac{1A}{1\bar{A}} = \frac{2B}{2\bar{B}}, \quad \frac{2B}{2\bar{B}} = \frac{3C}{3\bar{C}}, \quad \frac{3C}{3\bar{C}} = \frac{4D}{4\bar{D}}, \text{ etc.}$$

Ou seja:

$$\frac{1A}{1\bar{A}} = \frac{2B}{2\bar{B}} = \frac{3C}{3\bar{C}} = \frac{4D}{4\bar{D}} = \dots = k, \text{ razão constante}$$

que prova o teorema.

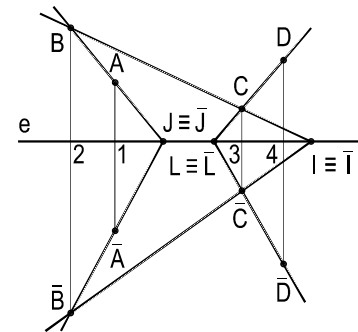


Figura 90

## 62 – Observações

62.1 – Essa razão constante k (número 61) é denominada razão da afinidade considerada.

62.2 – A transformada por afinidade ortogonal de um círculo, sendo o eixo da afinidade a reta suporte de um dos diâmetros do círculo, é uma elipse.

Porque a transformação implica em multiplicar as ordenadas dos pontos do círculo por uma constante. E, nessas condições, a figura transformada do círculo é uma elipse (número 44).

Conforme a transformação faça diminuir ou aumentar as distâncias dos pontos ao eixo, o eixo da afinidade servirá de suporte, respectivamente, ao eixo maior (Figura 91) ou menor (Figura 92) da elipse obtida.

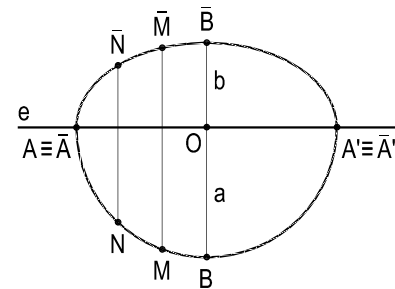


Figura 91

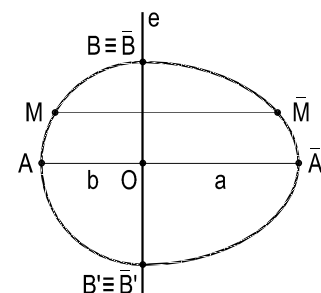


Figura 92

62.3 – Então, toda elipse pode ser considerada como transformada por afinidade ortogonal de seu círculo principal (Figura 91) ou de seu círculo auxiliar (Figura 92), funcionando como eixos, nessas afinidades, respectivamente, o eixo maior  $AA'$  ou o menor  $BB'$  da elipse.

E, naturalmente, as razões dessas afinidades são iguais às existentes entre os eixos da elipse.

62.4 – Assim, desde que se possua dados bastantes para aplicá-la, a transformação por afinidade ortogonal de uma elipse num círculo permite, de um modo geral, resolver um grande número de problemas da elipse.

O método geral que se emprega, nestes casos, consiste em transformar todos os dados, mediante a afinidade escolhida, e resolver, no sistema do círculo, problema correspondente ao proposto, retornando ao sistema da elipse, apenas a solução.

### 63 – Determinação do segundo eixo de uma elipse dada por um eixo e por um ponto corrente M

Sendo dados o eixo maior  $AA'$  e um ponto corrente M, constrói-se o círculo principal, afim ortogonal da elipse dada, em relação ao eixo  $AA'$  e determina-se o ponto  $\bar{M}$ , afim de M, naturalmente pertencente àquele círculo (Figura 93).

De posse de um par de pontos afins M e  $\bar{M}$  é possível construir um par de retas afins  $r$  e  $\bar{r}$  e, então, retornar ao sistema da elipse o ponto  $\bar{B}$ , obtendo B, um dos vértices do eixo menor pedido (Figura 93).

Se, ao contrário, é dado o eixo menor, utilizando o mesmo processo, estabelece-se a afinidade ortogonal entre a elipse e seu círculo auxiliar (Figura 94) e, pela transformação do ponto  $\bar{A}$  desse círculo, determina-se A, um dos vértices do eixo maior procurado.

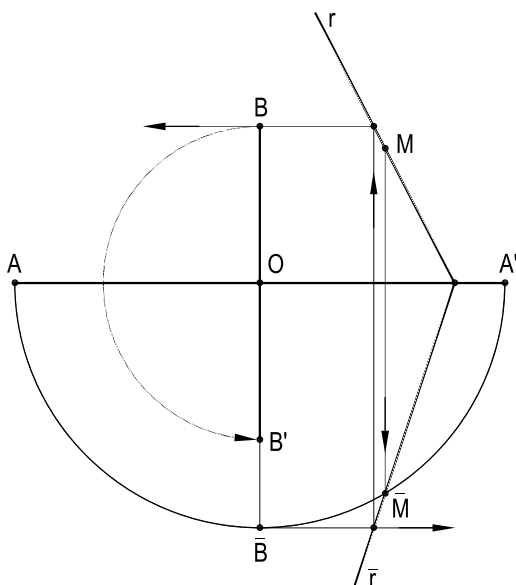


Figura 93

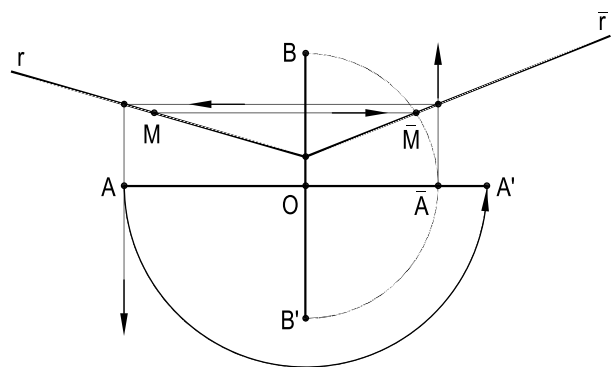


Figura 94

## 64 – Construção da elipse a partir dos eixos

Dados os dois eixos, para construir a elipse, basta traçar seu círculo principal e estabelecer o sistema de afinidade ortogonal existente entre ele e a elipse, mediante o par de pontos afins  $B$  e  $\bar{B}$  e o par de retas afins  $r$  e  $\bar{r}$  e arbitrar um número qualquer de pontos  $\bar{M}$  do círculo (Figura 95), os quais, transformados por aquela afinidade, fornecerão pontos  $M$  da elipse.

Naturalmente, seria equivalente operar com o círculo auxiliar da elipse.

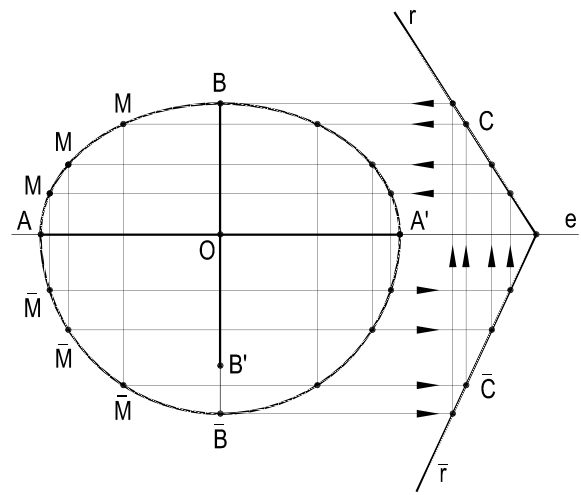


Figura 95

## 65 – Construção da tangente num ponto corrente $M$ , dados o ponto $M$ e um dos eixos da elipse

Sendo dados o eixo maior  $AA'$  e um ponto  $M$  da elipse, para a construção da tangente, em  $M$ , basta construir o círculo principal, obter o ponto  $\bar{M}$  (sobre esse círculo), afim de  $M$ , e traçar a tangente  $\bar{t}$  (Figura 96) ao círculo, em  $\bar{M}$ .

A reta  $t$ , afim de  $\bar{t}$ , é a tangente pedida.

Naturalmente se o eixo dado é o menor  $BB'$  (Figura 97), com o mesmo processo, mas utilizando-se o círculo auxiliar, determina-se a tangente  $t$  à elipse, no ponto  $M$ .

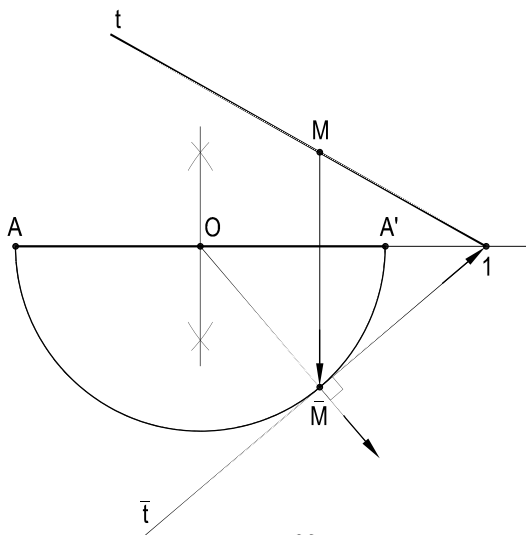


Figura 96

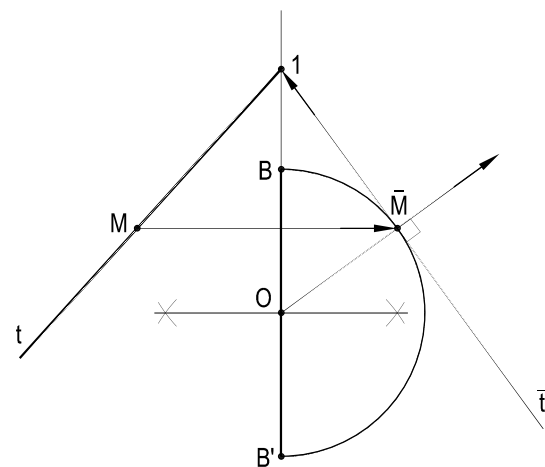


Figura 97



## 66 – Construção das tangentes paralelas a uma reta $r$ , dados os dois eixos e a reta $r$

De posse dos dois eixos, é imediato estabelecer o sistema de afinidade ortogonal entre a elipse e seu círculo principal. E, utilizando as paralelas (afins) ao eixo, traçadas pelos pontos afins  $B$  e  $\bar{B}$  (Figura 98), determina-se  $\bar{r}$ , afim de  $r$ .

Constrói-se, então, uma das tangentes ao círculo, com a direção de  $\bar{r}$ . E para retornar essa tangente  $\bar{t}$  ao sistema da elipse, basta traçar, pelo ponto em que ela encontra o eixo, a paralela  $t$  à reta  $r$  dada (Figura 98).

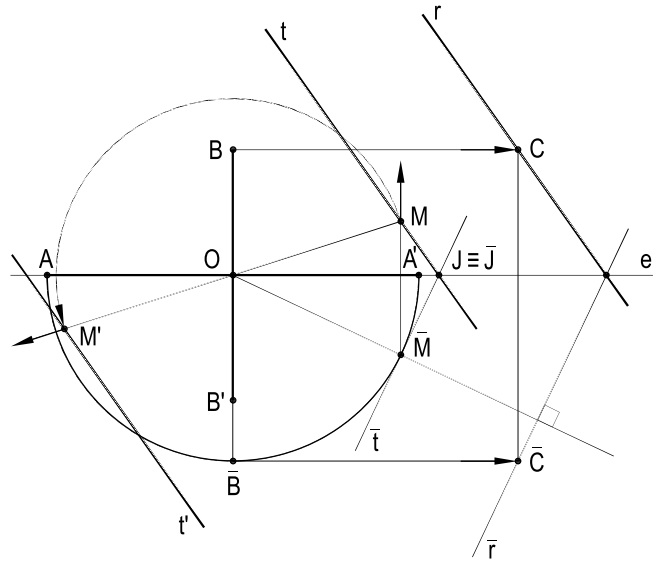


Figura 98

O ponto de contato  $M$  da tangente obtida com a elipse será, é claro, o afim de  $\bar{M}$ , contando com o círculo afim.

A segunda tangente  $t'$ , paralela a  $r$ , pode ser obtida pelo mesmo processo ou, mais simplesmente, por simetria da tangente  $t$  em relação ao centro  $O$  da elipse (Figura 98).

## 67 – Construção das tangentes por um ponto $J$ exterior, dados os dois eixos e o ponto $J$

Sendo dados os dois eixos, é imediato estabelecer o sistema de afinidade ortogonal entre a elipse e seu círculo principal, bem como determinar  $\bar{J}$ , afim do ponto dado  $J$  (Figura 99).

Constrói-se, então, rigorosamente, as tangentes  $\bar{t}$  e  $\bar{t}'$  de  $\bar{J}$  ao círculo afim da elipse.

As retas  $t$  e  $t'$ , no sistema da elipse, afins de  $\bar{t}$  e de  $\bar{t}'$  (Figura 99), são as tangentes pedidas.

Os pontos de contato  $M$  e  $M'$  são obtidos diretamente a partir dos pontos  $\bar{M}$  e  $\bar{M}'$  de contato das tangentes  $\bar{t}$  e  $\bar{t}'$  com o círculo afim da elipse.

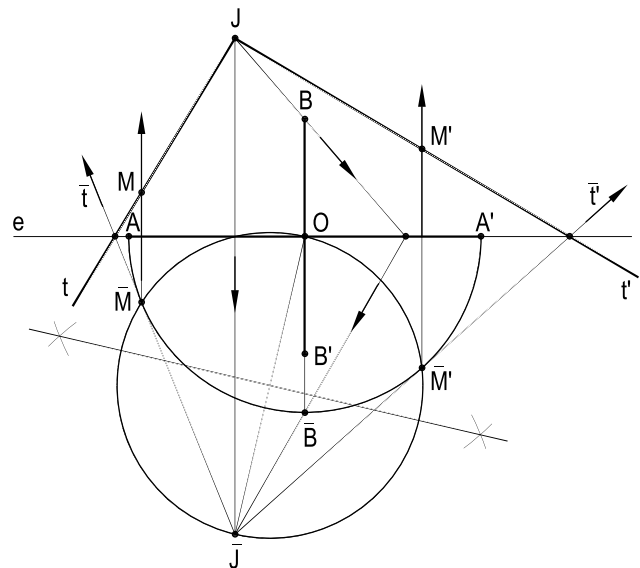


Figura 99

## 68 – Determinação rigorosa dos pontos de interseção de uma reta $r$ com uma elipse, dados os dois eixos da elipse e a reta $r$

Para determinar, com rigor, os pontos segundo os quais uma reta dada  $r$  corta uma elipse dada por seus eixos  $AA'$  e  $BB'$ , basta organizar a correspondência por afinidade ortogonal entre a elipse e seu círculo principal e obter a reta  $\bar{r}$ , do sistema do círculo, afim de  $r$ , o que se consegue com a determinação de um par de pontos afins  $C$  e  $\bar{C}$ , pelas paralelas  $BC$  e  $\bar{B}\bar{C}$  ao eixo.

Os pontos  $\bar{M}$  e  $\bar{N}$ , interseções de  $\bar{r}$  com o círculo afim da elipse, retornados ao sistema dessa curva, produzem os pontos  $M$  e  $N$  (Figura 100) pedidos.

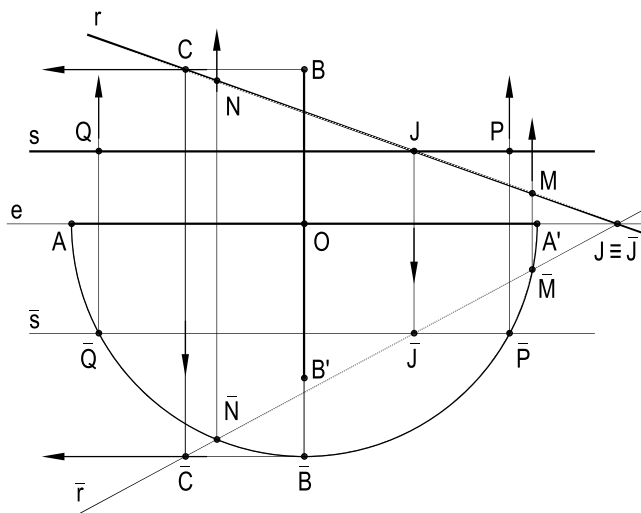


Figura 100

Consegue-se, assim, determinar, com rigor, os pontos de corte da reta dada  $r$  com a elipse, sem construir a curva.

É claro que seria equivalente operar com a afinidade existente entre a elipse dada e seu círculo auxiliar, devendo, então, funcionar como eixo de afinidade o menor,  $BB'$ , da elipse.

A escolha entre o círculo principal ou o auxiliar para resolver o problema há de se fazer pela posição da reta dada  $r$  e, em especial, de suas interseções com cada um dos dois eixos.

No caso particular de a secante dada ser paralela a um dos eixos, a resolução segue o mesmo procedimento (utilização de um par auxiliar de pontos afins  $J$  e  $\bar{J}$ ), simplificando a operação (Figura 100).

E, enfim, caso a secante seja tal que sua interseção com o eixo escolhido resulte inacessível no espaço destinado, basta utilizar um par de seus pontos para obter sua afim, no sistema do círculo, principal ou auxiliar, escolhido.

# CAPÍTULO IV

## DIÂMETROS CONJUGADOS DA ELIPSE

### 69 – Diâmetros da elipse

Todos os diâmetros da elipse são retilíneos.

De fato, consideremos um dos círculos afins da elipse e o diâmetro  $\bar{d}$ , do círculo, relativo a uma direção genérica  $\bar{\Delta}$ , que é uma reta: a mediatriz comum a todas as cordas com tal direção. Porque a transformação por afinidade conserva o paralelismo e a divisão proporcional e porque a figura afim de uma reta é outra reta, conclui-se que às cordas do círculo paralelas a  $\bar{\Delta}$  corresponderão cordas paralelas da elipse e, ao diâmetro  $\bar{d}$  do círculo, um diâmetro  $d$  da elipse, necessariamente, retilíneo (Figura 101).

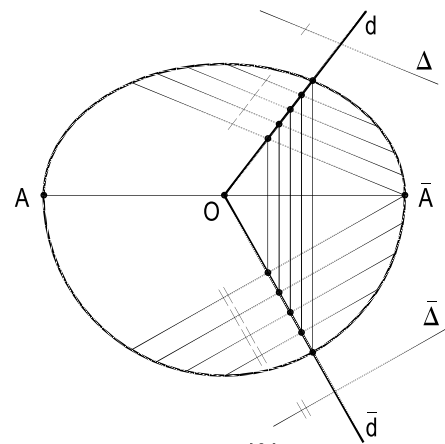


Figura 101

Vale observar que:

69.1 – Os diâmetros da elipse são segmentos de reta que têm por ponto médio comum o centro da curva.

69.2 – Os eixos real e imaginário da elipse são, respectivamente, o maior e o menor diâmetros da curva.

69.3 – Dois diâmetros simétricos em relação a um dos eixos da elipse são iguais. E reciprocamente.

69.4 – As tangentes a uma elipse, nos extremos de um diâmetro, são paralelas às cordas que definem o diâmetro (número 3).

Reciprocamente, os pontos de contato de duas tangentes paralelas são os extremos do diâmetro relativo à direção das tangentes (Figura 102).

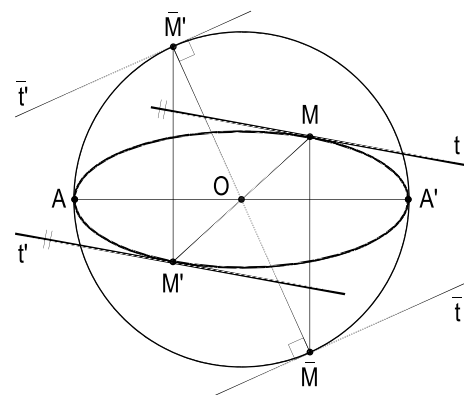


Figura 102

## 70 – Diâmetros conjugados da elipse

Para que dois diâmetros de um círculo sejam conjugados é necessário e suficiente que sejam perpendiculares, pois que, só assim, cada um deles pode conter os pontos médios das cordas paralelas ao outro (número 7).

Como o paralelismo se conserva na transformação por afinidade ortogonal, conclui-se que dois diâmetros conjugados de uma elipse são afins de dois diâmetros perpendiculares do círculo principal (Figura 103) ou do círculo auxiliar (Figura 104) da elipse.

Assim, a todo diâmetro de uma elipse corresponde um conjugado. Toda elipse possui, então, uma infinidade de pares de diâmetros conjugados.

Os próprios eixos são, naturalmente em posição especial, dois diâmetros conjugados da elipse.

## 71 – Observações

71.1 – Sendo dados os dois eixos de uma elipse e a reta  $r$ , suporte de um diâmetro, para limitá-lo e construir seu conjugado, basta considerar a afinidade ortogonal existente entre a elipse e seu círculo principal, obter a reta  $\bar{r}$ , afim de  $r$ , bem como o diâmetro  $\bar{s}$ , do círculo, perpendicular a  $\bar{r}$  (Figura 105).

Retornando ao sistema da elipse os extremos daqueles dois diâmetros do círculo, obtém-se o diâmetro  $MM'$ , da elipse, pertencente à reta dada  $r$  e seu conjugado  $NN'$  (Figura 105).

71.2 – Todos os paralelogramos circunscritos a uma elipse, tendo lados paralelos a dois diâmetros conjugados, ou seja, tendo por pontos de contato de seus lados com a elipse os extremos de dois diâmetros conjugados da elipse, são transformados, por afinidade ortogonal, dos quadrados circunscritos ao círculo principal afim da elipse (Figura 106).

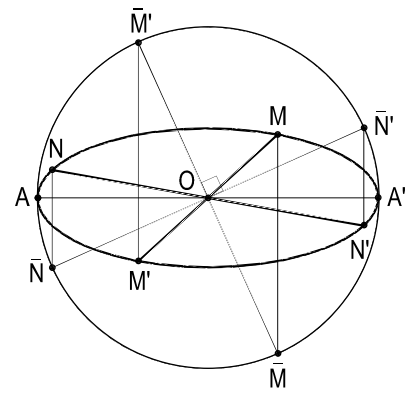


Figura 103

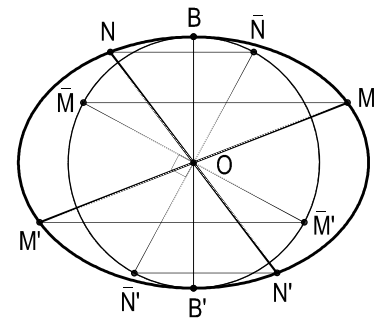


Figura 104

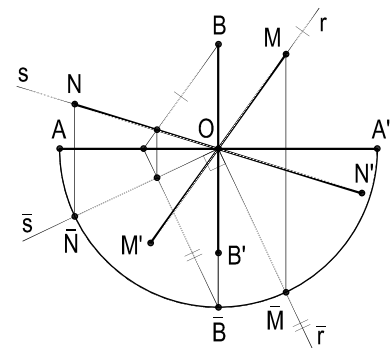


Figura 105

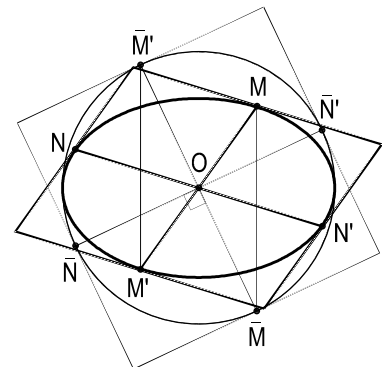


Figura 106

71.3 – Cabe observar, no entanto, que apenas aqueles paralelogramos são afins de quadrados. Ou seja, que um paralelogramo genérico circunscrito a uma elipse (com lados paralelos a dois diâmetros não conjugados) é afim de um losango circunscrito a um dos dois círculos afins ortogonais da elipse.

De fato, sendo quaisquer as direções dos lados do paralelogramo circunscrito à elipse, na transformação por afinidade ortogonal, o paralelogramo circunscrito ao círculo afim da elipse terá lados oblíquos. Isto é, será um losango (Figura 107).

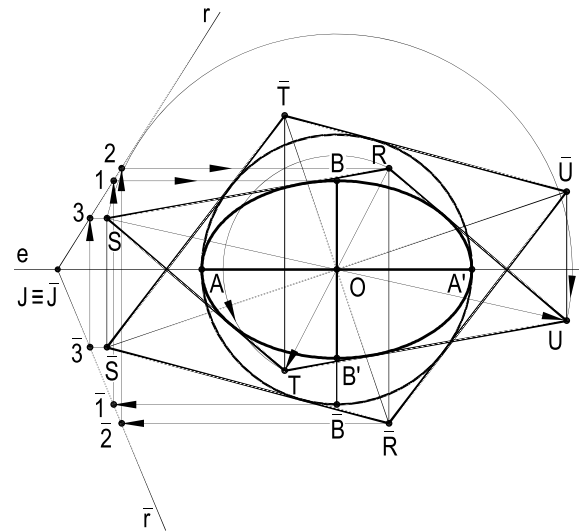


Figura 107

## 72 – Determinação dos eixos a partir de dois diâmetros conjugados

Análise: Consideremos, de uma elipse de eixos  $AA'$  e  $BB'$ , os círculos principal e auxiliar, bem como dois semidiâmetros conjugados  $OM$  e  $ON$  (Figura 108), aos quais correspondem, por afinidade ortogonal, no círculo principal, os raios perpendiculares  $\overline{OM}$  e  $\overline{ON}$  (número 70).

Completemos o retângulo  $LN\overline{N}M_1$  e prolonguemos sua diagonal  $NM_1$ , obtendo os pontos  $X$  e  $Y$  sobre os suportes dos eixos da elipse.

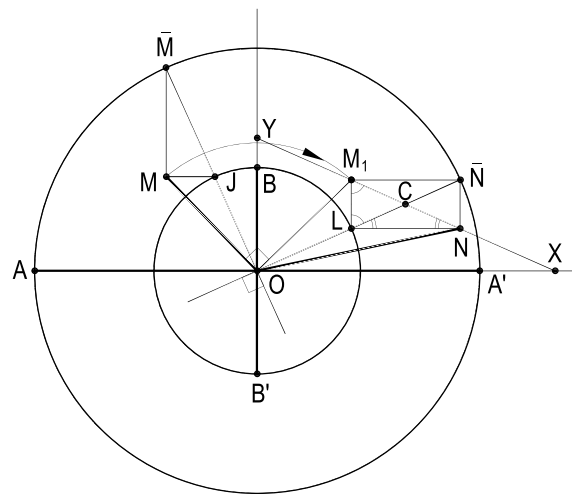


Figura 108

Os triângulos  $J\overline{M}\overline{M}$ ,  $L\overline{N}\overline{N}$  e  $L\overline{M}_1\overline{N}$  são iguais. Os dois primeiros por terem lados respectivamente perpendiculares e hipotenusas iguais; os dois últimos por terem os catetos respectivamente paralelos e a hipotenusa comum.

Assim, porque são iguais os triângulos  $J\overline{M}\overline{M}$  e  $L\overline{M}_1\overline{N}$  e porque a hipotenusa  $L\overline{N}$  pode ser obtida por uma rotação de  $90^\circ$  de  $J\overline{M}$ , em torno de  $O$  (Figura 108),  $M_1$  pode também ser considerado como proveniente de uma rotação de  $90^\circ$  de  $M$ , em torno do centro  $O$  da elipse.

Enfim, os trapézios isósceles  $OLNX$  e  $OLM_1Y$  formados (Figura 108) fornecem:

$$XN = OL = YM_1 \quad \therefore \quad XN = YM_1 = b$$

$$XM_1 = O\overline{N} = YN \quad \therefore \quad XM_1 = YN = a$$

Do que foi visto é possível extrair dois processos clássicos para a determinação gráfica dos eixos de uma elipse, dada por dois diâmetros conjugados  $MM'$  e  $NN'$  conhecidos em grandeza e posição, como passamos a descrever:

### 72.1 – Processo de Ocagne

Dados os diâmetros conjugados  $MM'$  e  $NN'$ , efetua-se a rotação de um dos semidiâmetros  $OM$  de  $90^\circ$  em torno do centro  $O$  da elipse, até a posição  $OM_1$  (Figura 109) e traça-se a reta  $NM_1$ .

Com centro em  $C$ , médio do segmento  $M_1N$ , e raio  $CO$ , descreve-se um círculo que corta a reta  $NM_1$  nos pontos  $X$  e  $Y$  (Figura 109).

As retas  $OX$  e  $OY$  são os suportes dos eixos da elipse.

E como  $YM_1 = b$  e  $XM_1 = a$ , o transporte desses valores sobre aquelas retas fornece os vértices  $A, A', B$  e  $B'$  da elipse (Figura 109).

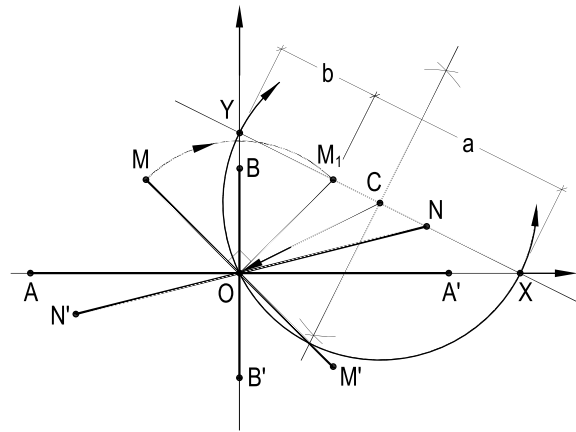


Figura 109

### 72.2 – Processo de Mannheim

Como no processo de Ocagne, efetua-se, inicialmente, a rotação de  $90^\circ$  de  $OM$  em torno de  $O$ , até a posição  $OM_1$ , une-se  $M_1$  a  $N$  e determina-se o ponto  $C$ , médio de  $M_1N$  (Figura 110).

Traça-se, então, o círculo de diâmetro  $M_1N$ , e, unindo seu centro  $C$  ao da elipse, constrói-se o retângulo  $LN\bar{N}M_1$  (Figura 110).

Os lados desse retângulo fornecem as direções dos eixos da elipse e as distâncias dos pontos  $L$  e  $\bar{N}$  ao centro  $O$  da elipse fornecem os valores dos semieixos.

Assim, para obter, em posição e grandeza, os eixos  $AA'$  e  $BB'$ , basta traçar, por  $O$ , as paralelas aos lados do retângulo  $LN\bar{N}M_1$  e construir, com raios  $O\bar{N} = a$  e  $OL = b$ , os círculos principal e auxiliar da elipse (Figura 110).

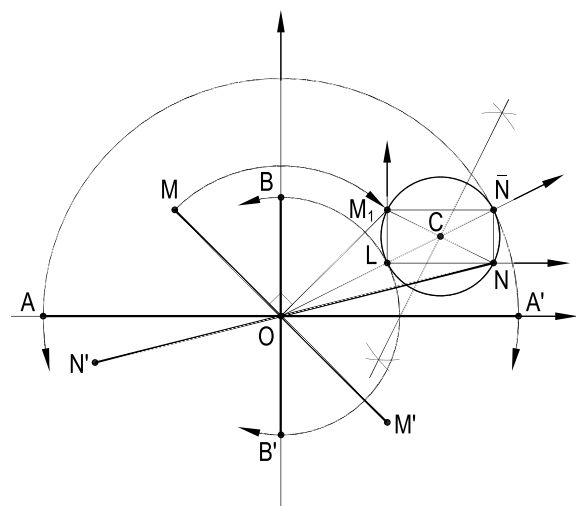


Figura 110

### 73 – Teoremas de Apollonius

1. A soma dos quadrados de dois diâmetros conjugados de uma elipse é constante.
2. Todos os paralelogramos circunscritos a uma elipse e construídos sobre dois diâmetros conjugados, isto é, tendo lados paralelos a dois diâmetros conjugados, são equivalentes.

Demonstrações:

1. Consideremos dois semidiâmetros conjugados  $OM = m$  e  $ON = n$  de uma elipse e seus transformados  $\overline{OM}$  e  $\overline{ON}$  pela afinidade ortogonal existente entre a elipse e seu círculo principal (Figura 111).

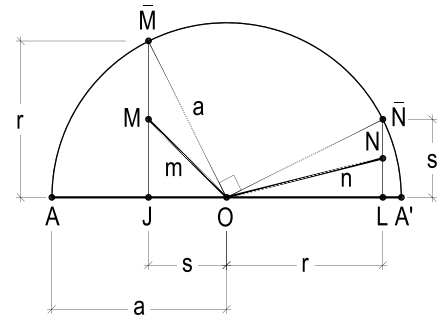


Figura 111

Porque a razão da afinidade entre essa elipse e o círculo é  $\frac{b}{a}$  (número 62.3), temos:

$$\frac{JM}{\overline{JM}} = \frac{LN}{\overline{LN}} = \frac{b}{a} \quad (1)$$

Os raios  $\overline{OM}$  e  $\overline{ON}$ , perpendiculares (número 70), do círculo principal acarretam a igualdade dos triângulos  $OJM$  e  $ONL$ , que permite escrever:

$$\overline{JM} = OL = r \quad \text{e} \quad OJ = \overline{LN} = s$$

A relação (1) dá, então:

$$JM = \frac{b}{a} \overline{JM} = \frac{b}{a} r \quad (2) \quad \text{e} \quad LN = \frac{b}{a} \overline{LN} = \frac{b}{a} s \quad (3)$$

Os triângulos retângulos  $OJM$  e  $ONL$  (Figura 111) fornecem:

$$m^2 = s^2 + JM^2 \quad \text{e} \quad n^2 = r^2 + LN^2 \quad \therefore \quad m^2 + n^2 = r^2 + s^2 + JM^2 + LN^2 \quad (4)$$

$$\therefore \quad m^2 + n^2 = r^2 + s^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 r^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 s^2 = r^2 + s^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 (r^2 + s^2) \quad (5)$$

Mas como  $r^2 + s^2 = a^2$ , a relação (5) se escreve:

$$m^2 + n^2 = a^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 a^2 \quad \therefore \quad \boxed{m^2 + n^2 = a^2 + b^2}$$

Ou ainda:

$$4m^2 + 4n^2 = 4a^2 + 4b^2 \quad \therefore \quad \boxed{(2m)^2 + (2n)^2 = (2a)^2 + (2b)^2}$$

Assim, a soma dos quadrados de dois diâmetros conjugados quaisquer é constante e igual à soma dos quadrados dos eixos da elipse, como se queria provar.

2. Consideremos um paralelogramo qualquer circunscrito a uma elipse, mas construído sobre dois diâmetros conjugados, bem como um círculo que tenha por projeção ortogonal sobre o plano do paralelogramo aquela elipse (Figura 112).

Sabe-se (número 71.2) que, nestes termos, o paralelogramo considerado é a projeção ortogonal de um quadrado circunscrito ao círculo, sobre o plano da elipse (Figura 112).

Assim, designando por  $S$  a área do paralelogramo, por  $(S)$  a área do quadrado, por  $2a$  e  $2b$  os eixos da elipse e por  $\alpha$  o ângulo formado pelos dois planos considerados, vale (*Geometria Espacial*, número 53) escrever:

$$S = (S) \cos \alpha = (2a)^2 \cos \alpha$$

E como (número 39.4)  $\cos \alpha = \frac{2b}{2a}$ , temos:

$$S = (2a)^2 \frac{2b}{2a} \quad \therefore \quad \boxed{S = (2a)(2b)}$$

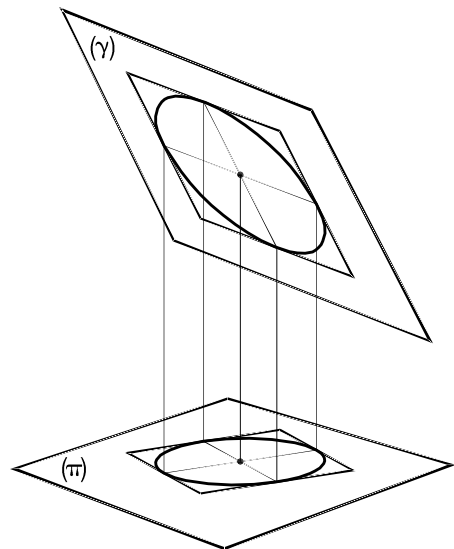


Figura 112

Assim, todos os paralelogramos circunscritos a uma elipse e construídos sobre dois diâmetros conjugados, isto é, com lados paralelos a dois diâmetros conjugados, são equivalentes entre si e equivalentes ao retângulo construído sobre seus eixos, o que demonstra a segunda parte do teorema em estudo.

## 74 – Corolário

Designando por  $2m$  e  $2n$  os comprimentos de dois diâmetros conjugados, e por  $2a$  e  $2b$  os eixos da elipse (Figura 113), os teoremas de Apollonius fornecem a relação:

$$\boxed{\frac{2}{a}^2 + \frac{2}{b}^2 = \frac{2}{m}^2 + \frac{2}{n}^2}$$

Com ela é possível calcular os eixos  $2a$  e  $2b$ , a partir dos valores de dois diâmetros conjugados  $2m$  e  $2n$  e de demais informações, caso a caso.

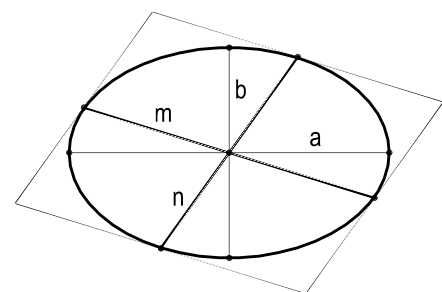


Figura 113



# CAPÍTULO V

## ELIPSE COMO AFIM OBLÍQUA DO CÍRCULO

### 75 – Teorema

Em toda afinidade oblíqua, a razão entre os segmentos formados por dois pontos afins quaisquer e o traço com o eixo de afinidade dos raios de afinidade que os contenham é constante.

Demonstração:

Consideremos uma afinidade oblíqua qualquer, de eixo  $e$  e direção  $d$ , bem como diversos pares de pontos afins, como  $A$  e  $\bar{A}$ ,  $B$  e  $\bar{B}$ ,  $C$  e  $\bar{C}$ ,  $D$  e  $\bar{D}$ , etc. (Figura 114).

Os triângulos semelhantes  $JA\bar{A}$  e  $JB\bar{B}$ ,  $IB\bar{B}$  e  $IC\bar{C}$ ,  $LC\bar{C}$  e  $LDD$ , etc. permitem escrever:

$$\frac{1A}{1\bar{A}} = \frac{2B}{2\bar{B}}, \quad \frac{2B}{2\bar{B}} = \frac{3C}{3\bar{C}}, \quad \frac{3C}{3\bar{C}} = \frac{4D}{4\bar{D}}, \quad \text{etc.,}$$

que, reunidas, fornecem:

$$\frac{1A}{1\bar{A}} = \frac{2B}{2\bar{B}} = \frac{3C}{3\bar{C}} = \frac{4D}{4\bar{D}} = \dots = k, \text{ uma constante, por atender a todos os pares de pontos afins do sistema.}$$

Assim, em toda afinidade oblíqua, a razão entre os segmentos formados por dois pontos afins quaisquer e o traço com o eixo de afinidade dos raios de afinidade que os contêm é constante.

### 76 – Observação

Essa razão constante  $k$  é denominada razão da afinidade oblíqua considerada.

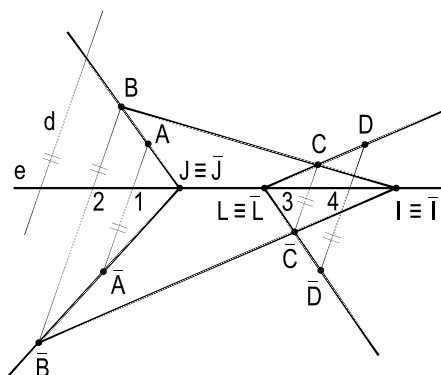


Figura 114

## 77 – Teorema

Todo plano secante a uma superfície cilíndrica de revolução e oblíquo às geratrizes corta a superfície segundo uma elipse.

Demonstração:

Estudemos uma superfície cilíndrica de revolução e um plano  $(\pi)$ , oblíquo às suas geratrizes, que a secciona segundo uma curva fechada (Figura 115), que provaremos ser uma elipse.

Para tanto, consideremos as duas superfícies esféricas, iguais, inscritas na superfície cilíndrica e tangentes ao plano  $(\pi)$  nos pontos  $(F)$  e  $(F')$  e tomemos um ponto genérico  $(M)$  da seção plana em estudo, bem como a geratriz  $(1)(2)$ , pertencente a  $(M)$  e limitada entre os dois círculos  $(c)$  e  $(c')$  de contato da superfície cilíndrica com cada uma das duas esféricas (Figura 115).

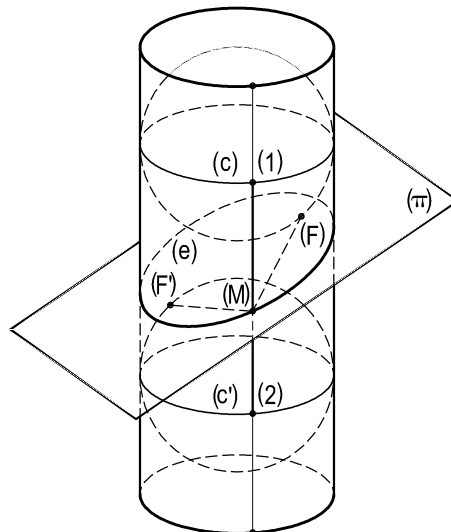


Figura 115

Porque  $(\pi)$  é tangente às duas superfícies esféricas consideradas e porque  $(1)(2)$  é também tangente a elas, podemos (*Geometria Espacial*, número 213) anotar:

$$(M)(F) = (M)(1)$$

$$(M)(F') = (M)(2)$$

$$\text{E, por soma, } (M)(F) + (M)(F') = (M)(1) + (M)(2) = (1)(2)$$

Como o valor de  $(1)(2)$  é o mesmo para todos os pontos  $(M)$  da seção, como geratrizes do cilindro limitado por  $(c)$  e por  $(c')$ , fica provado que a seção que  $(\pi)$  provoca na superfície cilíndrica de revolução é uma elipse de focos  $(F)$  e  $(F')$  e eixo maior igual ao segmento  $(1)(2)$ .

## 78 – Corolário

A projeção cilíndrico-oblíqua de um círculo sobre um plano genérico oblíquo ao seu é uma elipse.

Porque, assim, a elipse  $(e)$  é a projeção sobre um plano genérico  $(\pi)$  do círculo  $(c)$  (Figura 115).

## 79 – Afinidade oblíqua entre elipse e círculo

Consideremos dois planos oblíquos  $(\gamma)$  e  $(\pi)$ , um círculo  $(c)$  pertencente a  $(\gamma)$ , com centro sobre a interseção  $\gamma\pi$  dos dois planos e a elipse, projeção cilíndrico-oblíqua daquele círculo sobre  $(\pi)$ , segundo uma direção genérica  $(d)$  (Figura 116).

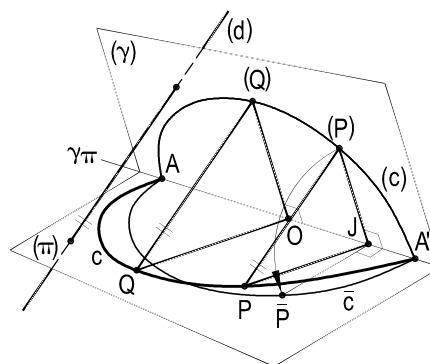


Figura 116

Naturalmente, se associarmos a cada ponto (P) do círculo uma reta (P)J de maior declive de ( $\gamma$ ) em relação a ( $\pi$ ), bem como a projeção cilíndrico-obliqua PJ desta reta sobre ( $\pi$ ), segundo a direção (d), por terem lados respectivamente paralelos, serão semelhantes todos os triângulos como J (P) P limitados por duas daquelas retas e a projetante correspondente (Figura 116).

Ainda mais, se efetuarmos o rebatimento de ( $\gamma$ ) sobre ( $\pi$ ), em torno de  $\gamma\pi$ , todos os triângulos como  $\bar{J}\bar{P}\bar{P}$ ,  $\bar{L}\bar{Q}\bar{Q}$ , etc., por terem lados respectivamente paralelos, serão semelhantes (Figura 117), o que acarretará uma divisão constante dos segmentos paralelos  $\bar{P}\bar{P}$ ,  $\bar{Q}\bar{Q}$ , etc. (Figura 117) pelos seus traços 1, 2, etc., na reta  $\gamma\pi$ .

Por isso mesmo (número 75), conclui-se que existe afinidade oblíqua entre a elipse considerada e o círculo que tem por diâmetro um diâmetro  $MM'$  da elipse (Figura 117).

Então, toda elipse pode ser considerada como transformada, por afinidade oblíqua, de um círculo que tem por diâmetro um dos diâmetros da elipse.

E mais, sendo  $MM'$  o diâmetro da elipse, escolhido como eixo da afinidade, o diâmetro  $NN'$ , da elipse, afim do diâmetro do círculo perpendicular ao eixo é o conjugado de  $MM'$  (Figura 118).

De fato, sabe-se que dois diâmetros conjugados de um círculo são necessariamente perpendiculares (número 70) e que a conjugação dos diâmetros se conserva na transformação por afinidade (número 70).

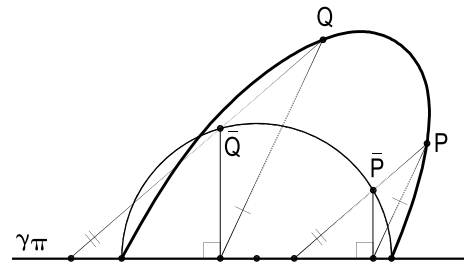


Figura 117

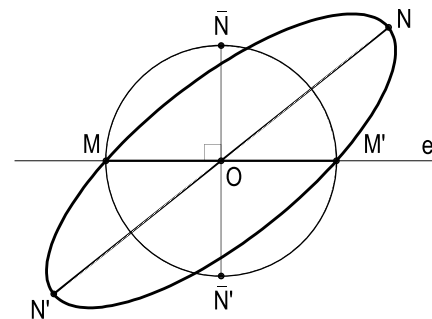


Figura 118

## 80 – Sistema de afinidade oblíqua entre elipse e círculo

Assim, desde que se possua dois diâmetros conjugados de uma elipse ou condições bastantes para determiná-los, em posição e grandeza, será possível estabelecer um sistema de afinidade oblíqua entre ela e o círculo que tenha por diâmetro um dos dois diâmetros conjugados da elipse, uma vez que ao segundo diâmetro da elipse corresponderá, no círculo, o perpendicular ao eixo da afinidade (Figura 118).

O método geral utilizado na afinidade oblíqua para a resolução dos problemas da elipse é, em estrutura, igual ao que foi apresentado na transformação por afinidade ortogonal:

conhecidos dois diâmetros conjugados  $MM'$  e  $NN'$  de uma elipse, constrói-se o círculo de diâmetro  $MM'$ , que será afim oblíquo da elipse dada, bem como seu diâmetro  $\bar{N}\bar{N}'$ , perpendicular a  $MM'$ , escolhido como eixo de tal afinidade.

Completando-se o triângulo  $O\bar{N}\bar{N}'$ , encontra-se a direção  $d$  dessa afinidade. É a direção da reta  $\bar{N}\bar{N}'$  (Figura 119).

Assim, para obter novos pontos  $J$  da elipse, basta tomar pontos  $\bar{J}$  do círculo afim e construir triângulos  $\bar{J}IJ$  (Figura 119) com lados paralelos aos de  $\bar{N}ON$ .

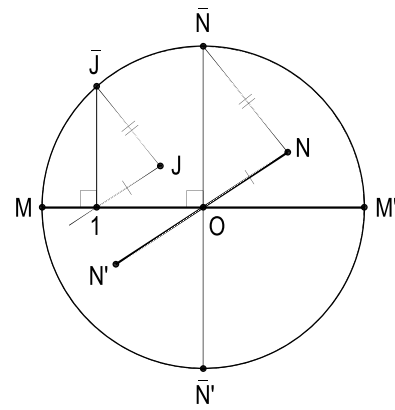


Figura 119

### 81 – Construção direta da elipse a partir de dois diâmetros conjugados

Dados dois diâmetros conjugados  $MM'$  e  $NN'$  de uma elipse, para construí-la diretamente, isto é, sem determinar seus eixos ou seus focos, escolhe-se um dos diâmetros ( $MM'$ , na Figura 120) para eixo da afinidade oblíqua entre ela e o círculo de diâmetro  $MM'$  e, pela construção do raio  $O\bar{N}$  perpendicular ao eixo, determina-se a direção  $\bar{N}\bar{N}'$  da afinidade (Figura 120).

Basta, então, arbitrar pontos  $\bar{P}$  sobre o círculo e retorná-los ao sistema da elipse, obtendo-se pontos correntes  $P$  da cônica.

É evidente, ainda, que é indiferente operar com elipse e círculo afins num mesmo semiplano, em relação ao eixo da afinidade (Figura 120), ou em semiplanos opostos (Figura 121). E que cada ponto  $P$ , corrente da elipse, proporciona outros três pontos  $P'$ ,  $P''$  e  $P'''$  (Figuras 120 e 121) da curva, pela simples construção de cordas suplementares (número 5) relativas aos dois diâmetros dados.

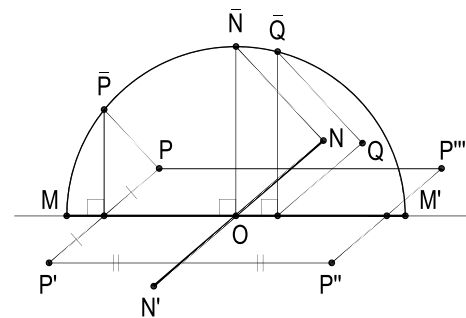


Figura 120

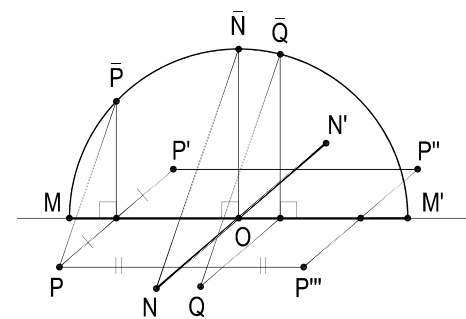


Figura 121

Quanto maior o número de pontos obtidos, maior será a precisão na construção da elipse.

**82 – Construção da tangente num ponto corrente P, dados um diâmetro  $MM'$ , o ponto P e a direção  $\Delta$  do diâmetro conjugado de  $MM'$**

Traça-se o círculo de diâmetro  $MM'$  e, com o auxílio da direção  $\Delta$  de seu conjugado, constrói-se o triângulo  $P\bar{P}$  (Figura 122), o qual determina precisamente a afinidade oblíqua entre elipse e círculo.

Assim, a tangente  $\bar{t}$  ao círculo afim da elipse, no ponto  $\bar{P}$ , retornada ao sistema da elipse, fornecerá a tangente  $t$  pedida (Figura 122).

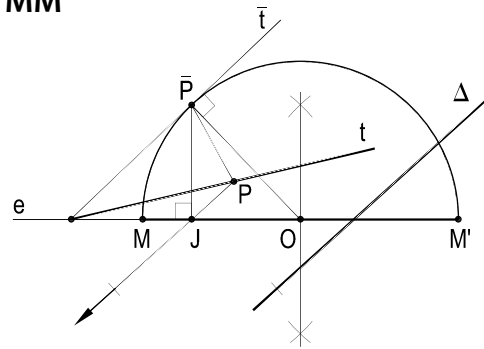


Figura 122

**83 – Construção das tangentes paralelas a uma reta r, dados dois diâmetros conjugados  $MM'$  e  $NN'$  e a reta r**

De posse de dois diâmetros conjugados  $MM'$  e  $NN'$  é imediato estabelecer o sistema de afinidade oblíqua entre a elipse dada e o círculo que tem por diâmetro um dos diâmetros dados, como  $MM'$ , na Figura 123.

E, com o auxílio das retas afins paralelas ao eixo, traçadas pelos pontos N e  $\bar{N}$ , determina-se a reta  $\bar{r}$ , afim de r.

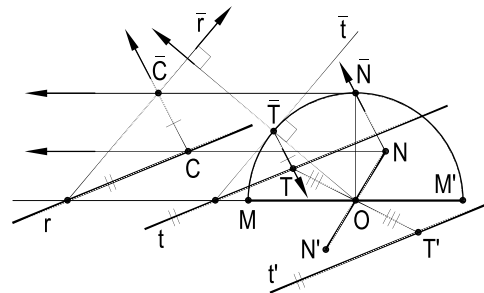


Figura 123

Constrói-se, então, uma das tangentes  $\bar{t}$  ao círculo, com a direção  $\bar{r}$  (Figura 123).

Retornando-se essa tangente  $\bar{t}$  ao sistema da elipse, obtém-se  $t$ , uma das tangentes pedidas à elipse. A segunda,  $t'$ , é construída por simetria de  $t$  em relação ao centro O (Figura 123).

**84 – Construção das tangentes por um ponto J exterior, dados dois diâmetros conjugados  $MM'$  e  $NN'$  e o ponto J**

Estabelece-se, inicialmente, o sistema de afinidade oblíqua entre a elipse e o círculo que tem por diâmetro um dos conjugados dados, como  $MM'$ , na Figura 124.

Determina-se, a seguir, o ponto  $\bar{J}$ , afim de J, bem como as tangentes  $\bar{t}$  e  $\bar{t}'$  de  $\bar{J}$  ao círculo afim da elipse (Figura 124).

Basta, então, retornar  $\bar{t}$  e  $\bar{t}'$  ao sistema da elipse, para obter as tangentes  $t$  e  $t'$ , pedidas, bem como seus respectivos pontos de contato T e T' com a elipse (Figura 124).

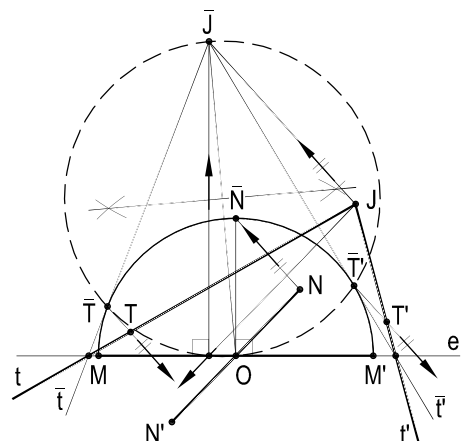


Figura 124

## 85 – Determinação rigorosa dos pontos de interseção de uma reta $r$ com uma elipse, dados dois diâmetros conjugados $MM'$ e $NN'$ da elipse e a reta $r$

Estabelece-se, inicialmente, o sistema de afinidade oblíqua entre a elipse e o círculo que tem por diâmetro um dos dois conjugados dados, como  $MM'$ , na Figura 125.

Determina-se, então, a reta  $\bar{r}$ , afim de  $r$ , bem como os pontos  $\bar{P}$  e  $\bar{Q}$ , segundo os quais  $\bar{r}$  corta o círculo afim da elipse.

Pelo retorno de  $\bar{P}$  e  $\bar{Q}$  ao sistema da elipse são obtidos os pontos  $P$  e  $Q$ , comuns à reta e à elipse dadas (Figura 125).

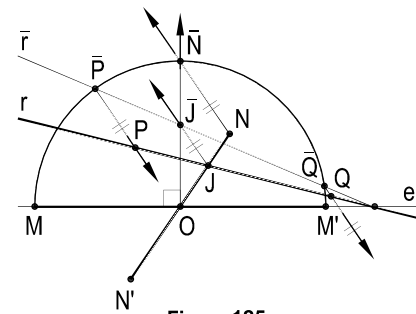


Figura 125

## 86 – Construção do círculo por pontos – aplicações à elipse

Análise: Consideremos um círculo e um quadrado a ele circunscrito e apliquemos, sobre o lado  $QR$  e sobre o raio que lhe é perpendicular, dois segmentos  $QJ$  e  $OL$  iguais (Figura 126).

O ponto  $P$ , comum às retas  $AL$  e  $BJ$ , pertence ao círculo considerado.

De fato, os triângulos retângulos  $AOL$  e  $BQJ$ , iguais, tendo catetos respectivamente perpendiculares, têm, também, hipotenusas perpendiculares (Figura 126).

E, sendo reto o ângulo  $\widehat{APB}$ , seu vértice  $P$  é necessariamente pertencente ao círculo de diâmetro  $AB$ .

Construção: Resulta, imediatamente, dessa propriedade, um processo, cujo interesse é estritamente teórico, para a construção, por pontos, de um círculo de diâmetro  $AB$ :

Constrói-se o quadrado que tem por pontos médios de dois lados opostos aqueles pontos  $A$  e  $B$  e divide-se o raio  $OM$ , perpendicular a  $AB$ , e os segmentos  $QM$  e  $OM$  (Figura 127) em um mesmo número de partes iguais.

As retas que unem  $A$  e  $B$  aos pontos de divisão correspondentes cortam-se, produzindo pontos  $P$  do círculo (Figura 127).

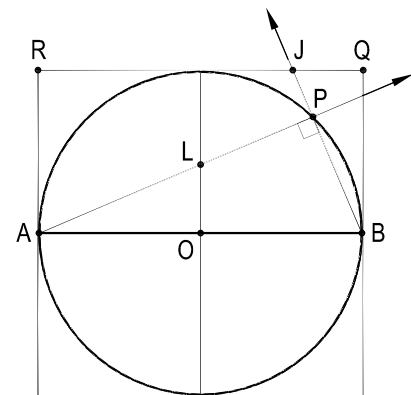


Figura 126

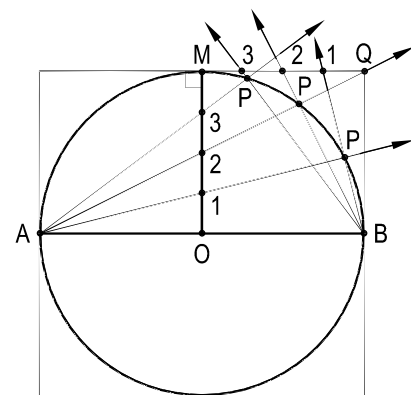


Figura 127

Aplicações: Mediante uma afinidade, ortogonal ou oblíqua, que tenha por eixo o diâmetro do círculo considerado, transforma-se o círculo em elipse e o quadrado em retângulo ou paralelogramo, respectivamente.

E, porque a divisão de um segmento em partes iguais se conserva em qualquer afinidade, o processo apresentado para a construção do círculo é exatamente o mesmo a ser empregado para a construção da elipse da qual são dados os dois eixos AA' e BB' (Figura 128), ou dois diâmetros conjugados MM' e NN' (Figura 129).

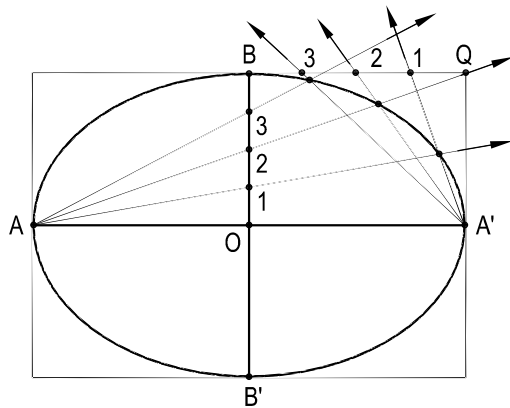


Figura 128

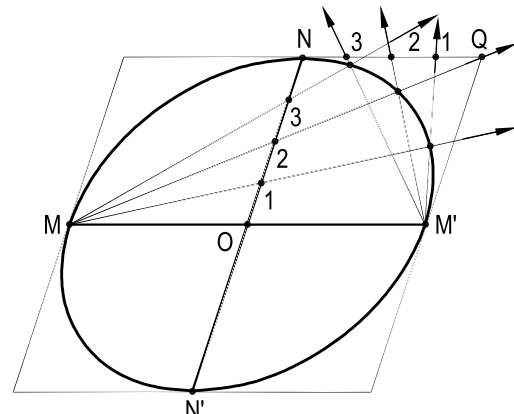


Figura 129

### 87 – Construção, por pontos, de um círculo dado por um diâmetro e por um ponto corrente – aplicações à elipse

Análise: Consideremos um ponto M, genérico, de um círculo de diâmetro AB, bem como o retângulo ABQR, cujo lado QR pertença àquele ponto M, e dividamos em um mesmo número n de partes iguais os segmentos JM, QM e RM (Figura 130).

As retas que unem os pontos A e B aos pontos de divisão de mesma ordem dos segmentos RM e JM (ou JM e QM), respectivamente, cortam-se, produzindo pontos P do círculo (Figura 130).

De fato, o triângulo AMB (Figura 130), retângulo em M, permite (*Geometria Plana*, número 197) escrever:

$$JM^2 = AJ \cdot JB$$

$$\therefore (nz)^2 = (nx)(ny)$$

$$\text{Ou ainda: } nz^2 = nxy$$

$$\therefore \frac{nz}{ny} = \frac{x}{z} = \frac{2x}{2z}$$

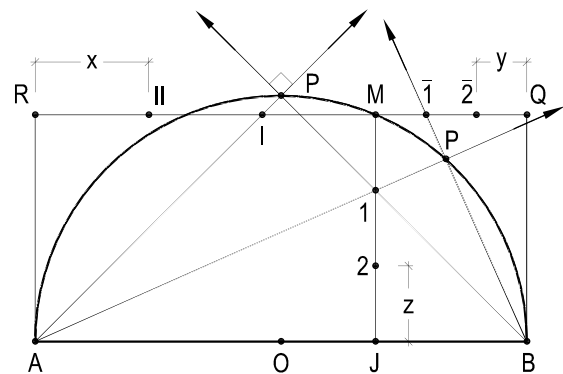


Figura 130

Ou seja (Figura 130):  $\frac{MJ}{MQ} = \frac{RI}{J1}$

$$\therefore \frac{AR}{BJ} = \frac{RI}{J1}$$

relação que implica na semelhança dos triângulos retângulos ARI e BJ1.

E, como os catetos desses triângulos retângulos semelhantes são respectivamente perpendiculares (Figura 130), suas hipotenusas AI e B1 são também perpendiculares, o que obriga a pertinência do ponto P, comum a essas retas, ao círculo considerado.

Aplicações: Mediante uma afinidade, ortogonal ou oblíqua, que tenha por eixo aquele diâmetro considerado, transforma-se o círculo em elipse e o retângulo estudado em outro retângulo ou num paralelogramo, respectivamente.

E, porque a divisão de um segmento em partes iguais é propriedade afim (ortogonal ou oblíqua), para construir diretamente uma elipse, dada por um de seus eixos (o maior, AA', na Figura 131) e por um ponto corrente M, basta completar o retângulo AA'QR, o lado QR pertencendo ao ponto M, dividir em um mesmo número de partes iguais os segmentos JM, QM e RM e, unindo os vértices A e A' aos pontos de divisão de mesma ordem daqueles segmentos (Figura 131), obter, por interseção dos pares de retas correspondentes, pontos da elipse.

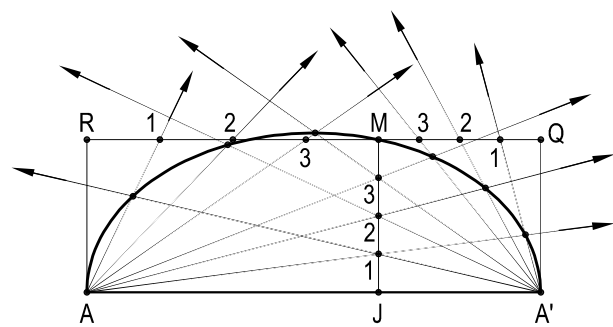


Figura 131

Para construir diretamente uma elipse, da qual são dados um diâmetro NN', um ponto corrente M e a direção d do diâmetro conjugado de NN', basta completar o paralelogramo NN'QR, com lados N'Q e RN paralelos àquela reta d e o lado QR pertencente ao ponto M (Figura 132) e, a partir daí, aplicar o mesmo processo acima descrito.

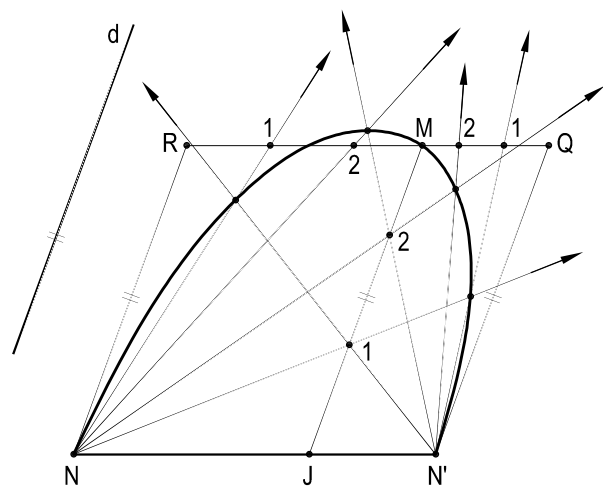


Figura 132



# CAPÍTULO VI

## HIPÉRBOLE

### 88 – Definições

Hipérbole é a curva plana cujos pontos possuem a mesma diferença de distâncias – naturalmente não nula – a dois pontos fixos de seu plano.

Os pontos fixos –  $F$  e  $F'$ , na Figura 133 – são os focos da hipérbole e a distância entre eles, a distância focal. Os segmentos  $MF$  e  $MF'$  formados por um ponto  $M$  corrente da curva e por cada um dos focos são denominados raios vetores do ponto  $M$  (Figura 133).

### 89 – Condição de existência

Designando por  $2c$  e  $2a$  a distância focal e o valor constante da diferença dos raios vetores dos pontos da hipérbole, para que exista a curva, isto é, para que existam os triângulos  $MFF'$  (Figura 134), é necessário e suficiente que:

$$FF' > MF - MF' \quad \therefore \quad \boxed{2c > 2a}$$

### 90 – Natureza

Tal como a elipse, a hipérbole é uma curva contínua. Mas, ao contrário daquela, a hipérbole é aberta, pois um ponto corrente, desde que conserve constante o valor da diferença de seus raios vetores, pode se afastar indefinidamente dos focos.

Conforme se considere o ponto corrente  $M$  mais próximo de  $F'$  ou de  $F$ , respectivamente, pode-se escrever:

$$MF - MF' = 2a \quad \text{ou} \quad MF' - MF = 2a$$

Daí se concluir que a hipérbole consta de dois ramos distintos (Figura 133).

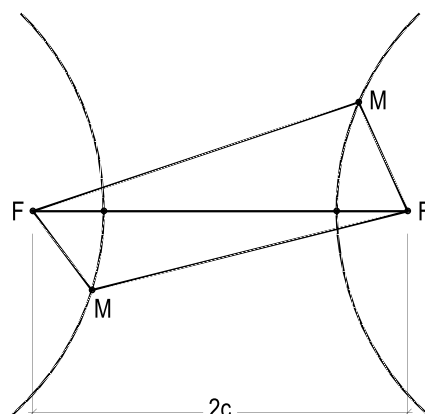


Figura 133

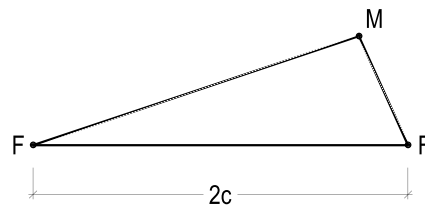


Figura 134

## 91 – Processo espontâneo para a construção da hipérbole

Sejam  $F$  e  $F'$  os focos e  $2a$  o valor da diferença constante dos raios vetores.

Arbitremos um ponto  $J$  no prolongamento do segmento auxiliar  $PQ = 2a$ , obtendo dois valores  $m$  e  $n$ , tais que  $m - n = 2a$  (Figura 135) e, com centros nos focos e raios iguais àqueles segmentos, construamos arcos de círculo que, por interseção, determinem os pontos  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  da curva.

Variando a posição de  $J$ , e conseqüentemente os valores dos raios vetores  $m$  e  $n$ , e repetindo-se a operação, obtém-se tantos pontos correntes quantos sejam desejados (Figura 136).

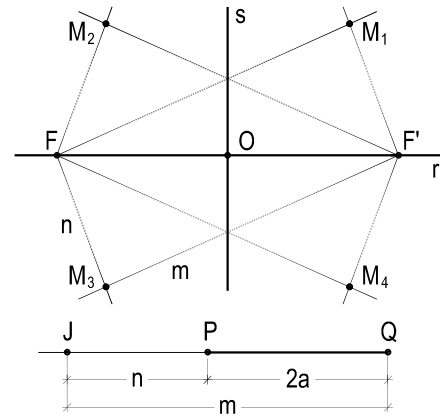


Figura 135

## 92 – Eixos e centro de simetria

Do próprio processo espontâneo conclui-se, pela igualdade dos triângulos  $M_1FF'$ ,  $M_2FF'$ ,  $M_3FF'$  e  $M_4FF'$  (3º caso), a simetria de  $M_1$  e  $M_4$  e de  $M_2$  e  $M_3$  em relação à reta que contém os focos e de  $M_1$  e  $M_2$  e de  $M_3$  e  $M_4$  em relação à mediatriz do segmento  $FF'$  (Figura 135).

Pode-se, então, afirmar que:

92.1 – A hipérbole possui dois eixos de simetria.

O eixo  $AA'$  (Figura 136) colinear com os focos é denominado real, transverso ou focal.

O segundo eixo – mediatriz de  $FF'$  – não toca a curva, pois seus pontos equidistam dos focos, sendo denominado imaginário, não transverso ou não focal (Figura 135).

92.2 – A hipérbole possui dois vértices e centro.

Os vértices são os pontos  $A$  e  $A'$  em que o eixo transverso encontra a curva (Figura 137) e o centro é o ponto  $O$  comum aos dois eixos (médio de  $AA'$ ).

## 93 – Relações métricas

93.1 – O segmento  $AA'$ , que representa o eixo transverso, é igual à diferença constante  $2a$  dos raios vetores de todos os pontos da curva (Figura 137).

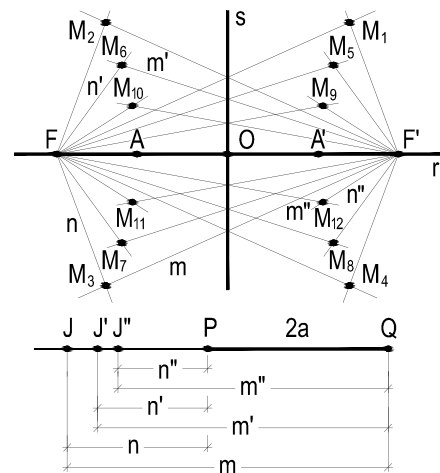


Figura 136

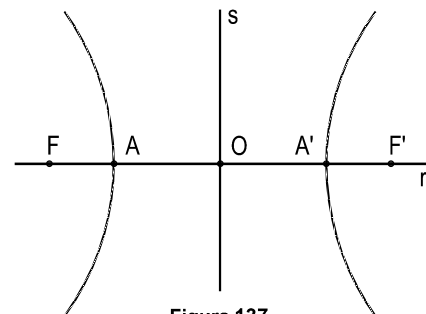


Figura 137

De fato, porque  $A'$  pertence à curva, podemos escrever:  $FA' - A'F' = 2a$ . E como  $A'F' = FA$ , vem  $FA' - FA = 2a \quad \therefore \quad \boxed{AA' = 2a}$

93.2 – Convencionou-se atribuir ao eixo não transversal um valor  $2b$  representado por um segmento  $BB'$ . E de tal modo que os dois semieixos sejam os catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa igual à semidistância focal.

Isto implica em que (Figura 138) o retângulo construído sobre eixos  $AA'$  e  $BB'$  seja necessariamente inscritível no círculo que tem por diâmetro a distância focal  $FF'$ .

Naturalmente os extremos  $B$  e  $B'$  do segmento criado para representar o eixo imaginário não são pontos da hipérbole.

93.3 – Relação entre os eixos e a distância focal.

O triângulo  $BOA$  (Figura 138) dá:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

$$\text{Ou } 4c^2 = 4a^2 + 4b^2 \quad \therefore \quad (2c)^2 = (2a)^2 + (2b)^2$$

$$\therefore \quad \boxed{FF'^2 = AA'^2 + BB'^2}$$

Ao contrário do que ocorre com a elipse, para a hipérbole o eixo real não é necessariamente maior que o imaginário, e porque  $AA'$  pode ser maior, igual ou menor que  $BB'$  não se usam, para a hipérbole, as denominações eixo maior e eixo menor.

93.4 – Corda focal – parâmetro.

Corda focal de uma hipérbole é a que, passando por um dos focos, é perpendicular ao eixo transversal.

Há, portanto, duas cordas focais, uma para cada foco.

Parâmetro de uma hipérbole é a ordenada, em relação ao eixo transversal, do ponto da curva, cuja projeção ortogonal sobre esse eixo coincide com um dos focos.

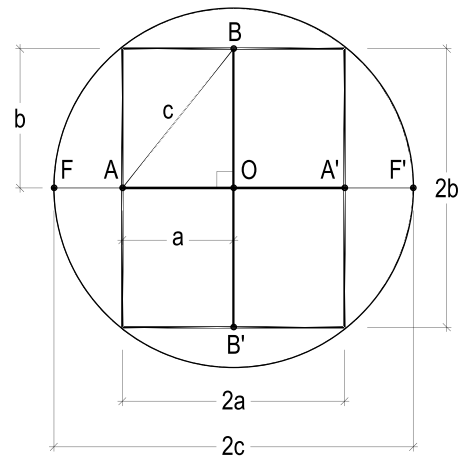


Figura 138

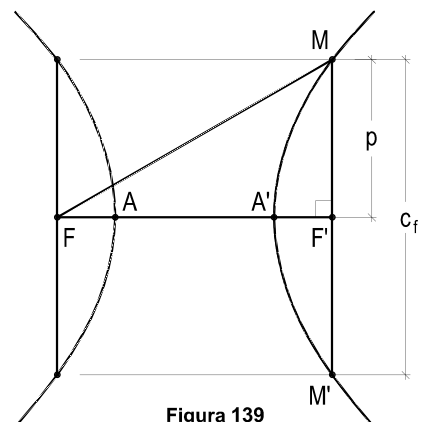


Figura 139

Sendo  $MM' = c_f$  uma das cordas focais, para o cálculo do parâmetro  $p$ , consideremos o triângulo retângulo  $MF'F$  (Figura 139) que fornece:

$$MF^2 = FF'^2 + MF'^2 \quad (1)$$

E, porque  $M$  pertence à curva:

$$MF - MF' = 2a \quad \therefore \quad MF - p = 2a \quad \therefore \quad MF = 2a + p$$

Assim, a relação (1) fica:

$$\begin{aligned} (2a + p)^2 &= (2c)^2 + p^2 & \therefore & \quad 4a^2 + p^2 + 4ap = 4c^2 + p^2 & \therefore & \quad 4a^2 + 4ap = 4c^2 \\ \therefore a^2 + ap &= c^2 & \therefore & \quad ap = c^2 - a^2 = b^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{p = \frac{b^2}{a}}$$

$$\therefore \quad \boxed{c_f = \frac{2b^2}{a}}$$

Multiplicando por 2 numerador e denominador, vem  $c_f = \frac{4b^2}{2a} \quad \therefore \quad \boxed{c_f = \frac{(2b)^2}{2a}}$

### 93.5 – Excentricidade.

Excentricidade de uma hipérbole é a razão entre sua semidistância focal e seu semi-eixo transversal. A excentricidade ( $e$ ) de uma hipérbole se calcula por uma das seguintes expressões:

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

ou  $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} \quad \therefore \quad \boxed{e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}$

## 94 – Observações

94.1 – A excentricidade da hipérbole é necessariamente maior que um.

De fato, porque  $c > a$  (número 89), vem:  $\frac{c}{a} > 1 \quad \therefore \quad \boxed{e > 1}$

94.2 – Quando, mantido fixo o valor  $2c$  da distância focal, faz-se tender a um a excentricidade,  $a$  tende a  $c$  e, então, os vértices  $A$  e  $A'$  aproximam-se, respectivamente, dos focos fixos  $F$  e  $F'$ . Assim,  $b$  tende a zero e a hipérbole degenera segundo duas semirretas de sentidos contrários, exteriores uma à outra, com origens em  $F$  e  $F'$ , tendo por suporte comum a reta  $FF'$  (Figura 140).



Figura 140

94.3 – Quando, mantidos fixos os focos, faz-se crescer indefinidamente o valor da excentricidade, a tende a zero e, conseqüentemente, os vértices A e A' aproximam-se simultaneamente do ponto O, médio de FF'. Assim, a hipérbole degenera segundo uma reta: a própria mediatriz do segmento FF' (Figura 141).

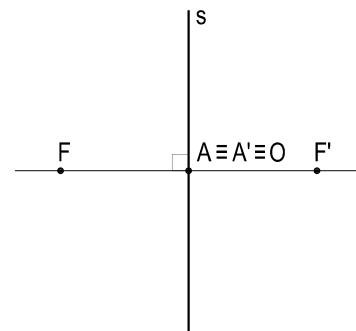


Figura 141

94.4 – A excentricidade de uma hipérbole pode ser expressa em função de seu eixo transverso e de seu parâmetro (ou de sua corda focal). De fato (números 93.4 e 93.5):

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{a}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 + \frac{p}{a}}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{p}{a}} = \sqrt{1 + \frac{2p}{2a}} \quad \therefore \quad e = \sqrt{1 + \frac{c_f}{2a}}$$

94.5 – Do acima instituído, conclui-se que a excentricidade de uma hipérbole é um parâmetro adimensional, indicando quanto mais, ou menos, a hipérbole adquire forma alongada.

## 95 – A hipérbole referida a seus eixos

Consideremos uma hipérbole referida a um sistema cartesiano tal que seus eixos coincidam com os coordenados, os focos F e F' estando sobre o eixo das abscissas (Figura 142).

Fazendo  $AA' = 2a$ ,  $BB' = 2b$  e  $FF' = 2c$  e, sendo M (x, y) um ponto genérico da hipérbole, podemos escrever:

$$MF - MF' = 2a \quad \therefore \quad MF = MF' + 2a$$

Elevando ao quadrado:

$$MF^2 = MF'^2 + 4a^2 + 4a MF'$$

E como F (-c, 0) e F' (c, 0), vem:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\therefore x^2 + c^2 + 2cx = x^2 + c^2 - 2cx + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\therefore 4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\therefore cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

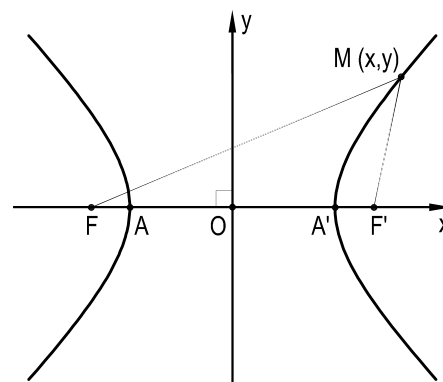


Figura 142

Elevando ao quadrado:

$$c^2 x^2 + a^4 - 2a^2 cx = a^2 x^2 + a^2 c^2 - 2a^2 cx + a^2 y^2$$

$$\therefore c^2 x^2 - a^2 x^2 = a^2 c^2 + a^2 y^2 - a^4 = a^2 (c^2 - a^2) + a^2 y^2$$

$$\therefore (c^2 - a^2) x^2 = a^2 (c^2 - a^2) + a^2 y^2$$

E como  $c^2 - a^2 = b^2$  (número 93.3), vem  $b^2 x^2 = a^2 b^2 + a^2 y^2$

$$\therefore \boxed{b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2}$$

que também se escreve:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

## 96 – Hipérbole equilátera

Por definição, uma hipérbole é dita equilátera quando são iguais seus dois eixos.

Decorre, então, que, para toda hipérbole equilátera:

96.1 – A razão entre a distância focal  $2c$  e qualquer um dos dois eixos ( $2a$  ou  $2b$ ) é constante e igual a  $\sqrt{2}$ . De fato (número 93.3), se os eixos são iguais, temos:

$$c^2 = 2a^2 = 2b^2 \quad \therefore \boxed{c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}}$$

ou

$$\boxed{2c = 2a\sqrt{2} = 2b\sqrt{2}}$$

96.2 – O parâmetro é igual aos dois semieixos (Figura 143).

De fato (número 93.4), se  $a = b$ :

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2}{a} \quad \therefore \boxed{p = a = b}$$

96.3 – A corda focal é igual aos eixos. Pois, se  $c_f = 2p$ , da propriedade anterior, vem:

$$\boxed{c_f = 2a = 2b}$$

96.4 – A excentricidade é igual a  $\sqrt{2}$ .

$$e = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} \quad \therefore \boxed{e = \sqrt{2}}$$

96.5 – A equação da curva, referida a seus eixos (sendo o focal o das abscissas), adquire aspecto simples (Figura 143), pois, se  $a = b$ :

$$a^2 x^2 - a^2 y^2 = a^4 \quad \therefore \boxed{x^2 - y^2 = a = b^2}$$

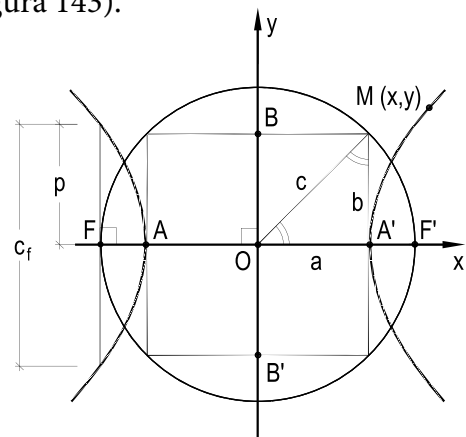


Figura 143

## 97 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos  $M$ , para os quais a diferença  $MF - MF'$  das distâncias a dois pontos fixos  $F$  e  $F'$  é constante, é o ramo relativo a  $F'$  da hipérbole de focos  $F$  e  $F'$  e eixo transversal igual àquela constante.

Demonstração:

Seja  $2a$  o valor constante da diferença  $MF - MF'$ , naturalmente menor que  $FF'$ .

Consideremos, da hipérbole de focos  $F$  e  $F'$  e eixo transversal  $2a$ , o ramo relativo a  $F'$ .

Sabe-se que (números 88 e 93.1), para todos os pontos  $M$  desse ramo, vale a relação:

$$MF - MF' = 2a \quad (1)$$

Sejam  $J$  e  $L$  dois pontos não pertencentes à hipérbole (Figura 144), os triângulos  $JMF$  e  $LM'F'$  fornecem:

$$JF < MF + JM$$

$$JF - JF' < MF + JM - JF' \quad \therefore \quad JF - JF' < MF - (JF' - JM)$$

$$JF - JF' < MF - MF' \quad \therefore \quad JF - JF' < 2a \quad (2)$$

$$LF' < LM' + M'F' \quad \therefore \quad LF' - LF < LM' + M'F' - LF$$

Multiplicando os dois membros por  $(-1)$ , vem:

$$LF - LF' > (LF - LM') - M'F' \quad \therefore \quad LF - LF' > M'F - M'F'$$

$$LF - LF' > 2a \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) demonstram o teorema.

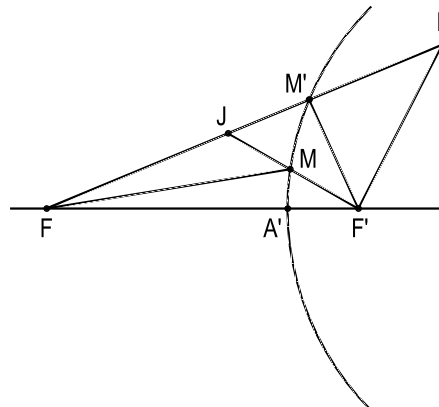


Figura 144

## 98 – Escólios

98.1 – Uma hipérbole de focos  $F$  e  $F'$  e eixo transversal  $2a$  é o lugar geométrico dos pontos para os quais as diferenças das distâncias a  $F$  e a  $F'$  têm módulo constante e igual a  $2a$ .

98.2 – A hipérbole divide seu plano em duas regiões: a exterior, entre os dois ramos, à qual pertencem os pontos cujas diferenças de distâncias aos focos são menores que o valor do eixo real e a interna, composta pelas duas porções situadas nas concavidades de cada um dos ramos, à qual pertencem os pontos cujas diferenças de distâncias aos focos são, em módulo, maiores que o eixo real da curva.

## 99 – Círculos diretores – círculo principal

Círculos diretores de uma hipérbole são os que têm por centros cada um dos focos e raios iguais ao eixo real (Figura 145).

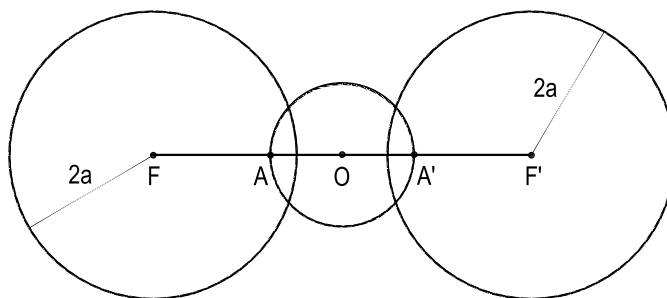


Figura 145

Círculo principal de uma hipérbole é o que tem por diâmetro o eixo real da curva (Figura 145).

## 100 – Teorema

A bissetriz do ângulo interno formado pelos raios vetores relativos a um ponto qualquer da hipérbole é tangente à curva nesse ponto.

Demonstração:

Sejam M um ponto qualquer de uma hipérbole de focos F e F' e de eixo transversal 2a e r a bissetriz do ângulo interno formado pelos raios vetores de M (Figura 146).

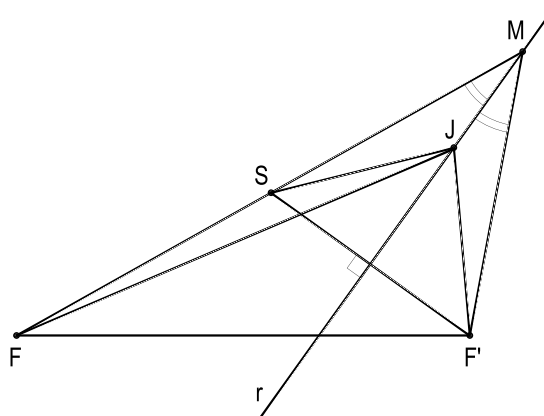


Figura 146

Sendo F'S perpendicular a r, o triângulo isósceles MF'S garante a simetria de F' e S, em relação a r.

Assim, para todo ponto J de r, não coincidente com M (Figura 146), vale escrever:

$$JS = JF' \text{ e } MS = MF'$$

E no triângulo JFS:  $JF - JS < SF$ .

$$\text{Ou: } JF - JF' < MF - MS \quad \therefore \quad JF - JF' < MF - MF'$$

$$\therefore \quad JF - JF' < 2a$$

Assim, todos os pontos J de r, exceto M, por possuírem diferenças de distâncias aos focos menores que o valor do eixo real, são exteriores à curva (número 98.2). E, então, a bissetriz interna r, tendo apenas em comum com a curva o ponto M, e todos os seus demais pontos no exterior da curva, é tangente a ela, em M.



## 101 – Corolários

101.1 – A bissetriz do ângulo externo formado pelos raios vetores de um ponto corrente da hipérbole é normal à curva, nesse ponto (Figura 147).

De fato, basta ver que essa bissetriz é perpendicular à interna.

101.2 – Os pontos de interseção da tangente e da normal relativas a um ponto corrente com a reta suporte do eixo real formam, com os focos, uma divisão harmônica.

Porque tais pontos são (Figura 147) os pés das bissetrizes, interna e externa, relativas ao vértice M do triângulo MFF' (*Geometria Plana*, número 166).

101.3 – Um dos focos, o ponto de contato de uma tangente qualquer, e o simétrico do outro foco em relação a essa tangente são sempre colineares.

101.4 – As tangentes nos vértices são perpendiculares ao eixo real.

101.5 – Uma hipérbole e uma elipse homofocais, isto é, com os mesmos focos, são ortogonais.

De fato, basta ver que, sendo M um ponto qualquer comum às duas curvas e F e F' seus focos comuns, as tangentes às curvas, em M, são as bissetrizes do ângulo FMF' (Figura 148) formado por seus raios vetores. E, porque elas são perpendiculares, as duas curvas são ortogonais.

## 102 – Teorema

O lugar geométrico dos simétricos de um foco de uma hipérbole em relação às tangentes é o círculo diretor relativo ao outro foco.

Demonstração:

Seja r a tangente num ponto M qualquer da hipérbole de focos F e F' e eixo real 2a (Figura 149) e S o simétrico de F' em relação a r, o triângulo isósceles MF'S dá:

$$MF' = MS$$

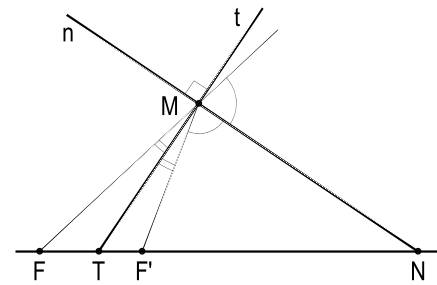


Figura 147

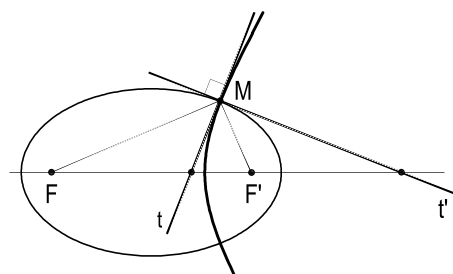


Figura 148

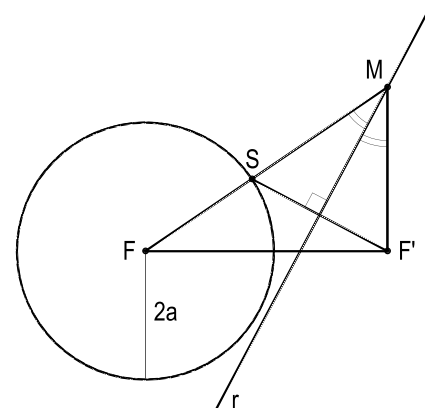


Figura 149

E como  $MF - MF' = 2a$ , vem:

$$MF - MS = 2a \quad \therefore \quad FS = 2a$$

Assim, o lugar geométrico dos simétricos de um dos focos de uma hipérbole em relação às tangentes é o círculo diretor relativo ao outro foco.

### 103 – Corolários

103.1 – O lugar geométrico dos pontos equidistantes de um círculo e de um ponto fixo, exterior ao círculo, é um dos ramos de uma hipérbole, para a qual o ponto fixo é um dos focos e o círculo é o diretor relativo ao outro foco.

Seja  $(F, 2a)$  o círculo,  $F'$  o ponto fixo exterior e  $M$  um ponto equidistante dos dois (Figura 149), temos  $MS = MF'$ .

$$\text{Mas como } MF - MS = FS = 2a, \text{ vem } MF - MF' = 2a$$

Assim,  $M$  descreve um dos ramos da hipérbole de focos  $F$  e  $F'$  e eixo real  $2a$ , o relativo ao foco  $F'$ . O círculo considerado é, então, um dos diretores da hipérbole.

103.2 – O lugar geométrico dos centros dos círculos pertencentes a um ponto fixo, exterior a um círculo dado, e tangentes a este círculo é a hipérbole para a qual o ponto fixo é um dos focos e o círculo dado é o diretor relativo ao outro foco.

Sejam  $(F, 2a)$  o círculo e  $F'$  o ponto fixo dados. Se  $M$  é o centro de um círculo, pertencente ao ponto  $F'$  e tangente exteriormente ao círculo dado (Figura 150), vale escrever:  $MS = MF'$ .

$$\text{Logo, } MF - MS = 2a \quad \therefore \quad MF - MF' = 2a$$

Isto significa que o lugar dos centros  $M$  dos círculos pertencentes a  $F'$  e tangentes exteriormente ao círculo  $(F, 2a)$  é o ramo da hipérbole, relativo ao foco  $F'$ .

Sendo, agora,  $N$  o centro de um círculo pertencente a  $F'$  e tangente interiormente ao círculo dado (Figura 151), temos  $NS' = NF'$

$$\text{Logo, } NS' - NF = 2a \quad \therefore \quad NF' - NF = 2a$$

Por isso que o lugar dos centros  $N$  dos círculos pertencentes a  $F'$  e tangentes interiormente ao círculo  $(F, 2a)$  é o ramo da hipérbole, relativo ao foco  $F$ .

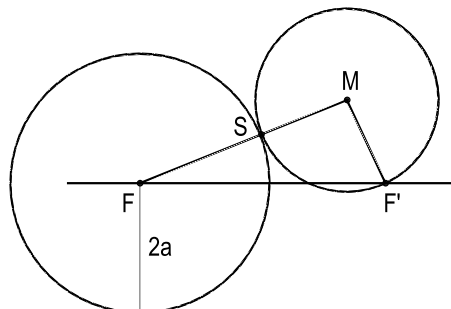


Figura 150

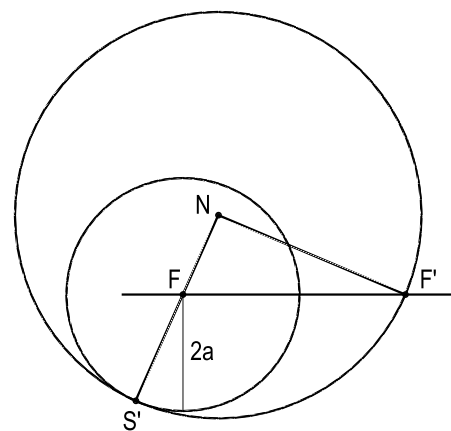


Figura 151

E, porque o círculo dado é um dos diretores da hipérbole obtida, de um modo geral, conclui-se que o lugar geométrico dos centros dos círculos pertencentes ao ponto  $F'$  e tangentes exterior ou interiormente ao círculo (F,  $2a$ ) é a hipérbole, para a qual o círculo e o ponto dados são um diretor e um foco.

### 104 – Determinação do ponto de contato de uma tangente

Quando são conhecidos os dois focos  $F$  e  $F'$  e uma tangente  $t$  a uma hipérbole, para determinar rigorosamente o ponto de contato dessa tangente, basta construir o simétrico  $S$  de um dos focos em relação a ela e uni-lo ao outro foco (Figura 152).

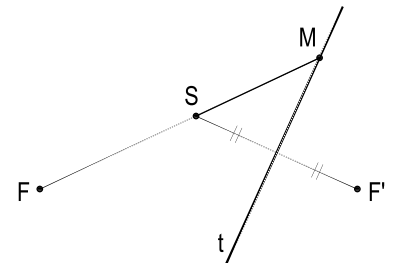


Figura 152

O ponto de contato procurado é o ponto  $M$  de interseção desta reta  $FS$  com a tangente dada  $t$  (Figura 152).

### 105 – Construção direta da hipérbole a partir do círculo diretor

Análise: Como o círculo diretor (F,  $2a$ ) é o lugar dos simétricos do foco  $F'$ , em relação às tangentes (número 102), a mediatriz  $t$  do segmento formado por  $F'$  e por um ponto  $S$  qualquer daquele círculo será uma tangente à hipérbole (Figura 153). E porque o ponto de contato dessa tangente, o simétrico  $S$  de  $F'$  em relação a  $t$ , e o foco  $F$  devem ser colineares (número 101.3), a reta  $FS$  corta  $t$  segundo um ponto  $M$  da curva (Figura 153).

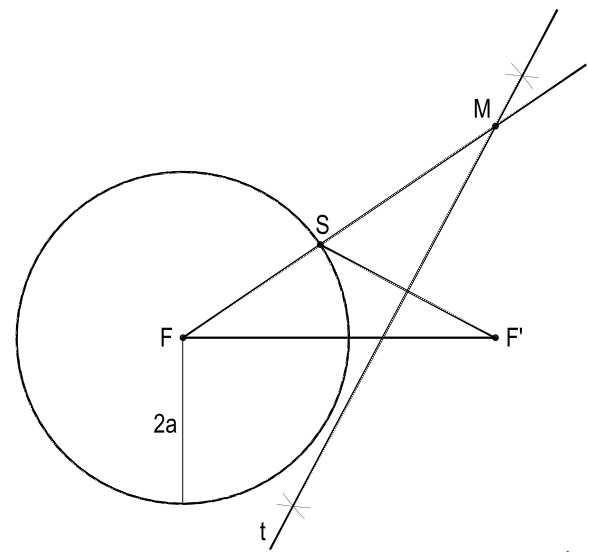


Figura 153

Construção: Dados os dois focos  $F$  e  $F'$  e o valor  $2a$  do eixo real, constrói-se um dos círculos diretores (F,  $2a$ ), arbitrando-se, nele, pontos  $S$ . Para cada  $S$ , a interseção da reta  $FS$  com a mediatriz do segmento  $F'S$  é um ponto  $M$  da hipérbole (Figura 154).

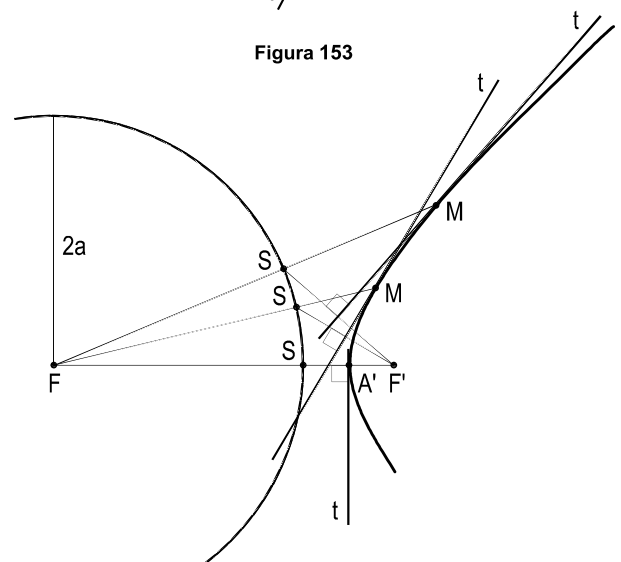


Figura 154

Além dos pontos correntes  $M$ , o processo fornece tangentes, nesses pontos, à curva, o que facilita sensivelmente seu traçado.

Para a construção do segundo ramo da hipérbole, basta operar com o círculo diretor relativo ao foco  $F'$ , da mesma forma que a acima descrita.

## 106 – Observações

106.1 – O processo apresentado no item anterior proporciona, com o emprego de apenas um dos círculos diretores, pontos dos dois ramos da hipérbole. De fato, consideremos as tangentes  $F'S_1$  e  $F'S_2$  do foco  $F'$  ao círculo diretor relativo ao foco  $F$ .

Todo ponto  $S$  do círculo diretor pertencente ao menor arco  $\bar{S}_1\bar{S}_2$  produz, segundo o processo antes indicado (número 105), ponto  $M$  do ramo relativo ao foco  $F'$  (Figura 155), enquanto que todo ponto  $S$  do maior arco  $\bar{S}_1\bar{S}_2$  do círculo diretor produz ponto  $M$  do ramo relativo ao foco  $F$  (Figura 156).

106.2 – Oportunamente (número 122.1) será provado que os pontos  $\bar{S}_1$  e  $\bar{S}_2$  são os simétricos do foco  $F'$  em relação às assíntotas da hipérbole.

## 107 – Construção das tangentes

107.1 – Tangente num ponto  $M$  da curva (dados  $M$  e os dois focos).

Para a determinação da tangente, basta girar o menor raio vetor  $MF'$ , em torno de  $M$ , até que ele venha a ocupar a posição  $MS$  sobre  $MF$  (Figura 157) e traçar, por  $M$ , a perpendicular  $t$  à reta  $F'S$ .

A reta  $t$  será a tangente.

De fato, dessa construção resulta que  $t$  é a bissetriz do ângulo interno formado pelos raios vetores de  $M$  (Figura 157).

107.2 – Tangentes paralelas a uma reta  $r$  (dados os focos, o valor  $2a$  do eixo real e a reta  $r$ ).

Análise: Sejam  $t_1$  e  $t_2$  as tangentes procuradas, paralelas à reta  $r$ . Porque os simétricos  $S_1$  e  $S_2$  do foco  $F'$  em relação àquelas tangentes devem pertencer ao círculo diretor  $(F, 2a)$  relativo ao outro foco (número 102),  $t_1$  e  $t_2$  serão mediatrizes dos segmentos  $F'S_1$  e  $F'S_2$ , respectivamente (Figura 158). E estes segmentos devem, naturalmente, pertencer à perpendicular traçada, por  $F'$ , à reta dada  $r$ .

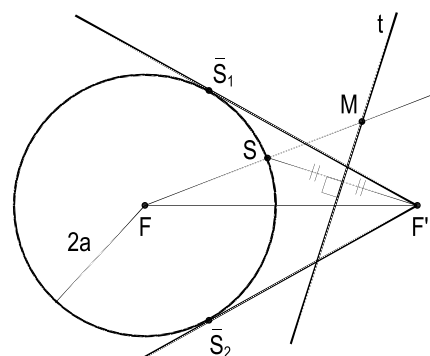


Figura 155

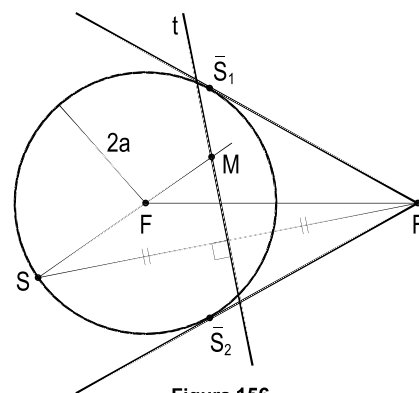


Figura 156

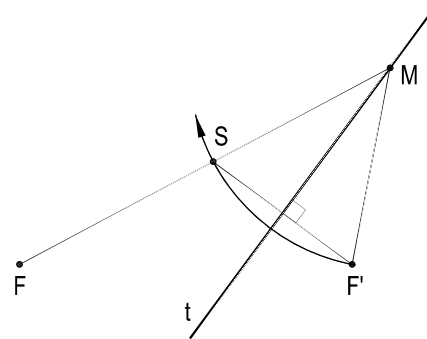


Figura 157

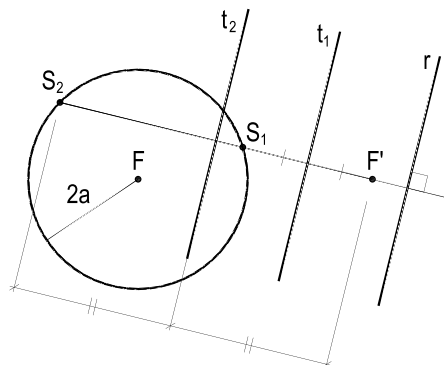


Figura 158

Construção:

Dados os dois focos  $F$  e  $F'$  e o valor  $2a$  do eixo real, bem como a direção  $r$  das tangentes, constrói-se inicialmente um dos círculos diretores  $(F, 2a)$  e, a seguir, a perpendicular, pelo foco  $F'$ , à reta  $r$ , a qual corta o diretor segundo os pontos  $S_1$  e  $S_2$  (Figura 159).

Determina-se, então, as mediatrizes  $t_1$  e  $t_2$  dos segmentos  $F'S_1$  e  $F'S_2$ , as quais são as tangentes procuradas.

Os pontos de contato  $M_1$  e  $M_2$  são obtidos com o auxílio das retas  $FS_1$  e  $FS_2$  (número 104).

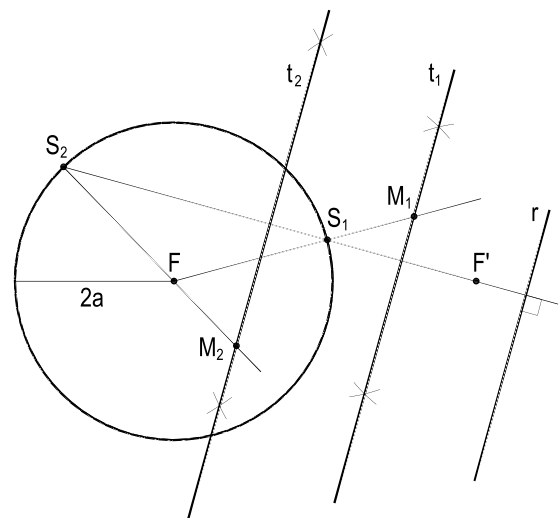


Figura 159

107.3 – Observações.

1. As tangentes  $t_1$  e  $t_2$ , por serem paralelas (Figura 159), são simétricas em relação ao centro da hipérbole. Assim, construída uma delas, a outra pode ser obtida mediante o emprego dessa simetria.
2. A direção dada  $r$  (Figura 159) não pode ser qualquer. De fato, só existirá tangente paralela a  $r$  enquanto houver ponto comum ao círculo diretor relativo a um foco e à perpendicular traçada pelo outro foco à reta  $r$ .

107.4 – Tangentes por um ponto  $J$  exterior (dados os dois focos, o valor  $2a$  do eixo real e o ponto  $J$ ).

Análise: Sejam  $t_1$  e  $t_2$  as tangentes procuradas e  $(F, 2a)$  um dos círculos diretores da hipérbole. Como os simétricos  $S_1$  e  $S_2$  do outro foco  $F'$  em relação a essas tangentes devem pertencer ao círculo diretor considerado (número 102), conclui-se que:  $JF' = JS_1 = JS_2$  (Figura 160).

Por isso que os dois simétricos  $S_1$  e  $S_2$  e o foco  $F'$  devem pertencer a um outro círculo, com centro em  $J$  e raio  $JF'$  (Figura 160).

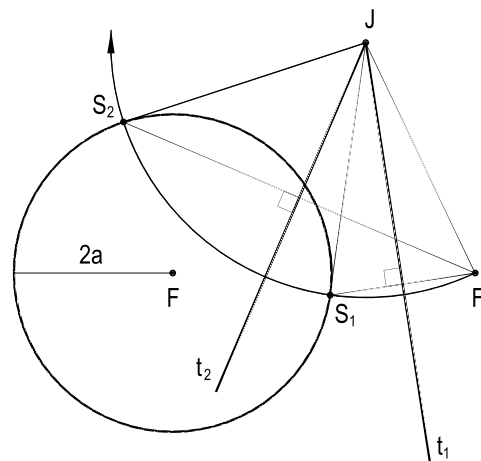


Figura 160

Construção: Dados os dois focos  $F$  e  $F'$  e o valor  $2a$  do eixo real, bem como o ponto  $J$ , constrói-se inicialmente um dos círculos diretores ( $F, 2a$ ) e o círculo que tem centro em  $J$  e que passa pelo foco  $F'$  (Figura 161). Os dois círculos cortam-se segundo os pontos  $S_1$  e  $S_2$ , simétricos de  $F'$  em relação às tangentes procuradas.

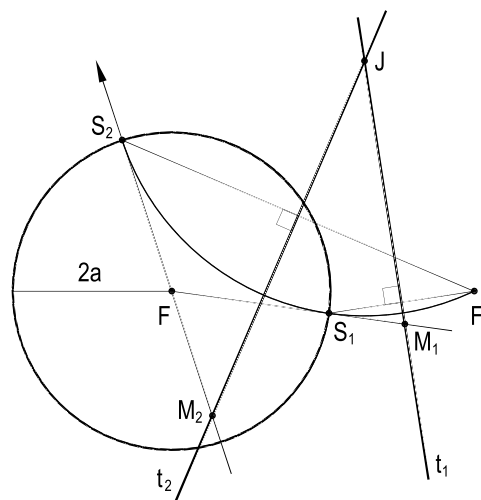


Figura 161

Assim, obtidos  $S_1$  e  $S_2$ , as perpendiculares  $t_1$  e  $t_2$ , traçadas por  $J$  aos segmentos  $F'S_1$  e  $F'S_2$ , sendo as próprias mediatrizes desses segmentos, são as tangentes pedidas (Figura 161).

Os pontos de contato  $M_1$  e  $M_2$  das tangentes  $t_1$  e  $t_2$  são determinados pela união dos simétricos  $S_1$  e  $S_2$  ao foco  $F$  (número 104).

### 108 – Teorema de La Hire

O lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos de uma hipérbole sobre as tangentes é o círculo principal da curva.

Demonstração: Seja  $t$  uma tangente qualquer à hipérbole de focos  $F$  e  $F'$ , centro  $O$  e eixo real  $2a$  (Figura 162).

Como o simétrico  $S$  do foco  $F'$  em relação a  $t$  pertence ao círculo diretor relativo a  $F$  (número 102), vem  $FS = 2a$ .

E porque o ponto  $P$ , projeção ortogonal de  $F'$  sobre  $t$ , é o próprio ponto médio do segmento  $F'S$ , o triângulo  $FF'S$  fornece (*Geometria Plana*, número 86):

$$OP = \frac{1}{2} FS = \frac{1}{2} 2a \quad \therefore \quad OP = a$$

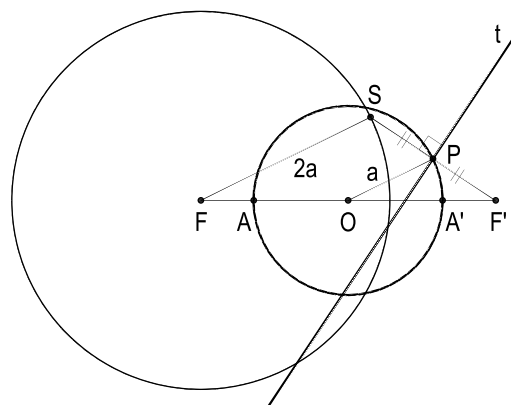


Figura 162

E se o ponto  $P$ , projeção ortogonal do foco  $F'$  sobre uma tangente qualquer  $t$ , dista  $a$  do centro  $O$  da curva, conclui-se que o lugar geométrico dos pontos  $P$  é o círculo  $(O, a)$ .

Então, o lugar geométrico das projeções ortogonais dos focos de uma hipérbole sobre as tangentes é o círculo principal da curva.

## 109 – Teorema

O produto das distâncias de um dos focos de uma hipérbole a duas tangentes paralelas é constante e igual ao quadrado do semieixo não transverso.

Demonstração: Sejam  $t$  e  $t'$  duas tangentes paralelas a uma hipérbole e  $P$  e  $P'$  as projeções ortogonais do foco  $F$  sobre elas (Figura 163).

Porque  $P$  e  $P'$  pertencem ao círculo  $(O, a)$ , principal da hipérbole (número 108), a potência do foco  $F$  em relação a esse círculo (*Geometria Plana*, números 234 e 242) se escreve (Figura 163):

$$P_{F(O)} = FP \cdot FP' = FA \cdot FA'$$

$$\therefore d \cdot d' = (c - a)(c + a) = c^2 - a^2$$

E como  $c^2 - a^2 = b^2$  (número 93.3), vem:

$$d \cdot d' = b^2$$

Então, o produto das distâncias de um dos focos de uma hipérbole a duas tangentes paralelas é constante e igual ao quadrado do semieixo não transverso.

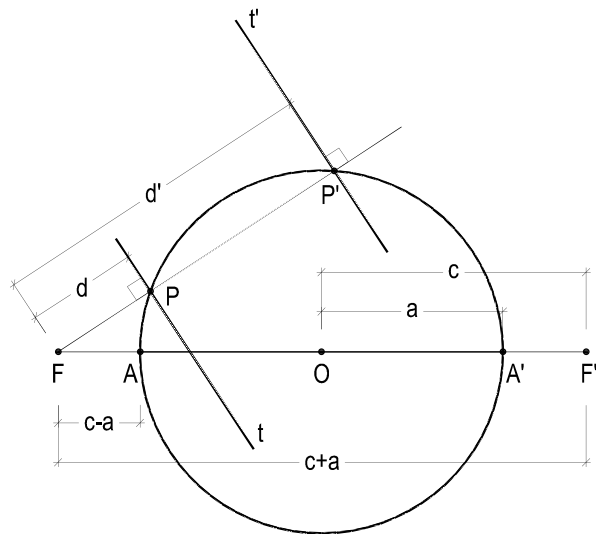


Figura 163

## 110 – Corolário

O produto das distâncias dos focos de uma hipérbole a uma tangente qualquer é constante e igual ao quadrado do semieixo não transverso.

Porque as duas tangentes  $t$  e  $t'$  paralelas, sendo simétricas em relação ao centro  $O$  da hipérbole, acarretam a igualdade dos triângulos  $FOP'$  e  $F'OP''$  (Figura 164).

Logo,  $d' = d''$ .

Assim, a relação  $d \cdot d' = b^2$  também se escreve:

$$d \cdot d'' = b^2$$

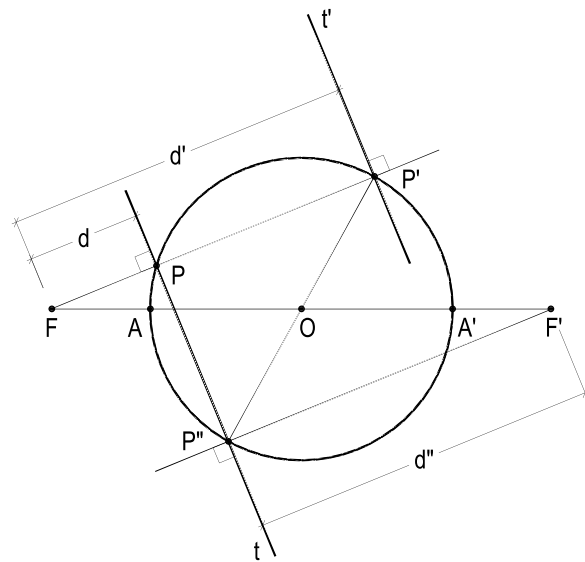


Figura 164

## 111 – Construções

Do teorema de La Hire resultam as seguintes construções:

111.1 – Determinação dos focos a partir do eixo transverso  $AA'$  e de uma tangente  $t$ .

Sendo dados o eixo real  $AA'$  e uma tangente  $t$  a uma hipérbole, para obter seus focos, basta construir o círculo principal  $e$ , pelos pontos  $P$  e  $P'$  em que ele corta a tangente  $t$ , traçar as perpendiculares a essa tangente, as quais cortam a reta suporte de  $AA'$  segundo os focos  $F$  e  $F'$  procurados (Figura 165).

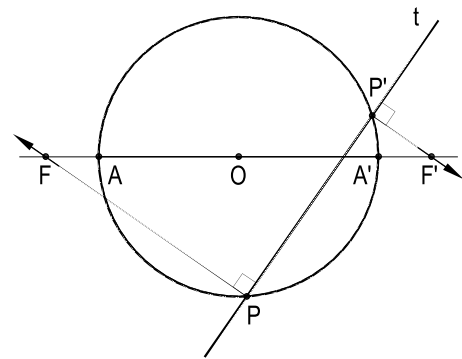


Figura 165

111.2 – Determinação dos eixos a partir dos focos  $F$  e  $F'$  e de uma tangente  $t$ .

Sendo dados os dois focos  $F$  e  $F'$  e uma tangente qualquer  $t$ , para determinar o eixo real, basta projetar um dos focos ( $F'$ ) sobre a tangente, obtendo-se um ponto  $P'$  do círculo principal (Figura 166).

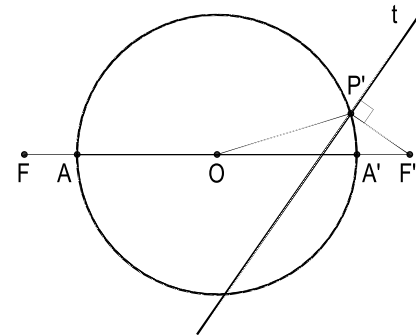


Figura 166

E, com centro no próprio centro  $O$  da hipérbole e raio  $OP'$ , descreve-se o círculo principal que corta a reta  $FF'$  segundo os vértices  $A$  e  $A'$ .

Enfim, para determinar o eixo imaginário  $BB'$ , basta construir o círculo de diâmetro  $FF'$  e levantar, pelos vértices  $A$  e  $A'$ , as perpendiculares ao eixo focal, completando, a seguir, o retângulo  $RSTU$  inscrito naquele círculo (Figura 167). O eixo não transverso  $BB'$  ficará, então, limitado entre as bases daquele retângulo (número 93.2).

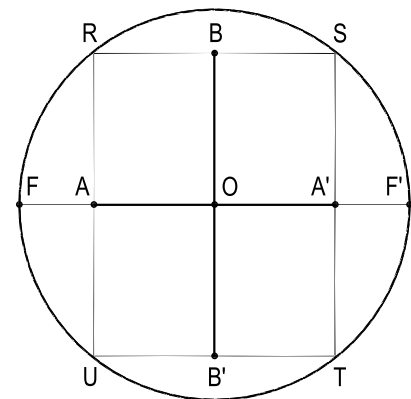


Figura 167

111.3 – Construção das tangentes paralelas a uma reta  $r$  (dados o eixo real  $AA'$ , um dos focos  $F'$  e a reta  $r$ ).

Com diâmetro  $AA'$  constrói-se o círculo principal, ao qual pertencerão as projeções ortogonais  $P_1$  e  $P_2$  do foco  $F'$  sobre as tangentes procuradas (número 108). E, como essas tangentes devem ser paralelas à reta  $r$ ,  $P_1$  e  $P_2$  são obtidos com o auxílio da perpendicular a  $r$ , traçada pelo foco  $F'$ .



Assim, basta traçar a perpendicular, pelo foco  $F'$  à reta dada  $r$ , obtendo, por interseção com o círculo principal, os pontos  $P_1$  e  $P_2$  e construir, por estes pontos, as paralelas  $t_1$  e  $t_2$  a  $r$ , as quais são as tangentes pedidas (Figura 168).

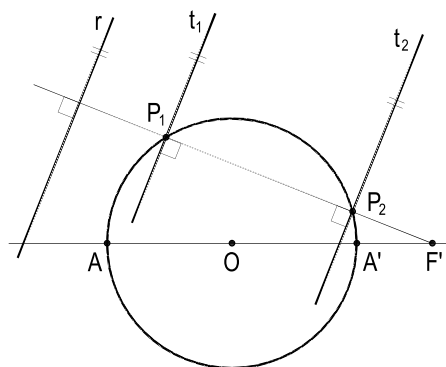


Figura 168

Os pontos de contato, não incluídos na Figura 168, das duas tangentes são determináveis pela aplicação do processo usualmente utilizado (número 104).

Naturalmente, não é toda direção  $r$  que proporciona solução ao problema. De fato, para que exista tangente à hipérbole dada, paralela a  $r$ , é indispensável que a perpendicular traçada por um dos focos a essa reta encontre o círculo principal.

111.4 – Construção das tangentes por um ponto  $J$  exterior (dados o eixo transversal  $AA'$ , um dos focos  $F'$  e o ponto  $J$ ).

Análise:

Sendo  $t_1$  e  $t_2$  as tangentes procuradas, sabe-se que as projeções ortogonais  $P_1$  e  $P_2$  do foco  $F'$  sobre elas pertencem ao círculo principal ( $O$ ,  $a$ ) da hipérbole (número 108).

E, como os triângulos  $JF'P_1$  e  $JF'P_2$  são retângulos (Figura 169), os pontos  $P_1$  e  $P_2$  pertencerão, também, ao círculo de diâmetro  $JF'$ .

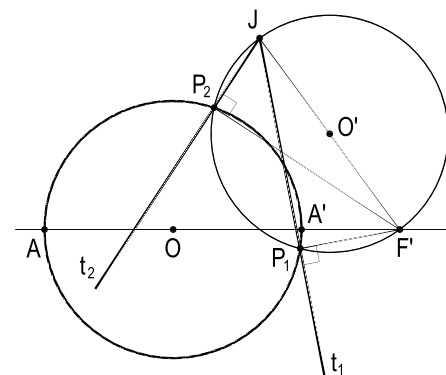


Figura 169

Construção: Traça-se, inicialmente, o círculo principal da hipérbole  $e$ , a seguir, o círculo que tem por diâmetro o segmento  $JF'$ , o qual corta o primeiro segundo os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , por onde passarão as tangentes procuradas  $t_1$  e  $t_2$  (Figura 170).

Assim, para obtê-las basta unir o ponto dado  $J$  a  $P_1$  e a  $P_2$ .

Os pontos de contato dessas duas tangentes, não incluídos na Figura 170, são determináveis pela aplicação do processo usualmente utilizado (número 104).

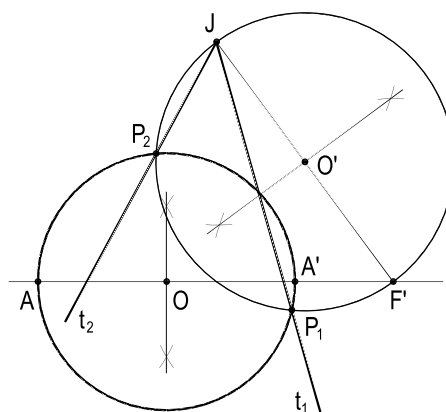


Figura 170

## 112 – Teoremas de Poncelet

1. As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma hipérbole são duas cevianas isogonais do triângulo formado por esse ponto e pelos focos da hipérbole.
2. A reta que une um foco de uma hipérbole a um ponto exterior é a bissetriz do ângulo externo formado pelas retas que unem aquele foco aos pontos de contato das duas tangentes traçadas pelo ponto exterior.

Demonstrações:

1. Consideremos as tangentes  $t$  e  $t'$  de um ponto qualquer  $J$  a uma hipérbole de focos  $F$  e  $F'$  e eixo transversal  $2a$ .

Sendo  $S$  e  $S'$  os simétricos de  $F$  e de  $F'$  em relação a  $t$  e a  $t'$ , respectivamente (Figura 171), temos:

$$JS = JF \quad (1) \quad \text{e} \quad JS' = JF' \quad (2)$$

E, como  $FS'$  e  $F'S$  são raios de cada um dos círculos diretores da hipérbole (número 102), podemos escrever:  $FS' = F'S$  (3)

Das relações (1), (2) e (3) conclui-se a igualdade dos triângulos  $JFS'$  e  $JF'S$  (3º caso) e, conseqüentemente, a igualdade dos ângulos opostos aos lados iguais  $FS'$  e  $F'S$ .

$$\text{Assim, } \widehat{FJS'} = \widehat{S'JF'} \quad \therefore \quad \alpha + \beta - \gamma = \gamma + \beta - \alpha \quad \therefore \quad \alpha - \gamma = \gamma - \alpha$$

$$\therefore \quad 2\alpha = 2\gamma \quad \therefore \quad \alpha = \gamma, \text{ relação que demonstra o primeiro teorema.}$$

2. Além das considerações feitas para o primeiro teorema, incluamos os pontos de contato  $M$  e  $M'$  das tangentes  $t$  e  $t'$ .

Sabe-se que o ponto  $M'$  de contato da tangente  $t'$  pertence à reta formada pelo foco  $F$  e pelo simétrico  $S'$  do outro foco em relação àquela tangente (número 101.3). E que, analogamente, o ponto  $M$  de contato da tangente  $t$  pertence à reta  $F'S$  (Figura 172).

Os triângulos iguais  $JFS'$  e  $JF'S$  permitem escrever:  $\theta = \varphi$  (externos homólogos). (1)

E, da simetria dos pontos  $S'$  e  $F'$  em relação à tangente  $t'$ , ou seja, da igualdade dos triângulos  $JS'M'$  e  $JF'M'$  (Figura 172), vem:  $\theta = \rho$  (2)

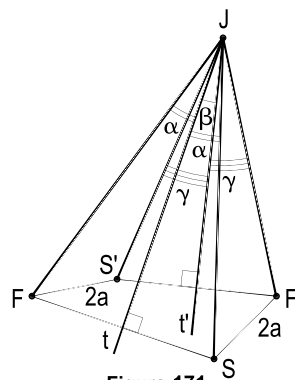


Figura 171

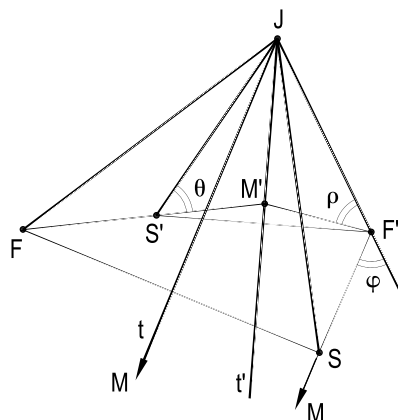


Figura 172

De (1) e (2):  $\varphi = \rho$

Assim, a reta formada pelo foco  $F'$  e pelo ponto  $J$ , comum às tangentes  $t$  e  $t'$  à hipérbole, é a bissetriz do ângulo externo formado pelas retas que unem  $F'$  aos pontos de contato daquelas duas tangentes, como se queria demonstrar.

### 113 – Corolário do primeiro teorema de Poncelet

Dados um ângulo  $t_1 \hat{J} t_2$  e um ponto  $F$  a ele exterior, o lugar geométrico dos focos  $F'$  das hipérbolas que têm um foco fixo  $F$  e que são tangentes a  $t_1$  e a  $t_2$  é a semirreta  $Jw$  isogonal de  $JF$  em relação aos lados do ângulo dado (Figura 173), exceto, naturalmente, o ponto  $J$ .

### 114 – Observações

114.1 – O corolário acima pode ser instituído diretamente.

De fato, sendo  $S_1$  e  $S_2$  os simétricos do foco  $F$  de uma hipérbole em relação a duas tangentes  $t_1$  e  $t_2$ , eles deverão (número 102) pertencer ao círculo diretor do outro foco  $F'$ , em estudo.

Considerando o triângulo  $FS_1S_2$  (Figura 174), porque  $t_1$  e  $t_2$  são mediatrizes de dois de seus lados, seu circuncentro  $J$  há de pertencer também à mediatriz  $w$  de seu terceiro lado  $S_1S_2$ .

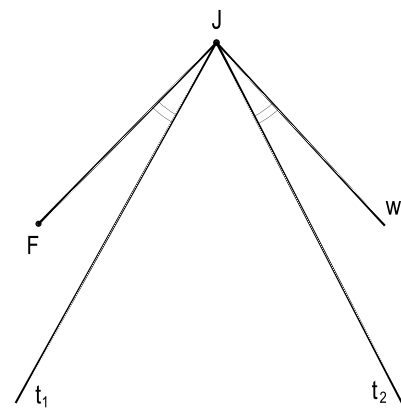


Figura 173

Como ângulo central,  $\alpha$ , subtendendo a metade do arco a que corresponde o ângulo inscrito  $\beta$ , é igual a este ângulo  $\beta$ .

Mas  $\beta$  e  $\gamma$  são iguais por terem lados respectivamente perpendiculares.

Assim, são iguais  $\alpha$  e  $\gamma$ , o que comprova o corolário em estudo.

114.2 – Porque os teoremas de Poncelet são válidos tanto para a elipse quanto para a hipérbole, pode-se concluir que, dadas duas retas secantes  $t$  e  $t'$  e um ponto  $F$  exterior, todas as elipses e hipérbolas tangentes a  $t$  e a  $t'$  (tendo um foco fixo em  $F$ ) têm seu segundo foco  $F'$  sobre a reta  $ww'$ , isogonal da reta  $JF$  (Figura 175) em relação a um dos ângulos formados pelas tangentes, excluído, é claro, o ponto  $J$ .

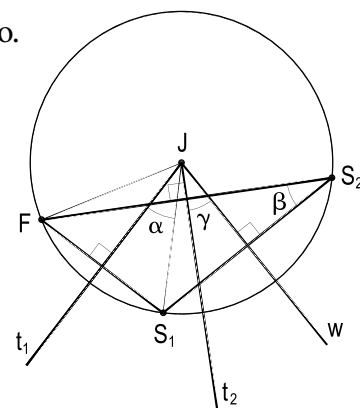


Figura 174

E mais: para que se obtenha elipse, deve-se tomar os focos  $F'$  sobre a semirreta  $Jw'$  situada na mesma região do plano (em relação às tangentes) em que se encontra o foco dado  $F$ , enquanto que, para que se obtenha hipérbolas, deve-se tomar os focos  $F'$  sobre a semirreta  $Jw$  oposta (Figura 175).

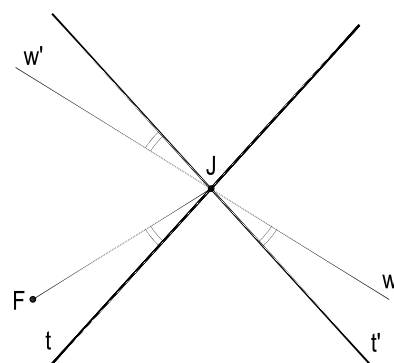


Figura 175

### 115 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma hipérbole é o círculo concêntrico com ela, tendo raio igual ao segundo cateto de um triângulo retângulo cuja hipotenusa e cujo primeiro cateto são respectivamente iguais aos semieixos real e imaginário.

Demonstração: Consideremos uma hipérbole de focos  $F$  e  $F'$ , eixos  $2a$  e  $2b$  e distância focal  $2c$ . Sendo  $J$  um ponto do lugar procurado, isto é, tal que as tangentes  $t$  e  $t'$  de  $J$  à hipérbole sejam perpendiculares e  $S'$  o simétrico do foco  $F'$  em relação à tangente  $t'$  (Figura 176), o primeiro teorema de Poncelet fornece:

$$\alpha = \beta \quad (1)$$

E, da simetria existente entre  $F'$  e  $S'$  em relação a  $t'$ , vem:

$$\beta = \gamma \quad (2) \quad \text{e} \quad JS' = JF' \quad (3)$$

$$\text{Comparando as relações (1) e (2), temos: } \gamma = \alpha \quad (4)$$

E como, por hipótese,  $\gamma + \rho = 90^\circ$ , a relação (4) permite escrever:  $\alpha + \rho = 90^\circ$ .

Assim, o triângulo  $JFS'$  é retângulo em  $J$  (Figura 176).

E, porque sua hipotenusa  $FS'$  é um raio do círculo diretor relativo ao foco  $F$ , temos:

$$JF^2 + JS'^2 = (2a)^2$$

Aplicando a relação (3), vem:

$$JF^2 + JF'^2 = (2a)^2$$

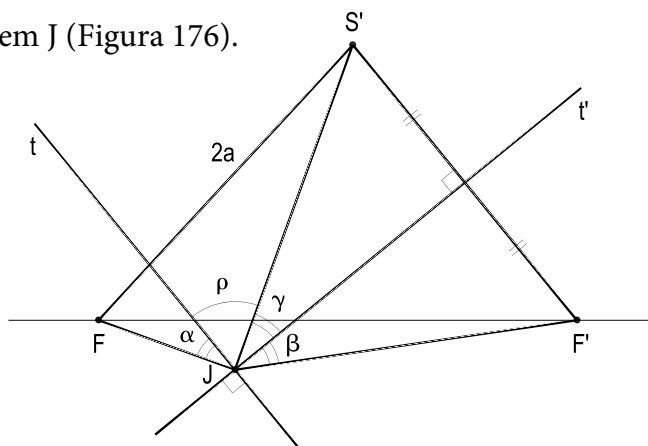


Figura 176

Mas, então, se a soma dos quadrados das distâncias do ponto J em estudo a dois pontos fixos F e F' é constante, o lugar desses pontos é um círculo (*Geometria Plana*, número 204.1) que tem por centro o ponto O, médio de FF' (centro da hipérbole), e raio OJ dado pela expressão:

$$OJ = \frac{1}{2} \sqrt{2(JF^2 + JF'^2) - FF'^2}$$

$$OJ^2 = \frac{1}{4} [2(JF^2 + JF'^2) - FF'^2] = \frac{1}{4} [2(2a)^2 - (2c)^2]$$

$$OJ^2 = \frac{1}{4} (8a^2 - 4c^2) = \frac{4}{4} (2a^2 - c^2)$$

$$OJ^2 = 2a^2 - c^2 = a^2 - (c^2 - a^2)$$

Mas como (número 93.3)  $c^2 - a^2 = b^2$ , temos:  $OJ^2 = a^2 - b^2$

Assim, o lugar procurado é o círculo concêntrico com a hipérbole, tendo raio r igual ao segundo cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa a, cujo primeiro cateto é b.

### 116 – Círculo de Monge

O círculo, lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares a uma hipérbole, é denominado círculo ortótico da hipérbole (Figura 177) ou, como homenagem ao geômetra francês Gaspard Monge, seu criador, círculo de Monge.

Naturalmente, só existe o círculo órtico para a hipérbole, quando ela tem o eixo real maior que o imaginário, em atenção a que o valor acima (número 115) instituído seja maior que zero.

Aliás, no caso particular em que a hipérbole é equilátera, apenas seu centro é capaz de enviar, à curva, tangentes perpendiculares (Figura 178). Porque o valor instituído para o raio do círculo OJ (número 115), neste caso, se anula. E tais tangentes, como adiante (número 125) se verá, são as duas assíntotas a essa hipérbole.

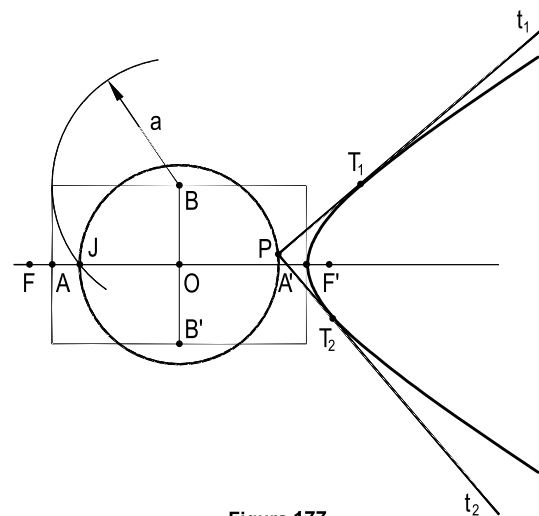


Figura 177

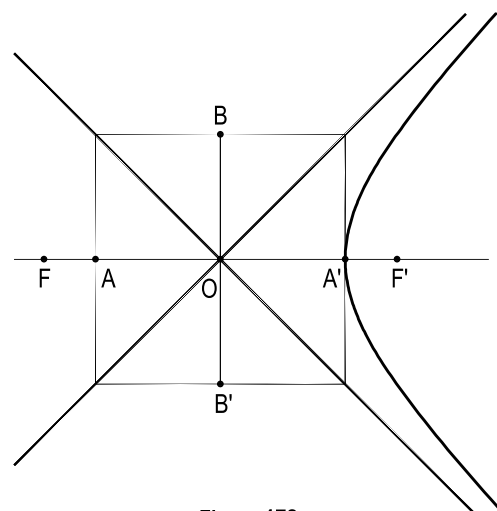


Figura 178

## 117 – Teorema

O lugar geométrico dos centros de todos os círculos tangentes a dois círculos exteriores e diferentes é constituído por duas hipérbolas homofocais, tendo por focos os centros dos dois círculos e eixos reais iguais à soma ou à diferença dos raios dos dois círculos.

Demonstração: Consideremos dois círculos  $(O, R)$  e  $(O', R')$  segundo a hipótese, isto é, diferentes e exteriores um ao outro.

Para estudar o lugar geométrico dos centros de todos os círculos tangentes a esses dois, observemos que eles podem tangenciar os dois círculos dados exteriormente (Figura 179), interiormente (Figura 180), ou externamente a um e internamente ao outro (Figuras 181 e 182).

Vejamos, para cada uma das quatro hipóteses, como se comportam os pontos  $M$ , centros desses círculos  $(M, r)$ , procurados.

1. O círculo  $(M, r)$  é tangente exteriormente aos dois dados (Figura 179).

$$\text{Temos: } MO - MO' = (R + r) - (R' + r)$$

$$\therefore MO - MO' = R - R' \text{ (constante)}$$

2. O círculo  $(M, r)$  é tangente interiormente aos dois dados (Figura 180).

$$\text{Temos: } MO - MO' = (r - R) - (r - R')$$

$$\therefore MO - MO' = -R + R'$$

$$\therefore MO' - MO = R' - R \text{ (constante)}$$

3. O círculo  $(M, r)$  é tangente externamente ao maior dos dados e internamente ao menor (Figura 181).

$$\text{Temos: } MO - MO' = (r + R) - (r - R')$$

$$\therefore MO - MO' = R + R' \text{ (constante)}$$

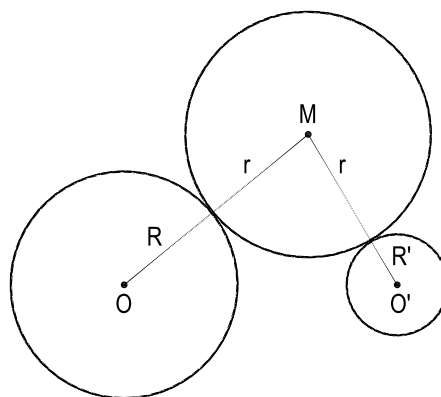


Figura 179

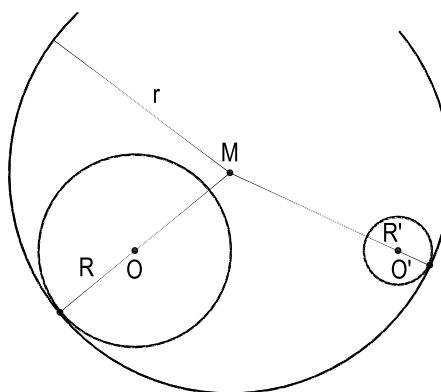


Figura 180

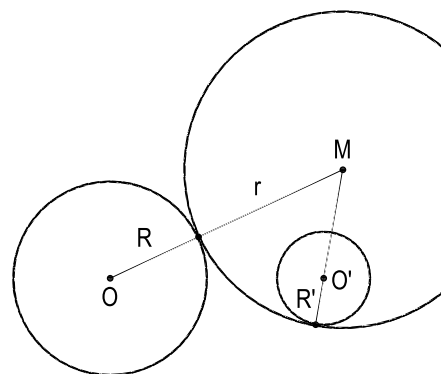


Figura 181

4. Ao contrário,  $(M, r)$  é tangente internamente ao maior e externamente ao menor.

$$\text{Temos: } MO - MO' = (r - R) - (r + R')$$

$$\therefore MO - MO' = -R - R'$$

$$\therefore MO' - MO = R + R' \text{ (constante)}$$

Assim, por serem sempre constantes as diferenças entre as distâncias dos pontos  $M$ , em estudo, aos pontos fixos  $O$  e  $O'$ , mas com valores diferentes, para cada hipótese, conclui-se que o lugar geométrico procurado consiste em um par de hipérbolas, todas tendo por focos os centros dos dois círculos dados e por eixos reais a diferença ou a soma dos raios dos dois círculos dados, tal como se queria demonstrar.

### 118 – Observação

No caso, contrariando a hipótese de os círculos exteriores serem iguais, os centros de todos os círculos tangentes aos dois, seja externamente (Figura 183) ou internamente (Figura 184), têm de pertencer à mediatriz do segmento formado pelos centros  $O$  e  $O'$  dos dois círculos dados, para proporcionarem segmentos iguais.

$$MO = MO' = r + R \quad (\text{Figura 183})$$

$$\text{ou } MO = MO' = r - R \quad (\text{Figura 184})$$

É claro que essa mediatriz bem pode ser entendida como as degenerações das hipérbolas antes estudadas (número 117).

### 119 – Determinação rigorosa dos pontos de corte de uma reta dada com uma hipérbole dada por seus focos $F$ e $F'$ e por seu eixo real $2a$

Análise: Seja  $(F, 2a)$  um dos círculos diretores da hipérbole dada. Os pontos procurados  $M$  e  $N$ , comuns à reta  $r$  e à hipérbole, são (número 103.2) centros de dois círculos que, passando pelo foco  $F'$ , tangenciam o círculo diretor considerado (Figura 185).

Assim, tudo reside em determinar, sobre a reta  $r$ , os centros  $M$  e  $N$  desses dois círculos.

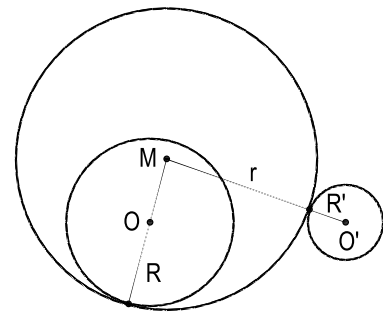


Figura 182

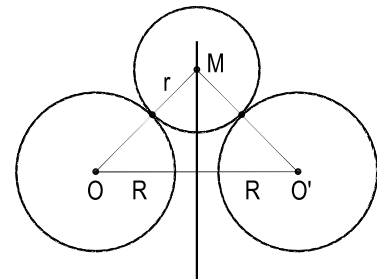


Figura 183

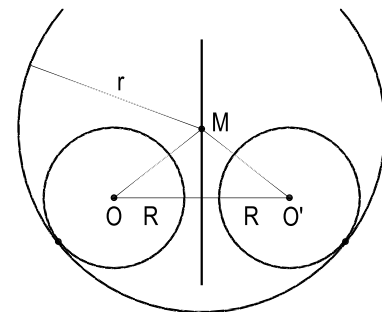


Figura 184

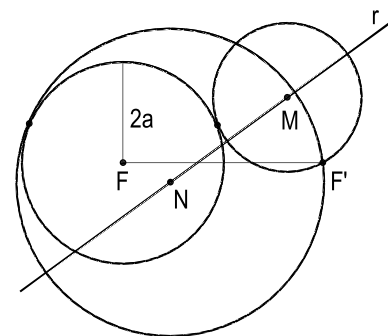


Figura 185

Porque a reta dada  $r$  servirá de suporte a um diâmetro do círculo  $M$ , tal círculo passará também pelo ponto  $J$ , simétrico de  $F'$  em relação a  $r$  (Figura 186).

Assim, se considerarmos um terceiro círculo, também pertencente aos pontos  $F'$  e  $J$  e secante ao diretor, poderemos determinar o centro radical  $CR$  dos três círculos e, a seguir, o eixo radical  $CRt$  entre o diretor e o círculo  $M$ , uma vez que tal eixo deve ser tangente ao diretor (Figura 186).

E, obtido o ponto  $T$  de contato dos dois círculos, o ponto  $M$  procurado será proveniente da interseção, com  $r$ , da reta  $FT$  (Figura 186).

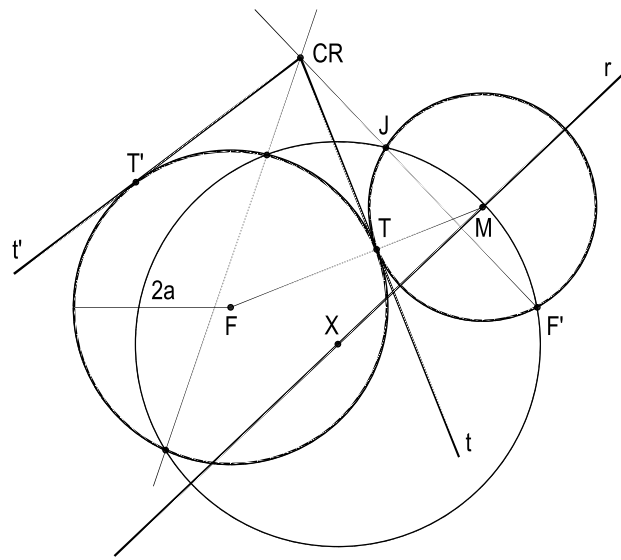


Figura 186

Construção: Determina-se inicialmente o círculo diretor ( $F, 2a$ ) e o simétrico  $J$  de  $F'$  em relação a  $r$  e, com centro num ponto  $X$  qualquer de  $r$ , traça-se um círculo auxiliar, pertencente aos pontos  $F'$  e  $J$  e secante a  $r$  (Figura 187), produzindo dois pontos de corte 1 e 2.

Como a reta formada por esses dois pontos de corte é o eixo radical entre os dois círculos traçados e como a reta  $F'J$  é o eixo radical entre o círculo  $X$ , auxiliar, e o procurado, a interseção dessas duas retas produz o centro radical  $CR$  dos três círculos em jogo (Figura 187).

Obtido  $CR$ , determina-se, com rigor, os pontos de contato  $T$  e  $T'$  das tangentes do centro radical  $CR$  ao círculo diretor ( $F, 2a$ ).

Finalmente, as retas  $FT$  e  $FT'$  cortam  $r$  nos pontos  $M$  e  $N$  procurados (Figura 187).

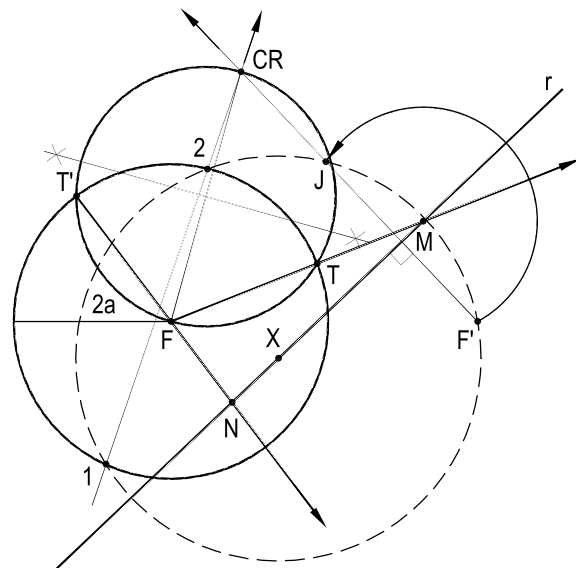


Figura 187



# CAPÍTULO VII

## ASSÍNTOTAS DA HIPÉRBOLE

### 120 – Definições

Quando uma reta tangente a uma curva tem seu ponto de contato rejeitado ao infinito, essa tangente é denominada assíntota da curva.

### 121 – Teorema

A hipérbole possui duas assíntotas.

Demonstração: Para efeito de análise, consideremos uma tangente genérica  $t$  a uma hipérbole de focos  $F$  e  $F'$  e eixo transverso  $2a$ . Sabe-se que o simétrico  $S$  do foco  $F'$  em relação àquela tangente pertence ao círculo diretor  $(F, 2a)$  relativo ao outro foco (número 102) e que ponto de contato  $M$  daquela tangente é (número 101.3) o ponto comum a ela e à reta  $FS$  (Figura 188).

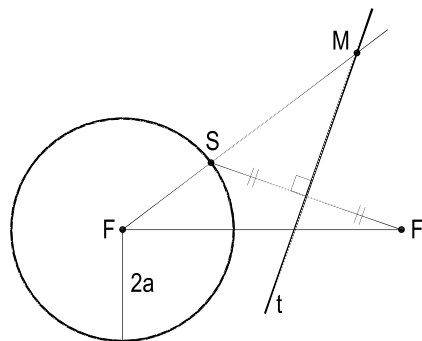


Figura 188

Para que exista assíntota à hipérbole é necessário e suficiente que o ponto  $M$  seja impróprio, o que só se conseguirá se o ângulo  $FSF'$  for reto.

Pois, para examinar a existência de um ponto do círculo diretor  $(F, 2a)$  que aviste o segmento  $FF'$  sob um ângulo reto, tracemos o círculo de diâmetro  $FF'$ , lugar geométrico dos pontos capazes dessa propriedade (*Geometria Plana*, número 128.2).

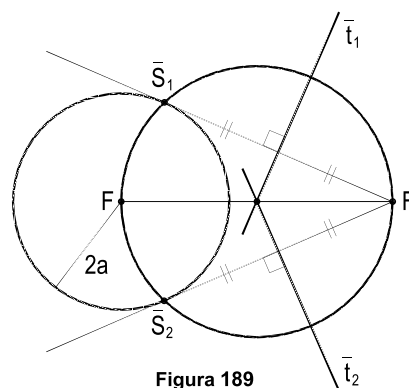


Figura 189

Porque  $F'$  é necessariamente exterior ao círculo diretor  $(F, 2a)$  (número 89), os dois círculos considerados são secantes (Figura 189), existindo, pois, dois pontos  $\bar{S}_1$  e  $\bar{S}_2$ , segundo a condição imposta.

Consequentemente, existem duas e apenas duas assíntotas: as mediatrizes  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  dos segmentos  $F'\bar{S}_1$  e  $F'\bar{S}_2$  (Figura 189).

## 122 – Observações

122.1 – Os simétricos  $\bar{S}_1\bar{S}_2$  do foco  $F'$  em relação às assíntotas (Figura 189) são os pontos de contato das tangentes traçadas de  $F'$  ao círculo diretor relativo ao foco  $F$ .

122.2 – Os pontos pertencentes ao menor arco  $\bar{S}_1\bar{S}_2$  (Figura 189) são simétricos de  $F'$  em relação às tangentes ao ramo relativo ao foco  $F'$  e os pontos pertencentes ao maior arco  $\bar{S}_1\bar{S}_2$  são simétricos de  $F'$  em relação às tangentes ao ramo relativo ao foco  $F$  (número 106.1).

## 123 – Propriedades

123.1 – As assíntotas passam pelo centro da hipérbole.

Porque são mediatrizes de duas cordas  $F'\bar{S}_1$  e  $F'\bar{S}_2$  do círculo que tem por diâmetro o segmento  $FF'$  (Figura 190).

123.2 – Os eixos da hipérbole pertencem às bissetrizes dos ângulos formados pelas assíntotas.

Porque (Figura 190) as assíntotas são simétricas em relação ao eixo transverso e contêm o centro da hipérbole.

123.3 – A distância de um foco a uma assíntota é igual ao semieixo imaginário.

Porque o triângulo retângulo  $F'OP'$  é semelhante ao triângulo  $F'\bar{S}_1$  na razão  $(\frac{1}{2})$  (Figura 191).

Assim, como  $OF' = c$  e  $OP' = a$ , vem:  $F'P' = b$

123.4 – As assíntotas são os suportes das diagonais do retângulo construído sobre os eixos da hipérbole.

Sendo  $\alpha$  o ângulo que as assíntotas formam com o eixo real (Figura 192), o triângulo  $FOP$  dá:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad (1)$$

Sendo  $\beta$  o ângulo que as diagonais do retângulo  $CDD'C'$  (construído sobre os eixos) formam com o eixo real (Figura 193), o triângulo  $OAC$  dá:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), vem  $\alpha = \beta$ .

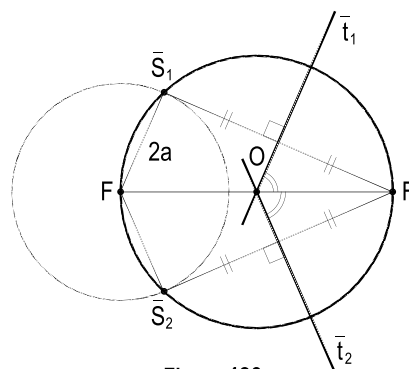


Figura 190

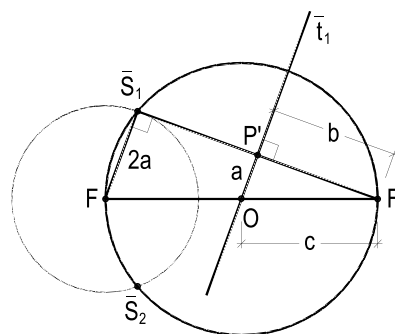


Figura 191

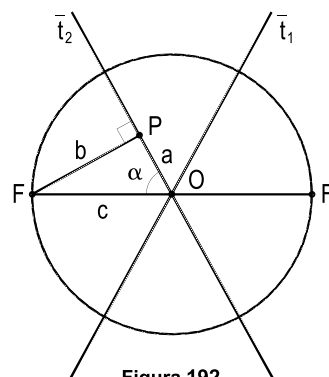


Figura 192

Mas, então, se as assíntotas passam pelo centro da hipérbole, com a mesma inclinação em relação ao eixo real que as diagonais do retângulo CDD'C' (Figura 193), elas coincidem, respectivamente, com as retas suportes das diagonais desse retângulo.

123.5 – O cosseno do ângulo que a assíntota forma com o eixo real é igual ao inverso da excentricidade da hipérbole.

De fato, temos (Figura 193):

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \quad \therefore \quad \boxed{\cos \beta = \frac{1}{e}}$$

### 124 – Observação

Todas as propriedades apresentadas para as tangentes à hipérbole são, evidentemente, válidas para as assíntotas.

Assim, por exemplo, temos que o simétrico de um foco em relação a uma assíntota pertence ao círculo diretor relativo ao outro foco (números 102 e 122.1) e que as projeções ortogonais dos focos sobre as assíntotas pertencem (Figura 194) ao círculo principal da hipérbole (números 108 e 123.3).

### 125 – Hipérbole equilátera

Do que foi visto, resultam, para a hipérbole equilátera, as seguintes propriedades:

125.1 – As assíntotas são perpendiculares entre si (Figura 195).

125.2 – As assíntotas formam 45° com cada um dos dois eixos da hipérbole.

125.3 – As distâncias dos focos às assíntotas são iguais aos semieixos, iguais, da hipérbole (Figura 195).

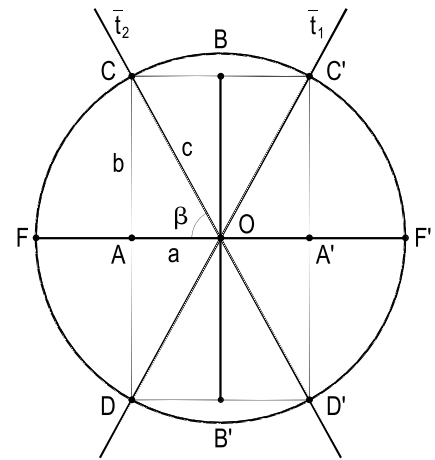


Figura 193

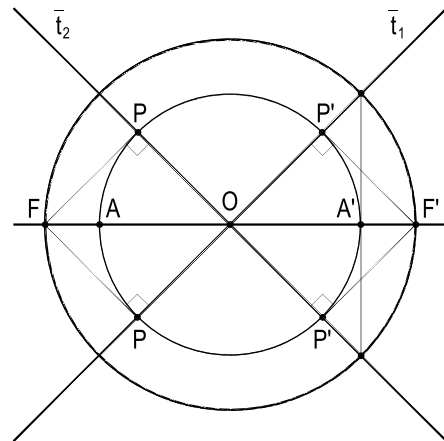


Figura 194

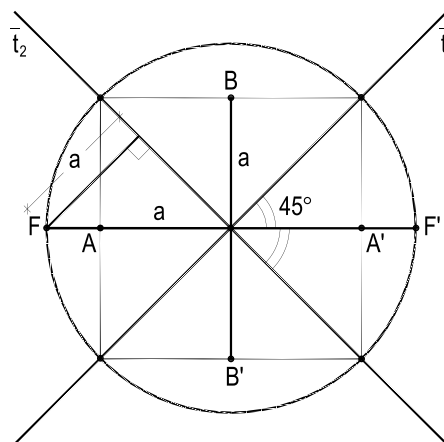


Figura 195

## 126 – Hipérboles conjugadas

Por definição, duas hipérboles são ditas conjugadas quando o eixo real de uma é o imaginário da outra e reciprocamente (Figura 196).

É claro, então, que duas hipérboles conjugadas possuem as mesmas assíntotas e a mesma distância focal. E mais, os focos de uma das hipérboles podem ser considerados como resultantes de uma rotação de  $90^\circ$ , em torno do centro comum, dos focos da outra (Figura 196).

Como caso particular notável, vale observar que, dada uma hipérbole equilátera, a que lhe é conjugada é também equilátera e igual à dada, podendo inclusive ser considerada como proveniente de uma rotação de  $90^\circ$  da primeira, em torno do centro comum às duas (Figura 197).

## 127 – Teorema

Os segmentos formados sobre uma reta paralela a um dos eixos entre um ponto corrente e as assíntotas têm por média geométrica o semieixo considerado.

Demonstração: Consideremos uma hipérbole referida a um sistema cartesiano em que os eixos da curva sejam os próprios coordenados, os focos pertencendo ao das abscissas e, por um ponto  $M$  qualquer da curva, tracemos as paralelas  $r$  e  $s$ , respectivamente aos eixos real e imaginário, obtendo, sobre as assíntotas, respectivamente, os pontos  $P$  e  $Q$  (Figura 198) e  $K$  e  $L$  (Figura 199).

Deseja-se instituir as relações:

$$MP \cdot MQ = a^2$$

$$MK \cdot ML = b^2$$

Façamos  $PR = RQ = m$  (Figura 198)

e  $KJ = JL = n$  (Figura 199).

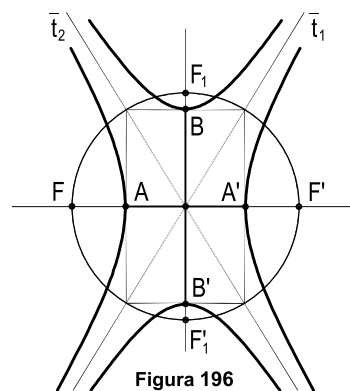


Figura 196

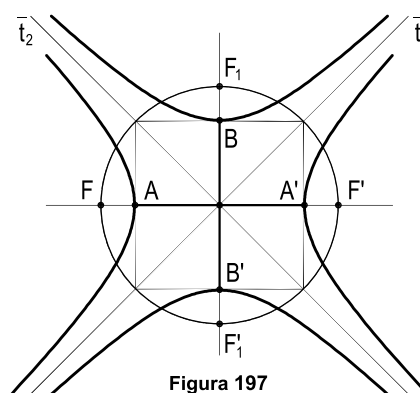


Figura 197

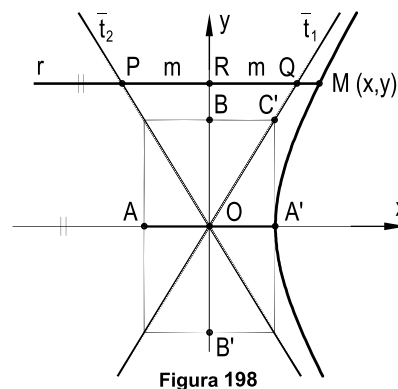


Figura 198

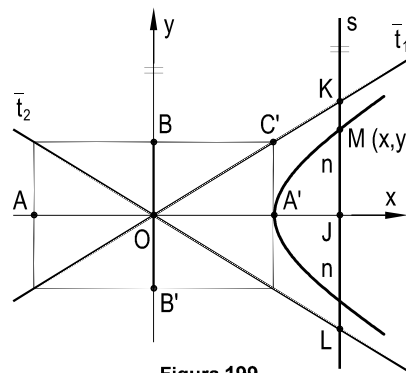


Figura 199

Os triângulos ORQ (Figura 198) e OJK (Figura 199), semelhantes a OBC', fornecem:

$$\frac{m}{y} = \frac{a}{b} \quad \therefore \quad m = \frac{ay}{b}$$

$$\frac{n}{x} = \frac{b}{a} \quad \therefore \quad n = \frac{bx}{a}$$

Assim, temos:

$$MP \cdot MQ = (x + m)(x - m) = x^2 - m^2$$

$$e \quad MK \cdot ML = (n - y)(n + y) = n^2 - y^2$$

$$\therefore \quad MP \cdot MQ = x^2 - \left(\frac{ay}{b}\right)^2 = \frac{b^2 x^2 - a^2 y^2}{b^2}$$

$$e \quad MK \cdot ML = \left(\frac{bx}{a}\right)^2 - y^2 = \frac{b^2 x^2 - a^2 y^2}{a^2}$$

Mas, como M é ponto da hipérbole, vale (número 95) escrever:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\text{Logo: } MP \cdot MQ = \frac{a^2 b^2}{b^2} \quad \therefore \quad \boxed{MP \cdot MQ = a^2}$$

$$e \quad MK \cdot ML = \frac{a^2 b^2}{a^2} \quad \therefore \quad \boxed{MK \cdot ML = b^2}$$

Estas duas relações provam o teorema.

## 128 – Determinação dos eixos e dos focos de uma hipérbole dada pelas assíntotas e por um ponto corrente

Dada uma hipérbole por suas duas assíntotas  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  e por um ponto corrente M, pede-se determinar seus eixos e seus focos.

Para tanto, traça-se, inicialmente, as bissetrizes dos ângulos formados pelas assíntotas que, como se sabe (número 123.2), são os suportes dos eixos (Figuras 200 e 201).

Traça-se, a seguir, pelo ponto M, a paralela a um dos eixos, obtendo, por interseção com as assíntotas, os pontos P e Q (Figura 200) ou K e L (Figura 201).

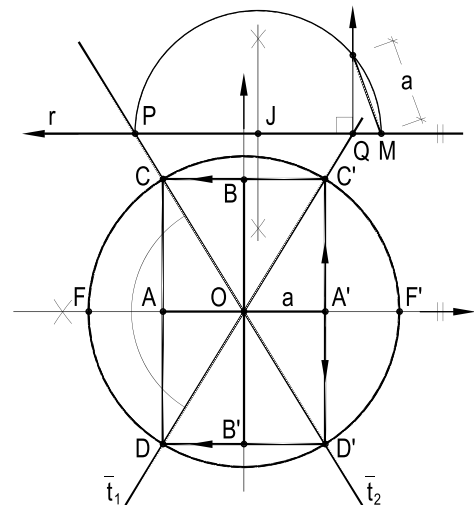


Figura 200

Constrói-se, então, a média geométrica entre os segmentos MP e MQ (Figura 200), obtendo-se o valor a do semieixo real (número 127) ou a média geométrica entre os segmentos MK e ML (Figura 201), obtendo-se o valor b do semieixo imaginário (número 127).

Aplicando, em posição, o valor do semieixo obtido e construindo o retângulo CC'D'D, apoiado pelos vértices nas assíntotas, e traçando o círculo circunscrito a esse retângulo (Figuras 200 e 201), ficam determinados os eixos AA' (real) e BB' (imaginário) e os focos F e F' da hipérbole dada.

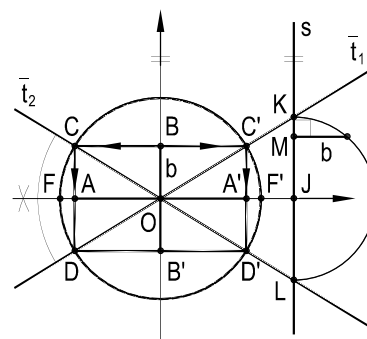


Figura 201

### 129 – Determinação do eixo imaginário e dos focos a partir do eixo real e de um ponto corrente

Análise: Consideremos as assíntotas  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  de uma hipérbole de eixo real AA', bem como a reta MQP, paralela a AA', traçada por um ponto M da curva (Figura 202).

Como a média geométrica entre os segmentos MP e MQ é igual ao semieixo real a da hipérbole (número 127), o segmento MZ tangente ao círculo de diâmetro PQ será igual àquele semieixo (*Geometria Plana*, número 239).

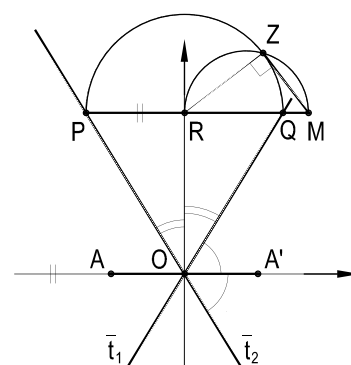


Figura 202

E, porque o ângulo MZR é reto (Figura 202), o ponto Z pertencerá, também, ao círculo de diâmetro MR.

Construção: Dados o eixo real AA' e o ponto corrente M, traça-se, inicialmente, a mediatriz de AA' que serve de suporte ao eixo imaginário, bem como a paralela r, por M, a AA' (Figura 203), obtendo-se, por interseção, o ponto R.

Constrói-se, então, o semicírculo de diâmetro MR e aplica-se a corda MZ igual ao semieixo real.

Com centro em R e raio RZ, descreve-se o círculo que produz, na reta r, os pontos P e Q de passagem das assíntotas (Figura 203).

E, obtidas as assíntotas, basta construir o retângulo CC'D'D e o círculo a ele circunscrito (Figura 203), para determinar o eixo imaginário BB' e os focos F e F' procurados.

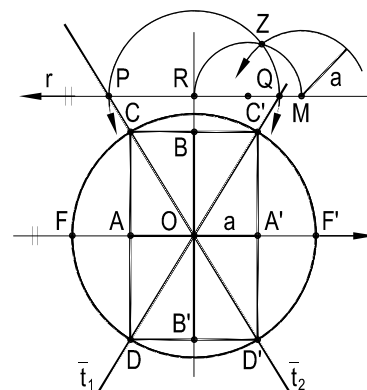


Figura 203

### 130 – Determinação do eixo real e dos focos a partir do eixo imaginário e de um ponto corrente

Análise: Consideremos as assíntotas  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  de uma hipérbole de eixo imaginário  $BB'$ , bem como a reta  $KML$ , paralela a  $BB'$ , traçada por um ponto  $M$  da curva (Figura 204).

O segmento  $MZ$ , por representar a média geométrica entre  $MK$  e  $ML$  (*Geometria Plana*, número 197.2), será igual ao semieixo imaginário (número 127).

Construção: Dados o eixo imaginário  $BB'$  e o ponto corrente  $M$ , traça-se, inicialmente, a mediatriz de  $BB'$ , que serve de suporte ao eixo real, bem como a reta  $s$ , pertencente a  $M$  e paralela a  $BB'$  (Figura 205), obtendo-se, por interseção, o ponto  $J$ .

Constrói-se, então, o segmento  $MZ$ , perpendicular à reta  $s$  e igual ao semieixo imaginário, e descreve-se o círculo de centro  $J$  e raio  $JZ$  que produz, na reta  $s$ , os pontos  $K$  e  $L$  de passagem das assíntotas (Figura 205).

E, obtidas as assíntotas, basta construir o retângulo  $CC'D'D$  e o círculo a ele circunscrito, para determinar o eixo real  $AA'$  e os focos  $F$  e  $F'$  procurados (Figura 205).

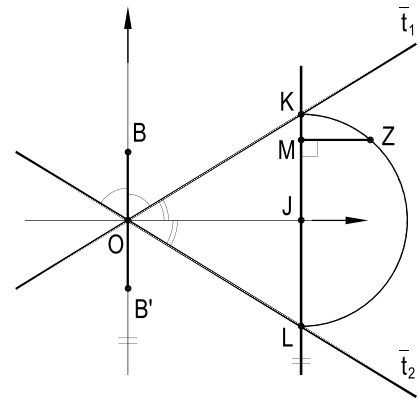


Figura 204

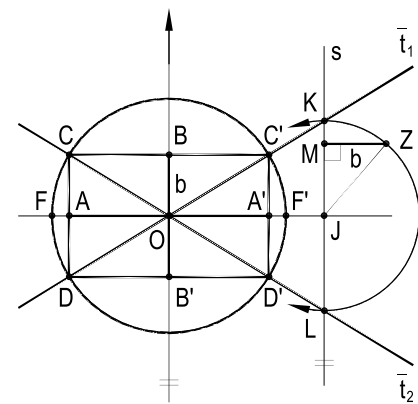


Figura 205

### 131 – Teorema

O produto das distâncias de um ponto qualquer de uma hipérbole às assíntotas é constante.

Demonstração: Consideremos uma hipérbole de eixos  $AA'$  e  $BB'$  e assíntotas  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  e tracemos, por um ponto  $M$  qualquer da curva, as perpendiculares  $MQP$ ,  $MG$  e  $MH$ , respectivamente ao eixo imaginário e às assíntotas (Figura 206).

Por terem lados respectivamente perpendiculares, temos:

$$\alpha = \gamma \quad (1) \quad \text{e} \quad \beta = \varphi \quad (2)$$

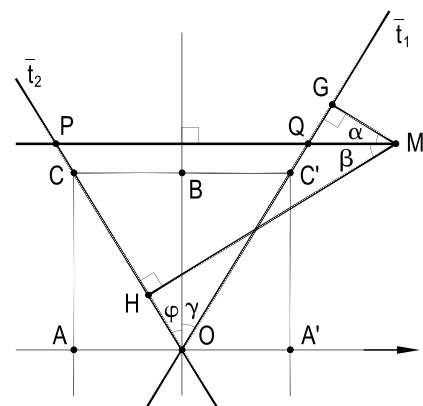


Figura 206

Porque as assíntotas são simétricas em relação ao eixo imaginário, vem:

$$\gamma = \varphi \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) permitem escrever:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

E, então, concluir que os triângulos MGQ e MHP são semelhantes ao triângulo OBC'.

Pois, fazendo  $MG = d_1$  e  $MH = d_2$ , aquelas semelhanças fornecem:

$$\frac{MG}{MQ} = \frac{OB}{OC'} \quad \therefore \quad \frac{d_1}{MQ} = \frac{b}{c} \quad (4)$$

$$\frac{MH}{MP} = \frac{OB}{OC'} \quad \therefore \quad \frac{d_2}{MP} = \frac{b}{c} \quad (5)$$

Multiplicando, membro a membro, as relações (4) e (5), temos:

$$\frac{d_1 d_2}{MP \cdot MQ} = \frac{b^2}{c^2} \quad \therefore \quad d_1 d_2 = MP \cdot MQ \cdot \frac{b^2}{c^2}$$

E como (número 127),  $MP \cdot MQ = a^2$ :

$$d_1 d_2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}$$

Então, o produto das distâncias de um ponto qualquer de uma hipérbole às assíntotas é constante, como se queria demonstrar.

### 132 – Teorema

Uma hipérbole e suas assíntotas determinam, sobre uma secante qualquer, três segmentos consecutivos, sendo iguais o primeiro e o terceiro.

Demonstração: Sendo  $r$  uma secante genérica a uma hipérbole, designemos por  $M$  e  $M'$  os pontos em que ela encontra a curva e por  $X$  e  $X'$  os pontos segundo os quais ela corta as assíntotas  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  dessa hipérbole.

Deseja-se provar a igualdade dos segmentos  $XM$  e  $X'M'$  formados entre a curva e cada assíntota, quer a secante corte apenas um dos ramos (Figura 207), quer ela corte os dois ramos (Figura 208) da hipérbole.

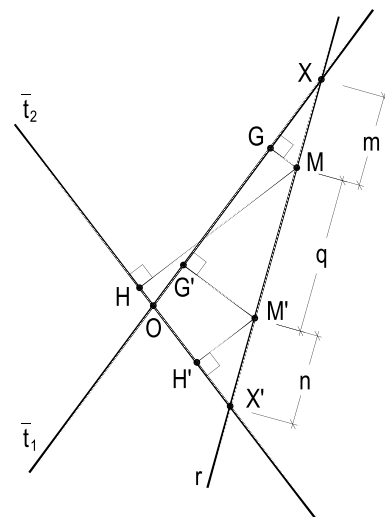


Figura 207



Estudemos, em conjunto, as duas hipóteses. Para tanto, consideremos as perpendiculares  $MG$ ,  $MH$ ,  $M'G'$  e  $M'H'$  às assíntotas e os triângulos retângulos  $XGM$ ,  $XG'M'$ ,  $X'H'M'$  e  $X'HM$  (Figuras 207 e 208).

Das evidentes semelhanças existentes entre os dois primeiros e os dois últimos, resultam as seguintes relações:

$$\frac{XM}{XM'} = \frac{MG}{M'G'} \quad e \quad \frac{X'M}{X'M'} = \frac{MH}{M'H'}$$

que, multiplicadas membro a membro, dão:

$$\frac{XM \cdot X'M}{XM' \cdot X'M'} = \frac{MG \cdot MH}{M'G' \cdot M'H'}$$

Mas como (número 131)  $MG \cdot MH = M'G' \cdot M'H'$ , temos:

$$\frac{XM \cdot X'M}{XM' \cdot X'M'} = 1 \quad \therefore \quad XM \cdot X'M = XM' \cdot X'M'$$

Ou seja,  $m \cdot (q + n) = (q + m) n$  (Figura 207).

$$\therefore \quad mq + mn = qn + mn \quad \therefore \quad mq = qn \quad \therefore \quad m = n$$

$$\therefore \quad \text{ou seja, } \boxed{XM = X'M'} \quad (\text{Figura 207})$$

$$\text{Analogamente, } \boxed{XM' = X'M} \quad (\text{Figura 208})$$

Então, uma hipérbole e suas assíntotas determinam, sobre uma secante qualquer, três segmentos consecutivos, sendo iguais o primeiro e o terceiro, como se queria demonstrar.

### 133 – Corolário

O ponto de contato de uma tangente genérica a uma hipérbole é o ponto médio do segmento limitado sobre a tangente pelas assíntotas.

Porque, sendo a tangente  $t$  a posição limite ocupada por uma secante  $XX'$  à hipérbole, quando se aproximam os pontos  $M$  e  $M'$  que ela tem em comum com a curva, dos três segmentos  $XM$ ,  $MM'$  e  $M'X'$ , anulando-se o central (Figura 209), restam apenas o primeiro e o último, iguais.

Ou seja, o ponto  $\bar{M}$  de contato da tangente genérica  $t$  é o médio do segmento  $\bar{X}\bar{X}'$  (Figura 209).

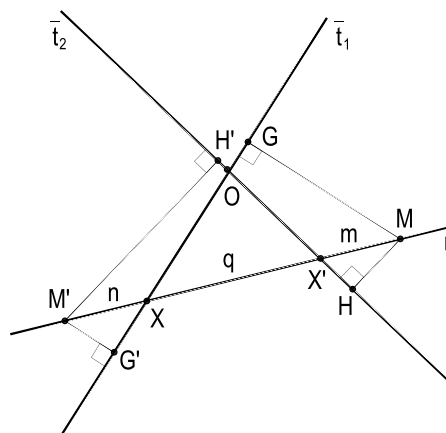


Figura 208

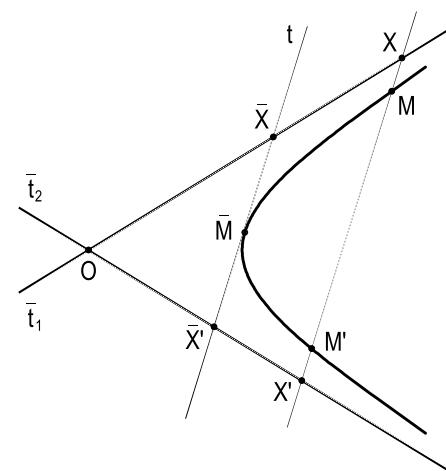


Figura 209

### 134 – Construção direta da hipérbole a partir das assíntotas e de um ponto corrente

Sendo dadas as duas assíntotas  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  e um ponto corrente  $M$  de uma hipérbole, para construir diretamente a curva, isto é, sem determinar seus eixos nem seus focos, basta traçar, pelo ponto dado  $M$ , uma série de transversais às assíntotas, e, sobre cada uma delas, aplicar, a partir da segunda assíntota atingida, um segmento igual ao que fica limitado, sobre as transversais, entre  $M$  e a primeira assíntota (Figura 210).

Assim, por exemplo, com a primeira transversal  $r_1$ , repetindo-se o valor do segmento formado  $MX_1$ , a partir do corte na segunda assíntota, obtém-se o ponto  $M_1$  da hipérbole.

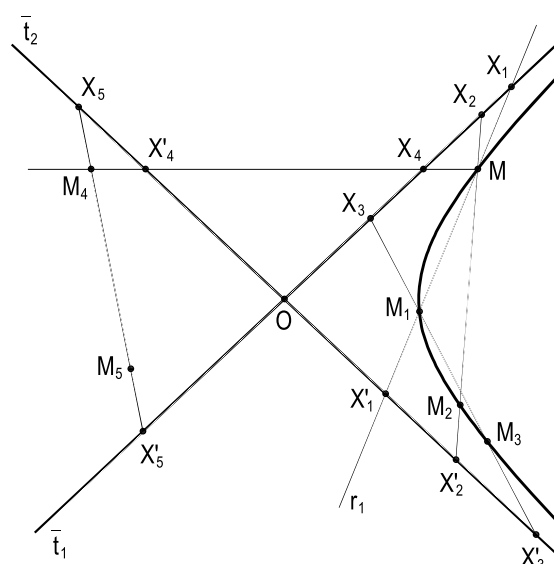


Figura 210

Naturalmente (número 132), o processo produz, a partir do ponto dado  $M$ , pontos dos dois ramos da hipérbole.

É claro, ainda, que, pelos novos pontos correntes obtidos, podem ser enviadas outras transversais às assíntotas, ampliando-se a quantidade de pontos da curva (Figura 210).

### 135 – Construção da tangente num ponto corrente $M$ , dadas as assíntotas e o ponto $M$

Dadas as duas assíntotas  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  e um ponto corrente  $M$  de uma hipérbole, para construir a tangente à curva, em  $M$ , basta determinar, dentre as retas que passam por  $M$ , aquela que limite, entre as assíntotas, um segmento  $XY$ , do qual  $M$  seja o ponto médio (número 133).

E isso se consegue, por exemplo, traçando a paralela  $ME$  a  $\bar{t}_1$  e construindo o ponto  $Y$ , simétrico de  $O$  em relação a  $E$  (Figura 211).

A reta  $YM$ , assim formada, será a tangente  $t$  procurada.

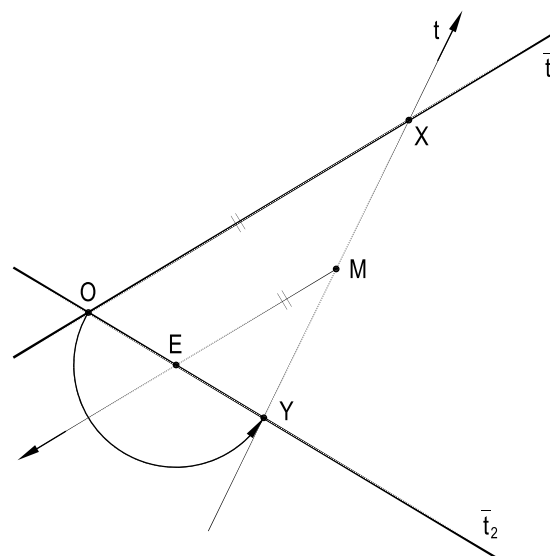


Figura 211

# CAPÍTULO VIII

## DIÂMETROS CONJUGADOS DA HIPÉRBOLE

### 136 – Diâmetros da hipérbole

Consideremos um sistema genérico de cordas paralelas de uma hipérbole de assíntotas  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  e estudemos o diâmetro relativo à direção  $d$ , dessas cordas.

Para tanto, analisemos uma corda  $NN'$  qualquer do sistema (Figura 212). Porque  $XN = X'N'$  (número 132), o ponto médio  $M$  da corda  $NN'$  será também o médio do segmento  $XX'$  limitado entre as assíntotas sobre a reta que serve de suporte àquela corda (Figura 212).

Mas então, porque os triângulos  $OXX'$  formados são todos, aos pares, homotéticos, em relação ao centro  $O$  da hipérbole, é imediato concluir que os pontos médios de todas as cordas do sistema pertencem a uma reta que contém o centro da hipérbole.

Finalmente, porque entre os pontos  $C$  e  $C'$  comuns àquela reta e à hipérbole não existem cordas (Figura 212), o diâmetro obtido consta de duas semirretas  $Cz$  e  $C'z'$ .

Como a direção  $d$  das cordas escolhidas foi genérica, conclui-se que a hipérbole possui uma infinidade de diâmetros, cada um constituído por um par de semirretas exteriores, com sentidos opostos, limitados pelos dois ramos da curva, tendo por suporte uma reta pertencente ao centro da hipérbole (Figura 212).

Por questões de interesse métrico, convencionou-se, no entanto, designar por diâmetro da hipérbole, relativo a uma direção  $d$ , o segmento  $CC'$  limitado entre os dois ramos da curva (Figura 212), isto é, entre as origens  $C$  e  $C'$  daquelas semirretas  $Cz$  e  $C'z'$ .

Assim, passaremos a dizer que os diâmetros da hipérbole são segmentos limitados entre os dois ramos da curva, todos tendo por ponto médio o centro  $O$  da hipérbole.

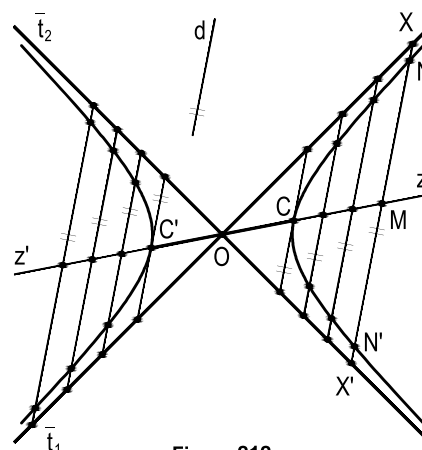


Figura 212

### 137 – Observação

Embora evidente, vale observar que as tangentes  $t$  e  $t'$  nos extremos de um diâmetro são paralelas às cordas que definem esse diâmetro (Figura 213).

### 138 – Diâmetros conjugados da hipérbole

Consideremos, para uma hipérbole de assíntotas  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$ , o diâmetro  $MM'$  relativo a uma direção genérica  $d$ , bem como as tangentes  $GG'$  e  $HH'$  e o paralelogramo  $GG'H'H$ , cujos vértices são os pontos de encontro daquelas duas tangentes com as assíntotas da hipérbole (Figura 214).

Evidentemente, o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos paralelos ao diâmetro  $MM'$  e apoiados pelos extremos nas duas assíntotas é uma reta  $s$  (Figura 214) que, por passar pelos pontos  $N$  e  $N'$ , médios dos lados  $GH$  e  $G'H'$  do paralelogramo  $GG'H'H$ , é paralela à reta  $d$ .

Embora  $NN'$  não seja diâmetro da hipérbole, porque os segmentos paralelos a  $MM'$  não são cordas da curva, convencionou-se dizer que o segmento  $NN'$  é o diâmetro conjugado de  $MM'$ .

Assim, dois diâmetros conjugados de uma hipérbole são tais que um sempre encontra a curva e o outro não, e inversamente em relação à hipérbole conjugada da considerada.

### 139 – Observações

139.1 – O paralelogramo construído sobre dois diâmetros conjugados tem suas diagonais sobre as assíntotas da hipérbole.

139.2 – Quando a hipérbole é equilátera, porque as assíntotas são perpendiculares (número 125.1), o paralelogramo construído sobre dois diâmetros conjugados quaisquer é um losango (Figura 215) e, em consequência, os dois diâmetros são sempre iguais entre si e simétricos em relação a cada assíntota (Figura 215).

139.3 – Reciprocamente, apenas a hipérbole equilátera tem diâmetros conjugados iguais.

De fato, essa igualdade implica na perpendicularidade das assíntotas, o que só ocorre quando a hipérbole é equilátera.

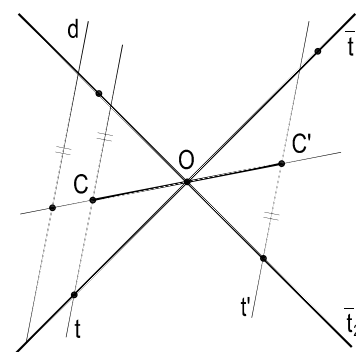


Figura 213

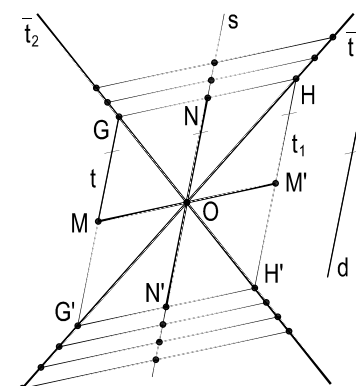


Figura 214

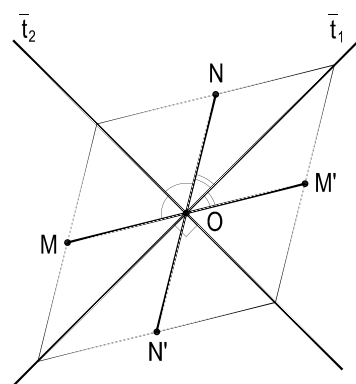


Figura 215

## 140 – Determinação dos eixos e dos focos a partir de dois diâmetros conjugados

Dados dois diâmetros conjugados  $MM'$  e  $NN'$  de uma hipérbole e sabendo-se qual dos dois encontra a curva ( $MM'$ , na Figura 216), para determinar eixos e focos da hipérbole, constrói-se, inicialmente, o paralelogramo  $GG'H'H$  sobre os diâmetros dados, obtendo-se, por suas diagonais, as assíntotas  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  da hipérbole (Figura 216).

Conhecidas as assíntotas, constrói-se as bissetrizes dos ângulos por elas formados, obtendo-se os suportes dos eixos da curva (Figura 216), sabendo-se que a bissetriz  $r$  é a que contém o eixo real, por sua proximidade aos pontos correntes  $M$  e  $M'$ , extremos do diâmetro que toca a curva.

Traça-se, então, por  $M'$ , a paralela à segunda bissetriz  $s$ , encontrando-se os pontos 1 e 2, sobre as assíntotas, determinando-se, em seguida, a média geométrica  $M'3$  entre  $M'1$  e  $M'2$ , que, como se sabe (número 127), tem medida igual ao semieixo imaginário  $b$ .

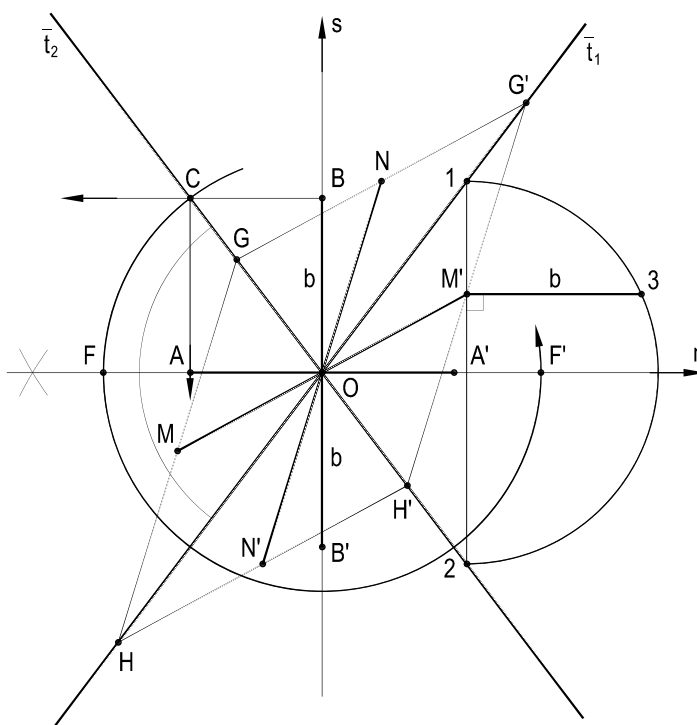


Figura 216

Aplica-se, então, esse valor  $b$ , a partir do centro  $O$  da hipérbole, sobre a bissetriz  $s$ , num sentido e no outro, determinando, em posição, o eixo imaginário  $BB'$ .

A paralela à bissetriz  $r$ , por  $B$ , encontrará a assíntota  $\bar{t}_2$  num ponto  $C$  pertencente ao círculo focal da hipérbole (número 128) que pode, então, ser construído (Figura 216), produzindo, sobre  $r$ , os dois focos  $F$  e  $F'$  procurados.

Então, por simples projeção de  $C$ , sobre  $r$ , obtém-se o vértice  $A$  e, por simetria em relação a  $O$ , o segundo vértice  $A'$  da hipérbole.

Ficam, assim, determinados, em posição, os dois eixos e os dois focos da curva, tal como se desejava.

## 141 – Construção direta da hipérbole a partir de dois diâmetros conjugados

Dados dois diâmetros conjugados  $MM'$  e  $NN'$  de uma hipérbole e sabendo-se qual dos dois encontra a curva ( $MM'$ , na Figura 217), para construir diretamente a hipérbole, determina-se, inicialmente, as assíntotas  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$ , com o auxílio do paralelogramo  $GG'H'H$  traçado sobre os dois diâmetros dados (Figura 217).

Sabe-se (número 132) que todas as retas secantes a uma hipérbole determinam, entre suas assíntotas, três segmentos: o central, sendo uma corda da curva; e os dois extremos, entre cada extremo dessa corda e cada assíntota, iguais entre si.

Então, para obter – a partir do conhecimento, em posição, de suas assíntotas  $\bar{t}_1$  e  $\bar{t}_2$  e de dois pontos correntes  $M$  e  $M'$  da hipérbole – novos pontos de passagem da curva, basta traçar secantes às assíntotas, por  $M$  e por  $M'$ , e, em cada uma delas, replicar o segmento, como  $M'X$ , sobre essa mesma secante, mas a partir da outra assíntota, obtendo-se, com o segmento  $X'M'_1 = XM'$ , novo ponto  $M'_1$  da curva (Figura 216).

Tal procedimento, reiterado, nesse mesmo ramo, produzirá tantos pontos  $M'_1$ , quantos se deseje, para a construção da curva.

Aliás, para o outro ramo da hipérbole, tanto se pode repetir a construção acima, a partir do ponto  $M$  dado da curva, como indicado na Figura 217, quanto se utilizar secantes a partir do ponto  $M'$ , inicialmente estudado, visto que a propriedade em que se apoia a construção é válida também para secantes à hipérbole que atinjam suas duas assíntotas (número 132).

Por fim, para construções ainda mais precisas da curva, pode-se utilizar as tangentes em cada um dos pontos correntes obtidos, pela utilização da construção apresentada no número 135, pois a inclusão das tangentes orientará melhor as mudanças de curvatura da hipérbole procurada.

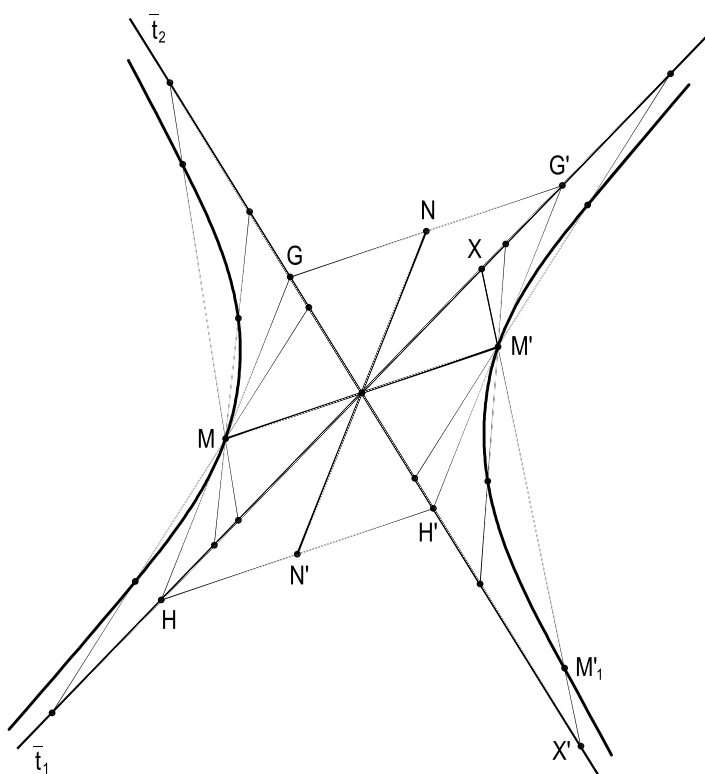


Figura 217

# CAPÍTULO IX

## PARÁBOLA

### 142 – Definições

Parábola é a curva plana cujos pontos equidistam de uma reta e de um ponto, fixos, pertencentes ao seu plano, respectivamente denominados diretriz e foco da curva.

Assim são a reta  $d$  e o ponto  $F$ , na Figura 218.

O segmento formado por um ponto corrente  $M$  e pelo foco  $F$  é denominado raio vetor do ponto  $M$ .

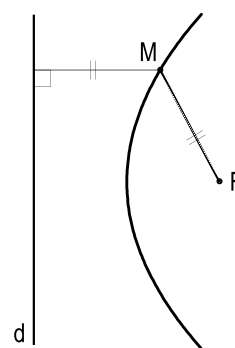


Figura 218

### 143 – Condição de existência

Para que exista uma parábola é necessário e suficiente que o foco seja exterior à diretriz.

De fato, se o foco pertencesse à diretriz, os únicos pontos equidistantes dos dois seriam os pertencentes à reta perpendicular a ela, traçada pelo foco. Isto é, não existiria a curva.

### 144 – Natureza

A parábola é uma curva contínua e aberta, constituída por um único ramo, o qual se situa inteiramente no semiplano, limitado pela diretriz, em que se encontra o foco.

Contínua, porque cada acréscimo infinitésimo atribuído ao raio vetor corresponde a um aumento infinitésimo igual da distância do ponto corrente à diretriz, o que sempre é possível; aberta, porque, naturalmente, o valor do raio vetor pode ser tão grande quanto se deseje, o que permite aumentar indefinidamente a distância do ponto corrente à diretriz. E constituída por apenas um ramo, porque não pode haver qualquer ponto da curva no semiplano com origem na diretriz e oposto ao foco, já que todos os pontos desse semiplano são mais próximos da diretriz que do foco.

## 145 – Processo espontâneo para a construção da parábola

Dados o foco  $F$  e a diretriz  $d$ , a própria definição da curva proporciona o seguinte processo:

Arbitrando-se um valor  $m$  maior que a metade da distância de  $F$  a  $d$ , constrói-se a paralela  $r$  à diretriz, dela distando  $m$ , no mesmo semiplano, em relação à diretriz, em que esteja o foco, e um círculo de centro no foco, de raio  $m$ , que corta  $r$  em dois pontos  $M_1$  e  $M_2$  (Figura 219) da curva.

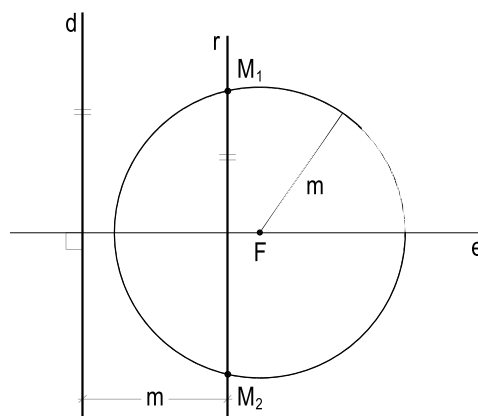


Figura 219

A variação de valor de  $m$ , naturalmente superior à metade da distância de  $F$  a  $d$ , proporciona novos pontos  $M$  da parábola procurada (Figura 220), tantos quantos se deseje.

## 146 – Eixo e vértice

Do próprio processo espontâneo (número 145) decorre a simetria dos pares de pontos da curva (como  $M_1$  e  $M_2$ , na Figura 219), em relação à reta  $e$  pertencente ao foco e perpendicular à diretriz.

Conclui-se, então, que a parábola possui um eixo e um vértice.

O vértice, o ponto  $A$  em que aquela reta  $e$  encontra a curva, é, evidentemente, o ponto médio do segmento  $FS$  perpendicular à diretriz e limitado entre ela e o foco (Figura 221).

Como a curva é aberta e constituída por apenas um ramo (número 144), em termos precisos, o eixo é, então, a semirreta  $Ax$  (Figura 221) pertencente àquela reta e situada no mesmo semiplano, em relação à diretriz, ao qual pertence o foco.

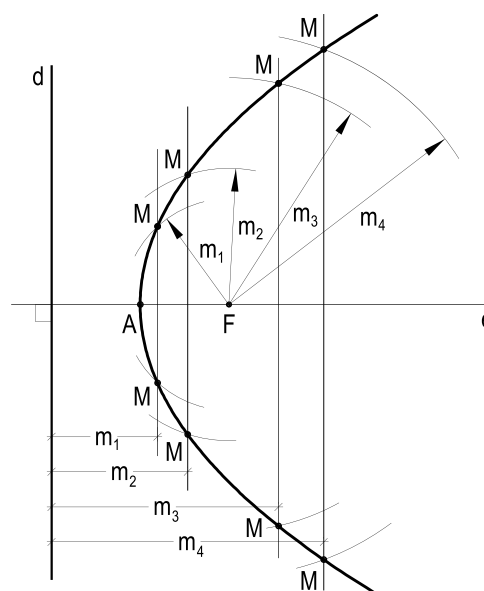


Figura 220

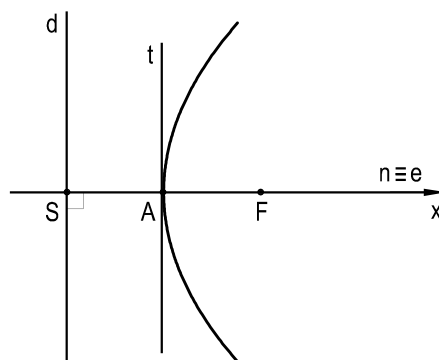


Figura 221



## 147 – Corda focal e parâmetro

Corda focal de uma parábola é a que pertence ao foco e é perpendicular ao eixo da curva.

Parâmetro é a ordenada, em relação ao eixo, do ponto da curva cuja projeção ortogonal sobre o eixo coincide com o foco. O valor do parâmetro é, pois, igual à metade da corda focal.

Note-se que o ponto M, da parábola, extremo do parâmetro MF, por equidistar do foco e da diretriz, proporciona a formação do quadrado MFSQ (Figura 222).

Assim, e é o que habitualmente se faz, o parâmetro da parábola pode ser medido pela distância FS, do foco à diretriz.

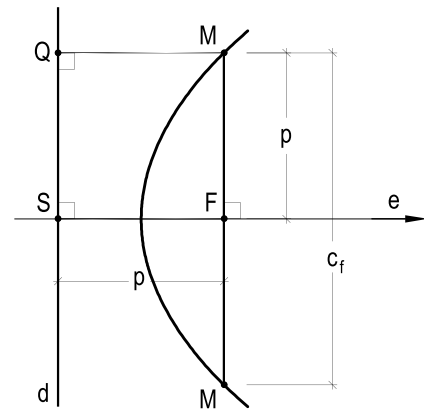


Figura 222

## 148 – Observação

Porque, quanto à grandeza, uma parábola fica perfeitamente determinada pelo valor de seu parâmetro, ou seja, da distância entre seu foco e sua diretriz, resulta que todas as parábolas são semelhantes. E que a razão de semelhança entre duas parábolas é igual à existente entre seus parâmetros.

## 149 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta e de um ponto fixos, exteriores, é a parábola que tem por diretriz e foco a reta e o ponto fixos.

Demonstração: Sejam d e F a reta e o ponto fixos (Figura 223).

Consideremos a parábola de diretriz d e foco F.

Sabe-se que (número 142) para todos os pontos M da curva vale escrever:

$$MF = MQ \quad (1)$$

Sendo J e L pontos respectivamente exterior e interior à parábola, os triângulos JMF e LMF (Figura 223) fornecem, respectivamente:

$$MJ + JF > MF \quad (2)$$

$$e \quad LF - LM < MF \quad (3)$$

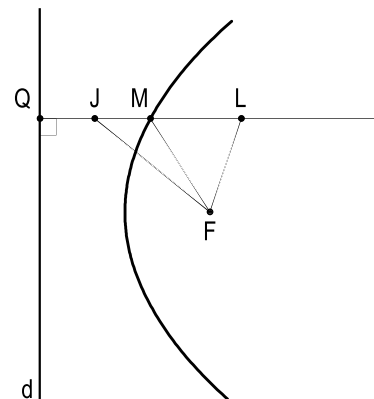


Figura 223

Desenvolvendo estas relações e aplicando (1), vem:

$$MQ - JQ + JF > MF \quad \therefore \quad -JQ + JF > 0 \quad \therefore \quad JF > JQ \quad (4)$$

$$LF - (LQ - MQ) < MF \quad \therefore \quad LF - LQ < 0 \quad \therefore \quad LF < LQ \quad (5)$$

As relações (1), (4) e (5) demonstram o teorema, visto que apenas para pontos M da curva a equidistância estudada é atendida.

### 150 – Escólio

A parábola divide seu plano em duas regiões: a externa, à qual pertencem os pontos mais próximos da diretriz que do foco, e a interna, à qual pertencem os pontos mais próximos do foco que da diretriz.

### 151 – Teorema

Seja M um ponto qualquer de uma parábola, MF seu raio vetor e MS a perpendicular baixada à diretriz, a bissetriz do ângulo  $\widehat{SMF}$  é tangente à parábola, em M.

Demonstração: Sejam F e d o foco e a diretriz e M um ponto corrente de uma parábola. Consideremos o raio vetor MF, a perpendicular MS à diretriz, S em d, e a bissetriz r do ângulo SMF (Figura 224).

Porque M é ponto da curva, o triângulo MSF é isósceles, resultando daí a simetria dos pontos F e S em relação àquela reta r, a qual será, por isso, a mediatriz de FS (Figura 224).

Assim, para todo ponto J de r vale escrever:

$$JF = JS \quad (1)$$

E, nos triângulos retângulos JSQ:

$$JS > JQ \quad (2)$$

As relações (1) e (2) fornecem:

$$JF > JQ$$

E, se todos os pontos J (exceto M) da bissetriz considerada r são mais próximos da diretriz que do foco, conclui-se (número 150) que todos esses pontos J são exteriores à parábola. Ou seja, que a bissetriz r (Figura 224) do ângulo  $\widehat{SMF}$  é tangente à curva, no ponto M.

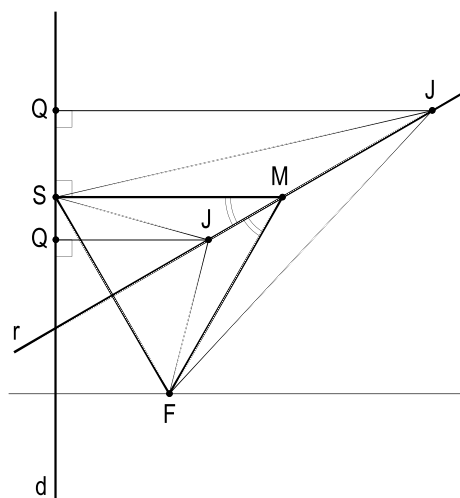


Figura 224

## 152 – Corolários

152.1 – A bissetriz  $n$  do ângulo formado entre o raio vetor  $MF$  e a semirreta paralela e de mesmo sentido que o eixo, traçada por um ponto  $M$  corrente (Figura 225), é normal à parábola nesse ponto.

Porque essa bissetriz é perpendicular à tangente  $t$ , no ponto  $M$  considerado (*Geometria Plana*, número 12.3).

152.2 – O foco é o centro do semicírculo que, passando por um ponto corrente, tem por diâmetro o segmento formado pelos pés, no eixo, da tangente e da normal relativas àquele ponto corrente.

Sendo  $M$  um ponto genérico de uma parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$  e  $T$  e  $N$  os pés, no eixo, da tangente e da normal à curva, naquele ponto  $M$  (Figura 226), temos:

- $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$  (número 151)
- e  $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$  (alternos internos)
- Logo,  $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$
- e  $\hat{\beta}' = \hat{\gamma}'$  (complementos de  $\hat{\beta}$  e de  $\hat{\gamma}$ )

Assim, os triângulos isósceles  $FMT$  e  $FMN$  asseguram a igualdade dos segmentos  $FM$ ,  $FT$  e  $FN$ , o que vale concluir ser o foco  $F$  o centro do semicírculo que, passando por  $M$ , tem por diâmetro o segmento  $TN$  (Figura 226).

152.3 – Os segmentos formados, no eixo, pelo foco e pelos pés da tangente e da normal relativos a um ponto qualquer da parábola são iguais entre si e iguais ao raio vetor daquele ponto (Figura 226).

Pois que esta é, apenas, outra forma de enunciar a propriedade anterior.

152.4 – A tangente, no vértice, é paralela à diretriz.

É equivalente dizer que a normal, no vértice, coincide com o eixo da parábola (Figura 227).

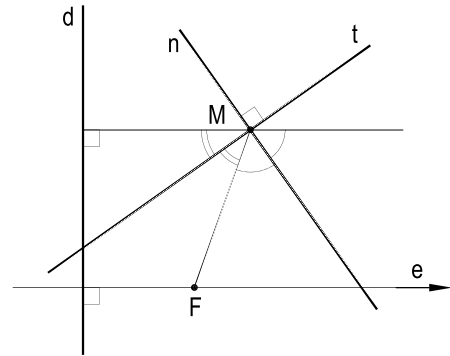


Figura 225

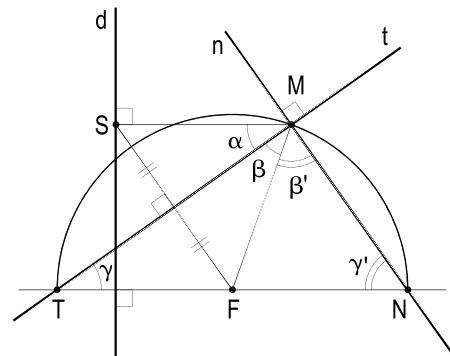


Figura 226

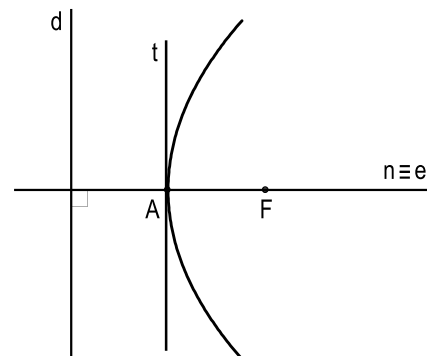


Figura 227

152.5 – A reta formada pelo ponto de contato de uma tangente qualquer e pelo simétrico do foco em relação à tangente é, sempre, paralela ao eixo da parábola.

Porque, segundo se viu (número 151), o simétrico S do foco F em relação a uma tangente genérica t (Figura 226) é o pé da perpendicular do ponto de contato M à diretriz d.

E, se a reta MS é perpendicular à diretriz, ela é, por isso mesmo, paralela ao eixo da parábola.

152.6 – O lugar geométrico dos simétricos do foco em relação às tangentes é a diretriz da parábola.

Porque o simétrico S do foco F em relação a uma tangente genérica t (Figura 226) é o pé da perpendicular MS, baixada do ponto de contato M da tangente à diretriz.

152.7 – Dados um ponto F e uma reta d exteriores, fixos, o lugar geométrico dos centros M dos círculos perpendiculares ao ponto e tangentes à reta é a parábola que tem por foco e diretriz o ponto e a reta dados.

Porque (Figura 228) os centros M de todos esses círculos devem ser equidistantes do ponto F e da reta d.

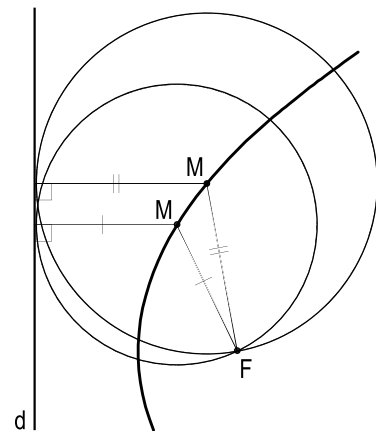


Figura 228

### 153 – A parábola referida a seu eixo e à tangente em seu vértice

Consideremos uma parábola de foco F, diretriz d e parâmetro p, com sua concavidade voltada para a direita (Figura 229) e tomemos como eixos cartesianos o próprio eixo da curva e a tangente em seu vértice A.

Para um ponto M (x, y) qualquer da curva, temos:

$$MF = MQ \quad \text{ou} \quad MF^2 = MQ^2$$

$$\therefore y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\therefore y^2 + x^2 + \frac{p^2}{4} - px = x^2 + \frac{p^2}{4} + px$$

Simplificando, vem:

$$y^2 = 2px$$

Esta é a equação da parábola, nas condições estabelecidas.

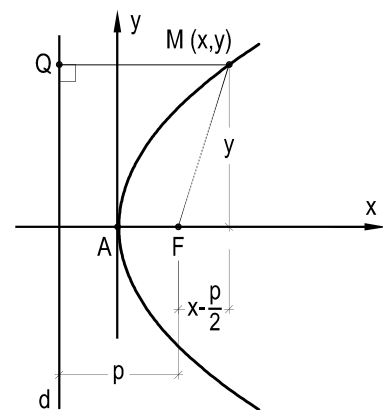


Figura 229

## 154 – Construção da parábola com auxílio das tangentes

Porque (número 152.6) a diretriz é o lugar geométrico dos simétricos do foco em relação às tangentes, para construir a curva a partir do foco  $F$  e da diretriz  $d$ , basta arbitrar vários pontos  $S$ , sobre a diretriz, e construir as mediatrizes dos diversos segmentos  $FS$ , assim formados, as quais serão tangentes à parábola (Figura 230). Os pontos de contato  $M$  dessas tangentes serão determinados pelas interseções dessas mediatrizes com as paralelas ao eixo traçadas pelos pontos  $S$  correspondentes (número 152.5).

O processo proporciona, além de pontos  $M$  de passagem da parábola, as tangentes  $t$  à curva, nesses pontos, o que resulta em valiosa informação quanto à mudança de curvatura da parábola (Figura 230).

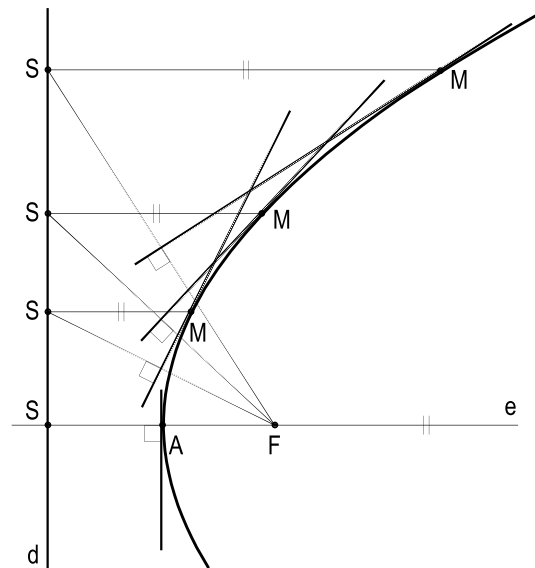


Figura 230

## 155 – Determinação do ponto de contato de uma tangente dada

155.1 – Dados o foco  $F$ , o eixo  $e$  e a tangente  $t$ .

Para determinar o ponto de contato  $M$  de uma tangente dada  $t$  a uma parábola de foco  $F$  e eixo  $e$  conhecidos, basta construir o simétrico  $S$  do foco em relação à tangente (Figura 231) e traçar, por  $S$ , a paralela ao eixo dado que (número 152.5) corta  $t$  segundo o ponto  $M$  procurado.

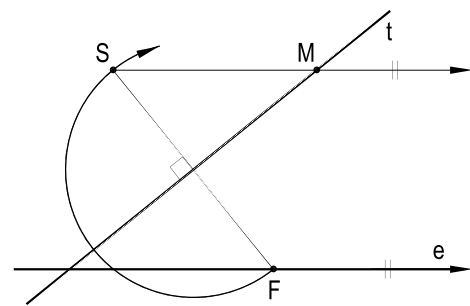


Figura 231

Vale, também, obter o ponto  $T$ , pé da tangente no eixo  $e$  (Figura 232), e construir o arco de círculo de centro no foco  $F$  e raio  $FT$ , o qual corta a tangente, produzindo o ponto de contato  $M$ , pedido, já que o foco é centro do círculo que passa por  $T$  e por  $M$ .

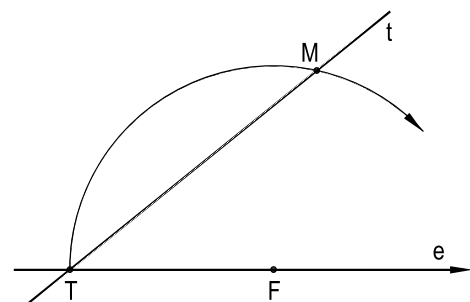


Figura 232

155.2 – Dados o eixo  $e$ , a diretriz  $d$  e a tangente  $t$ .

Porque o simétrico  $S$  do foco em relação à tangente deve pertencer à diretriz (número 152.6), para determinar o ponto de contato  $M$  de uma tangente dada  $t$  a uma parábola de eixo  $e$  e diretriz  $d$  conhecidas, basta construir a reta  $\bar{e}$ , simétrica do eixo em relação à tangente (Figura 233), a qual corta a diretriz segundo o ponto  $S$ . A paralela, por  $S$ , ao eixo, intercepta  $t$ , fornecendo o ponto  $M$  procurado.

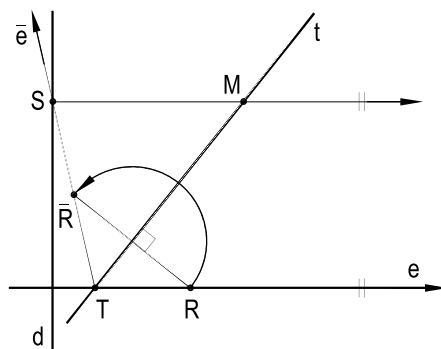


Figura 233

Naturalmente, vale também construir a reta  $\bar{d}$ , simétrica da diretriz em relação à tangente, a qual corta o eixo (Figura 234), produzindo o foco  $F$  da parábola.

E, obtido o foco, retornamos ao item anterior (número 155.1), valendo, pois, aplicar um dos processos ali desenvolvidos.

Na Figura 234, optamos pelo segundo deles.

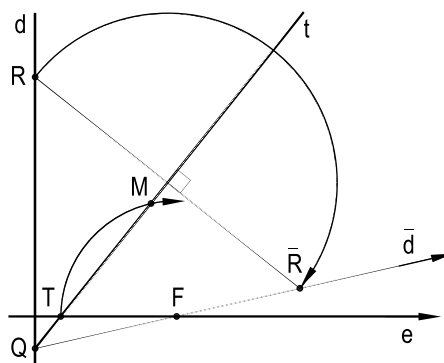


Figura 234

## 156 – Construção das tangentes

156.1 – Construção da tangente num ponto  $M$  da curva (dados o foco  $F$ , o eixo  $e$  e o ponto corrente  $M$ ).

Para obter a tangente  $t$ , em  $M$ , basta girar o raio vetor  $MF$  até que ele ocupe a posição  $MS$  (Figura 235) paralela ao eixo  $e$ . A tangente procurada  $t$  será a perpendicular, por  $M$ , à reta  $FS$ .

De fato, o ponto  $S$ , evidentemente (número 152.6) pertencente à diretriz, é o simétrico do foco em relação à tangente procurada. E, porque o triângulo  $MFS$  é isósceles, sua altura  $t$  é também mediatriz da base  $FS$  e bissetriz do ângulo  $SME$ .

Assim, a tangente  $t$  procurada é a perpendicular, por  $M$ , a  $FS$  (Figura 235).

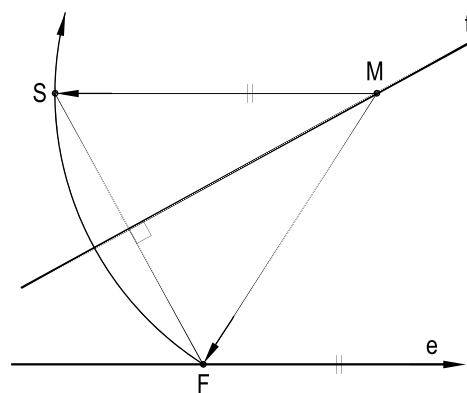
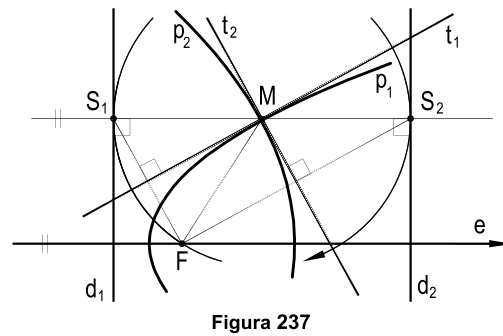
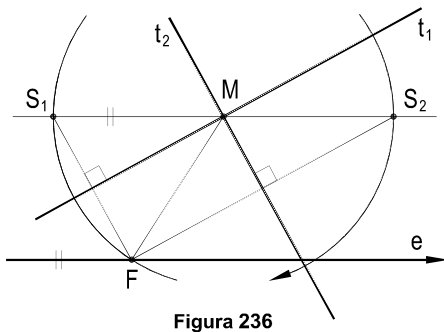


Figura 235

Há, naturalmente, duas posições possíveis para o ponto  $S$ , visto que o círculo com centro em  $M$  e raio  $MF$  corta a paralela por  $M$  ao eixo em dois pontos  $S_1$  e  $S_2$  (Figura 236).

Logo, há duas parábolas  $p_1$  e  $p_2$  e, em consequência, duas tangentes  $t_1$  e  $t_2$ , no ponto  $M$ , comum às duas parábolas, como indicado na Figura 237.

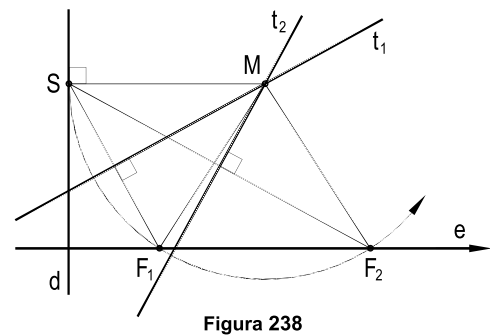


156.2 – Construção da tangente num ponto  $M$  da curva (dados o eixo  $e$ , a diretriz  $d$  e o ponto corrente  $M$ ).

Para construir a tangente  $t$ , em  $M$ , basta descrever o círculo de centro  $M$ , tangente à diretriz, o qual corta o eixo e segundo o foco  $F$  da parábola (Figura 238).

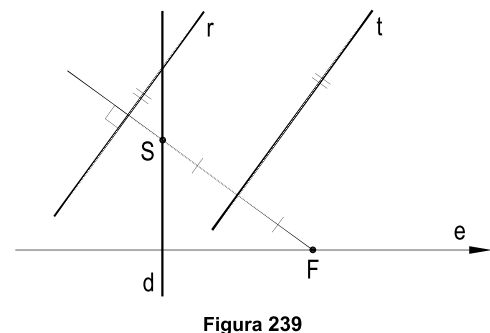
E, obtido o foco, como no item anterior, a tangente procurada será a perpendicular traçada, por  $M$ , à reta  $FS$ .

Também aqui há duas soluções para o problema, visto que o círculo utilizado corta o eixo em dois pontos  $F_1$  e  $F_2$ , focos das duas parábolas possíveis. E, por isso, há duas tangentes  $t_1$  e  $t_2$  (Figura 238), em resposta ao pedido, uma para cada uma das duas parábolas possíveis.



156.3 – Construção da tangente paralela a uma reta  $r$  (dados o foco  $F$ , a diretriz  $d$  e a reta  $r$ ).

Análise: Sendo  $t$  a tangente paralela à reta dada  $r$ , sabe-se (número 152.6) que o simétrico  $S$  do foco em relação à tangente pertence à diretriz (Figura 239). E, porque a tangente deve ser paralela a  $r$ , o simétrico  $S$  pertencerá à perpendicular traçada, pelo foco  $F$ , à reta  $r$ .



Construção: Dados o foco  $F$  e a diretriz  $d$  da parábola, além da direção  $r$  da tangente, traça-se, inicialmente, por  $F$ , a perpendicular a  $r$ , que corta a diretriz segundo o ponto  $S$  (Figura 240). Constrói-se, então, a mediatriz  $t$  do segmento  $FS$ , a qual é a tangente procurada.

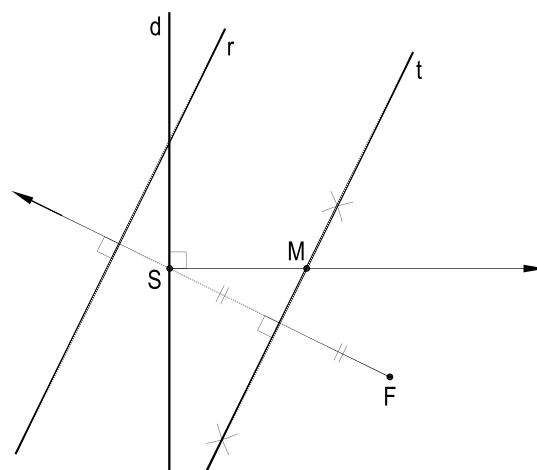


Figura 240

Para obter o ponto de contato  $M$  da tangente, basta traçar, por  $S$ , a perpendicular  $SM$  à diretriz (número 152.5) (Figura 240).

156.4 – Construção das tangentes por um ponto  $J$  exterior (dados o foco  $F$ , a diretriz  $d$  e o ponto  $J$ ).

Análise: Sendo  $t_1$  e  $t_2$  as tangentes procuradas, sabe-se (número 152.6) que os simétricos  $S_1$  e  $S_2$  do foco  $F$  em relação a elas devem pertencer à diretriz da parábola. E, dessas simetrias, conclui-se a igualdade:  $JS_1 = JF = JS_2$  (Figura 241).

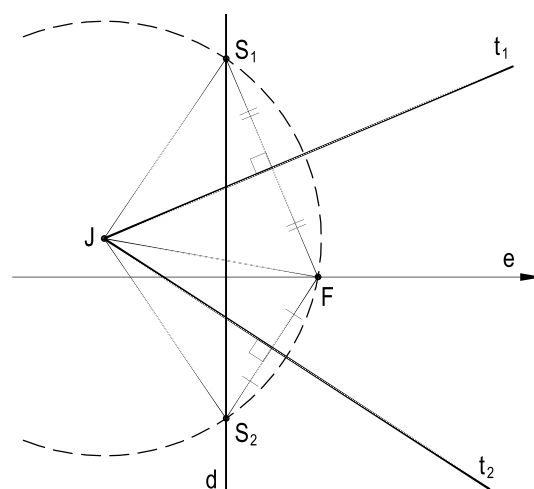


Figura 241

Então, os simétricos  $S_1$  e  $S_2$  devem também pertencer a um círculo de centro  $J$  e raio  $JF$ .

Construção: Dados o foco  $F$ , a diretriz  $d$  e o ponto  $J$ , constrói-se inicialmente o círculo de centro  $J$  e raio  $JF$ , o qual corta a diretriz segundo os pontos  $S_1$  e  $S_2$  (Figura 242). Traça-se, então, as perpendiculares, por  $J$ , aos segmentos  $FS_1$  e  $FS_2$ , as quais são as tangentes  $t_1$  e  $t_2$  procuradas.

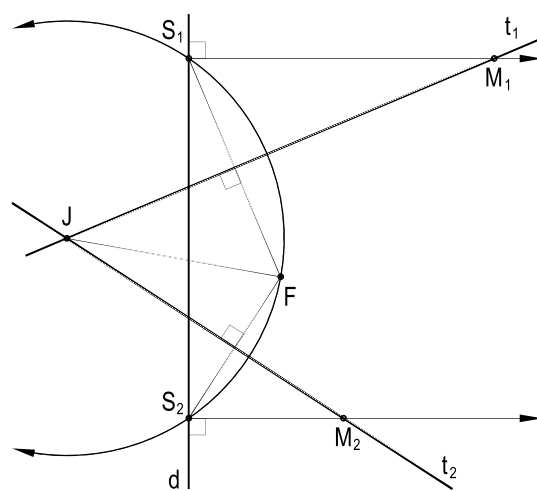


Figura 242

Para obter os pontos de contato  $M_1$  e  $M_2$  dessas tangentes, basta traçar, pelos pontos  $S_1$  e  $S_2$ , as perpendiculares  $S_1M_1$  e  $S_2M_2$  à diretriz (número 152.5).



## 157 – Teorema de La Hire

O lugar geométrico das projeções ortogonais do foco sobre as tangentes a uma parábola é a tangente à curva no seu vértice.

Demonstração: Seja  $t$  uma tangente genérica a uma parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$ . Consideremos o simétrico  $S$  do foco, em relação a  $t$ , e a projeção ortogonal  $P$  do foco sobre  $t$  (Figura 243).

Porque, ao variar a tangente, o lugar geométrico de  $S$  é a diretriz  $d$  (número 152.6) e, porque  $P$  é o homotético de  $S$ , para o polo  $F$  na razão  $\frac{1}{2}$ , o lugar geométrico de  $P$  será uma reta  $w$  paralela à diretriz, equidistante dela e do foco. Tal reta passará, então, pelo ponto médio do segmento  $FQ$  (Figura 243), ou seja (número 146), pelo vértice  $A$  da parábola.

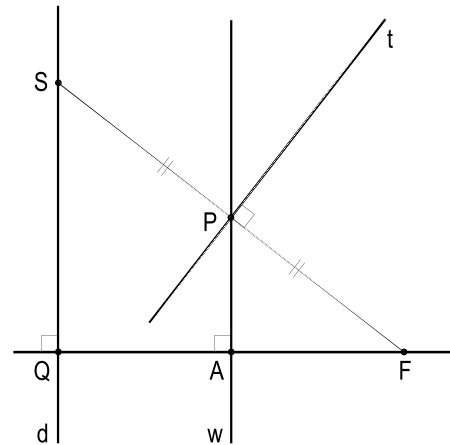


Figura 243

E, como esta reta  $w$  é perpendicular ao eixo, ela é tangente à curva, no vértice  $A$ .

Então, o lugar geométrico das projeções ortogonais do foco sobre as tangentes a uma parábola é a tangente à curva no seu vértice.

## 158 – Construções

Do teorema de La Hire, resultam as seguintes construções:

158.1 – Determinação do foco e da diretriz de uma parábola a partir do vértice  $A$ , do eixo  $e$  e de uma tangente  $t$ .

Dados o vértice  $A$  e o eixo  $e$  de uma parábola, além de uma tangente genérica  $t$ , para obter seu foco e sua diretriz, pode-se, inicialmente, traçar a tangente  $w$  à curva, em seu vértice, perpendicular, por  $A$ , a  $e$ , para obter, por interseção com  $t$  (Figura 244), o ponto  $P$ , projeção ortogonal do foco sobre  $t$  (número 157).

Por contraprojeção, isto é, traçando-se por  $P$  a perpendicular a  $t$ , determina-se o foco  $F$ , por interseção com o eixo  $e$ , por simetria do foco em relação ao vértice (Figura 244), o ponto  $S$  e, em seguida, a diretriz  $d$ , perpendicular, por  $S$ , a  $e$ .

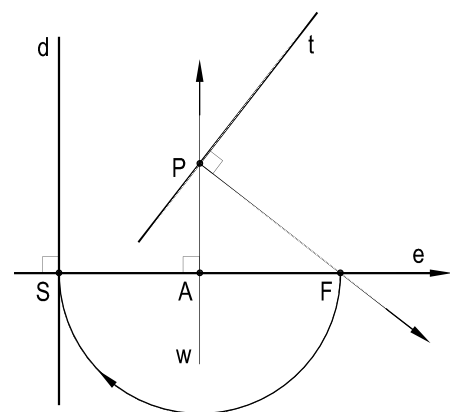


Figura 244

158.2 – Construção da tangente a uma parábola paralela a uma reta  $r$  (dados o vértice  $A$ , o foco  $F$  e a reta  $r$ ).

Dados o vértice  $A$  e o foco  $F$  de uma parábola, para construir a tangente paralela a uma reta dada  $r$ , deve-se, inicialmente, traçar a tangente  $w$  à curva, em seu vértice, por  $A$ , perpendicular a  $AF$ , à qual pertencerá a projeção ortogonal  $P$  do foco sobre a tangente procurada (número 157).

E, como a tangente deve ter a direção de  $r$ , traçando-se por  $F$  a perpendicular a  $r$ , obtém-se, por interseção com  $w$ , o ponto  $P$  (Figura 245). A tangente pedida  $t$  passa por  $P$  e é paralela a  $r$ .

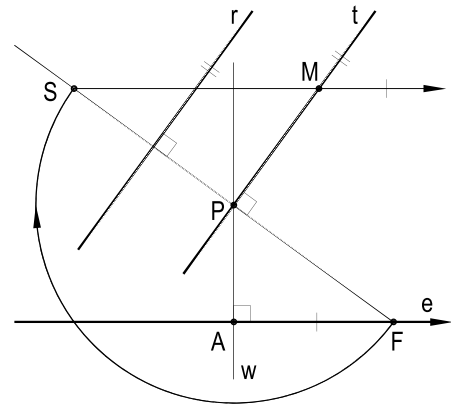


Figura 245

Para determinar o ponto de contato  $M$  dessa tangente, basta construir o simétrico  $S$  do foco, em relação a ela, e traçar, por esse ponto  $S$ , a paralela ao eixo  $AF$  (Figura 245).

158.3 – Construção das tangentes a uma parábola por um ponto  $J$  exterior (dados o vértice  $A$ , o foco  $F$  e o ponto  $J$ ).

Análise: Sendo  $t_1$  e  $t_2$  as tangentes procuradas, porque os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , projeções ortogonais do foco  $F$  sobre as tangentes, devem pertencer à tangente  $w$  à parábola, em seu vértice (número 157), os triângulos retângulos  $JFP_1$  e  $JFP_2$  (Figura 246) permitem concluir que os pontos  $P_1$  e  $P_2$  serão os de interseção daquela reta  $w$  com o círculo de diâmetro  $JF$ , formado pelo ponto dado  $J$  e pelo foco  $F$  da parábola.

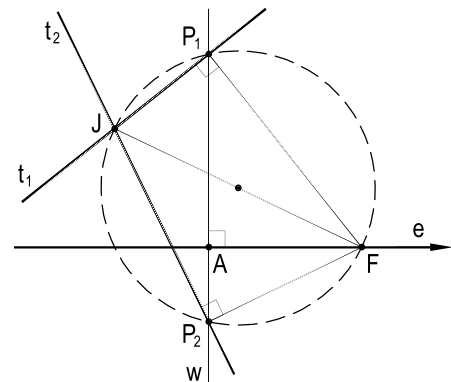


Figura 246

Construção: Dados o vértice  $A$ , o foco  $F$  e o ponto  $J$ , para obter as tangentes, por  $J$ , à parábola, deve-se, inicialmente, construir o círculo de diâmetro  $JF$  e a tangente  $w$  à curva, em seu vértice, os quais se cortam, produzindo os pontos  $P_1$  e  $P_2$  (Figura 247).

As tangentes  $t_1$  e  $t_2$  procuradas são as retas  $JP_1$  e  $JP_2$ .

Para obter os pontos de contato dessas tangentes, não incluídos na Figura 247, basta utilizar o processo indicado no item anterior.

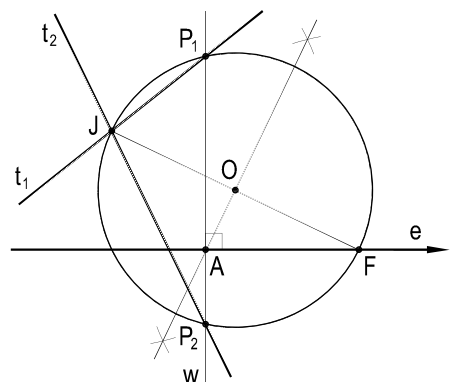


Figura 247

## 159 – Teoremas de Poncelet

1 – As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma parábola são isogonais em relação aos lados do ângulo formado pela reta que une aquele ponto ao foco e pela semirreta paralela ao eixo, traçada por aquele ponto, com mesmo sentido que o eixo.

2 – A reta que une o foco de uma parábola a um ponto exterior é a bissetriz do ângulo formado pelas retas que unem o foco aos pontos de contato das duas tangentes traçadas à curva pelo ponto exterior.

Demonstrações:

1 – Sejam  $t$  e  $t'$  as tangentes do ponto  $J$  a uma parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$  e  $S$  e  $S'$  os simétricos de  $F$ , respectivamente em relação a  $t$  e a  $t'$ , naturalmente (número 152.6) pertencentes à diretriz  $d$  (Figura 248).

Consideremos o círculo de centro  $J$ , pertencente aos pontos  $F$ ,  $S$  e  $S'$ , bem como a semirreta  $Jm$  paralela ao eixo da parábola e de mesmo sentido que esse eixo (Figura 248).

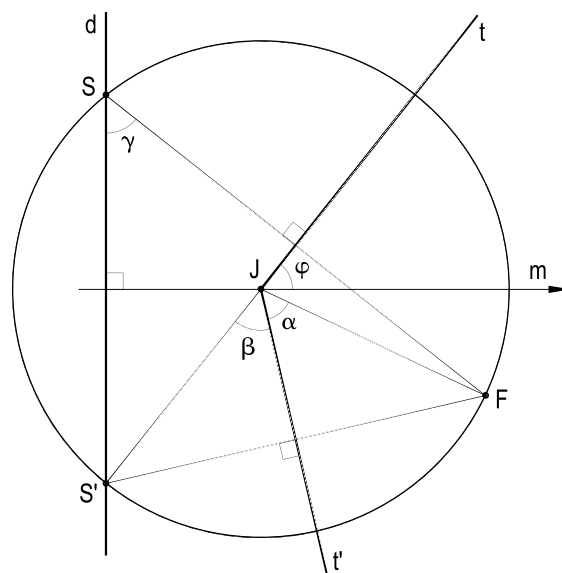


Figura 248

Da simetria de  $F$  e  $S'$  em relação a  $t'$ , vem:  $\alpha = \beta$  (1)

Por terem lados respectivamente perpendiculares,  $\gamma = \varphi$  (2)

E, no círculo considerado, como inscrito e central, respectivamente, subtendendo o mesmo arco  $FS'$ , temos:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\therefore \gamma = \frac{\alpha + \alpha}{2}$$

$$\therefore \gamma = \alpha \quad (3)$$

Das relações (2) e (3) resulta:  $\alpha = \varphi$

Assim, as tangentes  $t$  e  $t'$  são isogonais em relação aos lados do ângulo  $F \hat{J} m$ , formado pela reta que une o ponto  $J$  comum às duas tangentes ao foco e pela semirreta paralela ao eixo traçada por  $J$ , com mesmo sentido que ele, o que demonstra o primeiro teorema de Poncelet.

2 – Além do que já foi considerado, incluíamos os pontos de contato  $M$  e  $M'$  das tangentes  $t$  e  $t'$  (Figura 249).

Das simetrias existentes entre os triângulos  $FJM$  e  $SJM$  e entre  $FJM'$  e  $S'JM'$ , respectivamente em relação a  $t$  e a  $t'$  (Figura 249), vem:

$$\theta = \rho \quad (1) \quad \text{e} \quad \lambda = \delta \quad (2)$$

E, da simetria dos pontos  $S$  e  $S'$  em relação ao diâmetro  $m$  do círculo  $(J, JF)$  (Figura 249), vem

$$\rho = \delta \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) fornecem:  $\theta = \lambda$

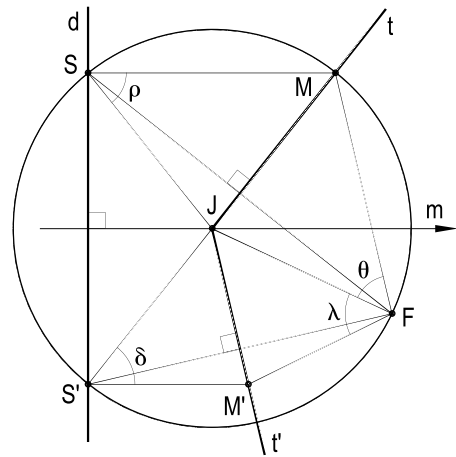


Figura 249

Assim, a reta formada pelo foco  $F$  e pelo ponto  $J$ , exterior à parábola, é a bissetriz do ângulo formado pelas retas que unem o foco aos pontos de contato  $M$  e  $M'$  das duas tangentes à curva, traçadas por  $J$  (Figura 249), o que prova o segundo teorema de Poncelet.

### 160 – Teorema

Os pontos comuns a três tangentes quaisquer, tomadas duas a duas, a uma parábola e o foco da curva são concíclicos.

Demonstração: Consideremos três tangentes genéricas  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  a uma parábola de foco  $F$  e eixo  $e$ .

Sendo  $J$ ,  $K$  e  $L$  os pontos de concurso dessas tangentes, tomadas aos pares (Figura 250), e  $Jm$  e  $Kn$  semirretas paralelas, e de mesmo sentido, ao eixo  $e$ , o primeiro teorema de Poncelet (número 159.1) permite escrever:

$$\alpha = \beta \quad (1) \quad \text{e} \quad \gamma = \varphi \quad (2)$$

Mas, como correspondentes, temos:

$$\alpha = \gamma \quad (3)$$

Das relações (1), (2) e (3) resulta:  $\beta = \varphi$

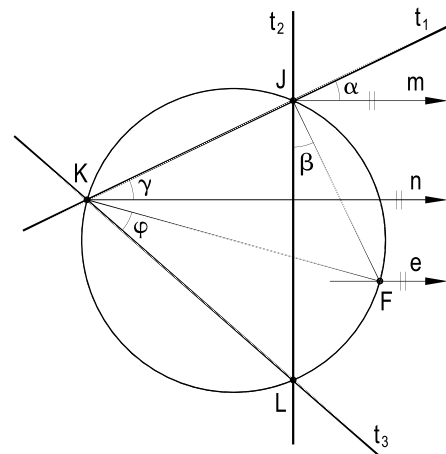


Figura 250

E, porque dos pontos  $J$  e  $K$  se avista o segmento  $FL$  sob um mesmo ângulo (Figura 250), os quatro pontos  $J$ ,  $K$ ,  $F$  e  $L$  pertencem a um mesmo círculo, aquele que contém o arco capaz do ângulo  $\beta = \varphi$  para o segmento  $FL$  (*Geometria Plana*, número 128.1), como se queria provar.

## 161 – Teorema

Um ponto genérico pertencente ao círculo circunscrito a um triângulo qualquer é foco de uma parábola tangente aos três lados do triângulo.

Demonstração: Consideremos um triângulo qualquer JKL e um ponto F arbitrário de seu círculo circunscrito (Figura 251).

Para provar que existe uma parábola tangente aos lados  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  do triângulo JKL, tendo por foco aquele ponto F, basta provar que os simétricos de F em relação às retas  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  são colineares (número 152.6), por, então, pertencerem à diretriz de tal parábola (Figura 251).

Para assegurar que  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  sejam colineares, basta provar que também o são os pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , projeções do foco F sobre os lados do triângulo, visto que tais projeções são respectivamente homotéticas de  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ , em relação a F, na razão  $(\frac{1}{2})$ , e que, para que exista a tangência que se procura demonstrar, esses pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  hão de pertencer à tangente à parábola em seu vértice (número 157).

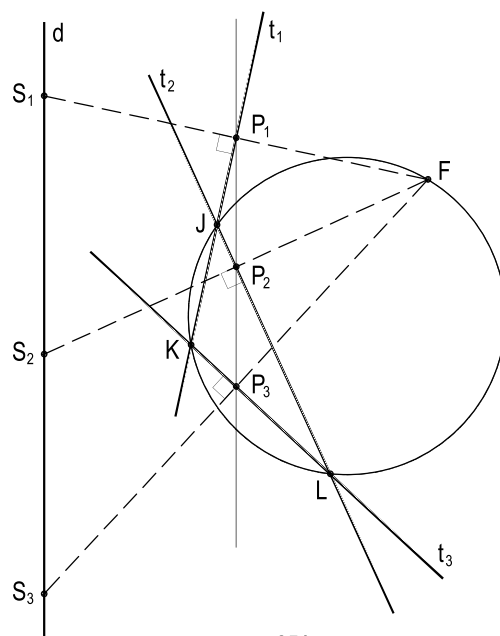


Figura 251

Para tanto, observemos (Figura 252) que os quadriláteros  $FP_1JP_2$  e  $FP_2P_3L$  são inscritíveis em dois círculos, o primeiro por ter dois ângulos opostos retos (*Geometria Plana*, número 128.4) e o segundo por ter dois ângulos inscritos  $FP_2L$  e  $FP_3L$  retos, subtendendo o mesmo arco FL (*Geometria Plana*, número 128.1).

Como inscritos, subtendendo o mesmo arco, temos (Figura 252):

$$\text{no quadrilátero } FP_1JP_2, \quad \alpha = \beta \quad (1)$$

$$\text{no quadrilátero } FP_2P_3L, \quad \gamma = \varphi \quad (2)$$

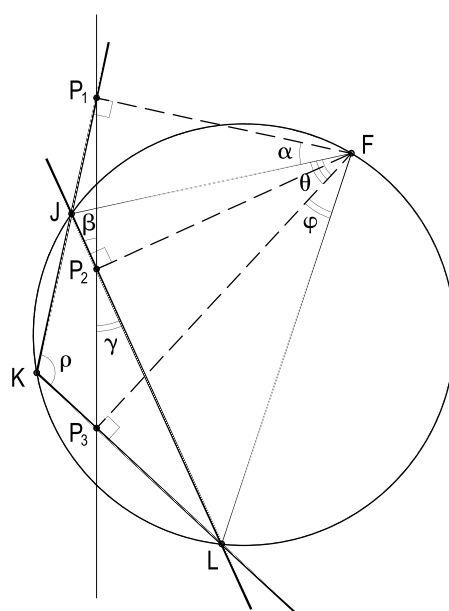


Figura 252

Vejamos, agora, o quadrilátero  $FP_1KP_3$  (Figura 252) que, por ter dois ângulos opostos  $P_1$  e  $P_3$  retos, tem os outros dois suplementares (*Geometria Plana*, número 128.5), o que permite anotar:

$$\rho = 180^\circ - (\alpha + \theta) \quad (3)$$

E, enfim, no quadrilátero  $JFLK$ , inscrito no círculo considerado, como ângulos opostos, temos (*Geometria Plana*, número 128.5):

$$\rho = 180^\circ - (\varphi + \theta) \quad (4)$$

$$\text{As relações (3) e (4) dão } \alpha = \varphi \quad (5)$$

Então, substituindo (1) e (2) em (5), chegamos a:

$$\beta = \gamma \quad (6)$$

Esta igualdade assegura que sejam estes dois ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  opostos pelo vértice (Figura 252) ou, o que é o mesmo, que os três pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , em estudo, sejam colineares (*Geometria Plana*, número 16), o que demonstra o teorema.

Assim, um ponto genérico pertencente ao círculo circunscrito a um triângulo qualquer é foco de uma parábola tangente aos três lados do triângulo.

## 162 – Observação

É claro que são exceções à propriedade acima demonstrada os vértices do triângulo formado pelas três tangentes.

## 163 – Recíproca

Toda parábola tangente aos três lados de um triângulo qualquer tem foco pertencente ao círculo circunscrito ao triângulo formado pelas três tangentes.

Porque apenas pontos  $F$  do círculo circunscrito ao triângulo  $JKL$  (Figura 251) são capazes de proporcionar simétricos  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ , em relação aos lados do triângulo colineares.

## 164 – Corolários

164.1 – O lugar geométrico dos focos de todas as parábolas tangentes aos lados de um triângulo qualquer é o círculo circunscrito ao triângulo, exceto seus vértices.

164.2 – Uma parábola fica perfeitamente determinada quando são dadas quatro tangentes genéricas a ela.

Porque haverá apenas um foco – o ponto, único, comum aos círculos circunscritos aos triângulos formados pelas quatro tangentes, combinadas três a três.

## 165 – Reta de Simson

Como demonstrado acima (número 161), as projeções ortogonais de um ponto  $P$  qualquer do círculo circunscrito a um triângulo genérico  $ABC$  sobre seus três lados pertencem a uma reta, que é denominada reta de Simson, em relação ao triângulo considerado, para aquele ponto.

Assim é, por exemplo, a reta  $r$  (Figura 253) que reúne os pés  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  das projeções ortogonais de um ponto  $P$  qualquer do círculo circunscrito ao triângulo  $ABC$  sobre seus lados.

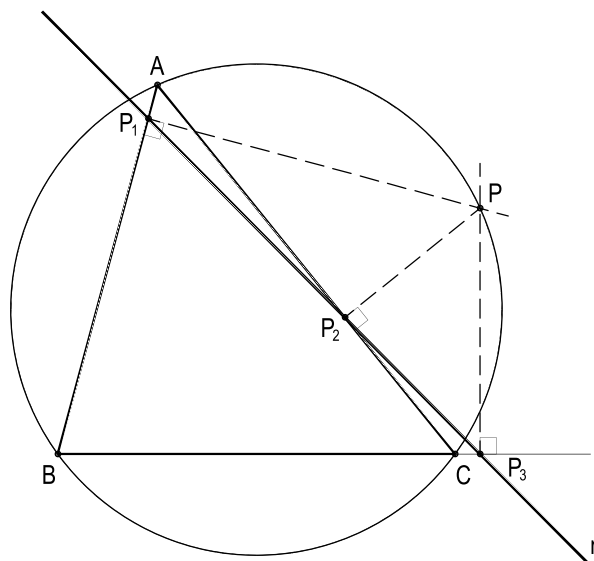


Figura 253

## 166 – Observações

166.1 – A reta  $r$  (Figura 253) é denominada reta de Simson, para o triângulo  $ABC$ , em homenagem a seu descobridor Robert Simson, embora não haja comprovação escrita desse fato. Em verdade, a primeira publicação conhecida sobre tal reta ocorreu quase três décadas após a morte de Simson e foi apresentada por William Wallace, o que faz com que diversos autores prefiram a denominação dupla Wallace – Simson para referência a tal reta.

166.2 – Como o ponto  $P$  utilizado na demonstração do teorema (número 161) foi genericamente escolhido, conclui-se que há, para todo triângulo, uma infinidade de retas de Simson.

166.3 – No caso particular de a reta de Simson ser referente a um dos vértices do triângulo ( $A$ , na Figura 254), ela é a própria altura relativa a esse vértice, pois as projeções ortogonais desse ponto  $A$  sobre os lados que nele chegam,  $AB$  e  $AC$ , é ele próprio e a projeção ortogonal de  $A$ , sobre o lado oposto  $BC$ , é o pé da altura  $AH$  do triângulo.

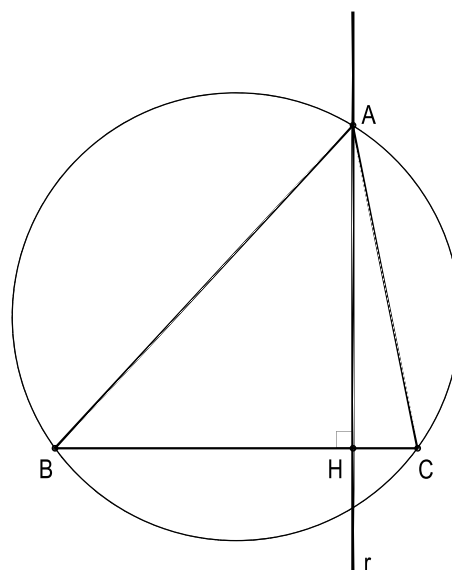


Figura 254

166.4 – No caso particular de o ponto considerado para a busca da reta de Simson ser o ponto  $M$ , diametralmente oposto a um vértice ( $A$ , na Figura 255), a reta de Simson é o próprio lado  $BC$ , oposto ao vértice  $A$  considerado, pois os triângulos  $AMB$  e  $AMC$  restarão retângulos em  $B$  e  $C$ , respectivamente, já que  $AM$  será um diâmetro. E, assim, as projeções  $N$ , sobre  $BC$  e  $B$  e  $C$ , sobre os outros dois lados, pertencerão todas ao lado  $BC$ .

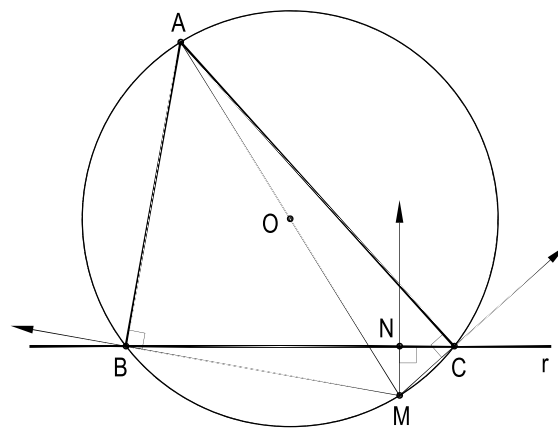


Figura 255

### 167 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares entre si a uma parábola é a própria diretriz da curva.

Demonstração: Seja  $J$  um ponto qualquer do lugar, isto é, tal que as tangentes  $t_1$  e  $t_2$  por ele traçadas à parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$  sejam perpendiculares entre si.

Consideremos os simétricos  $S_1$  e  $S_2$  do foco, em relação àquelas tangentes, naturalmente pertencentes à diretriz da parábola (número 152.6).

Porque o triângulo  $FS_1S_2$  é necessariamente retângulo, da própria hipótese, e porque  $t_1$  e  $t_2$  são as mediatrizes dos catetos (Figura 256),  $J$  será o circuncentro do triângulo, devendo, por isso (*Geometria Plana*, número 140.2), pertencer à hipotenusa  $S_1S_2$ .

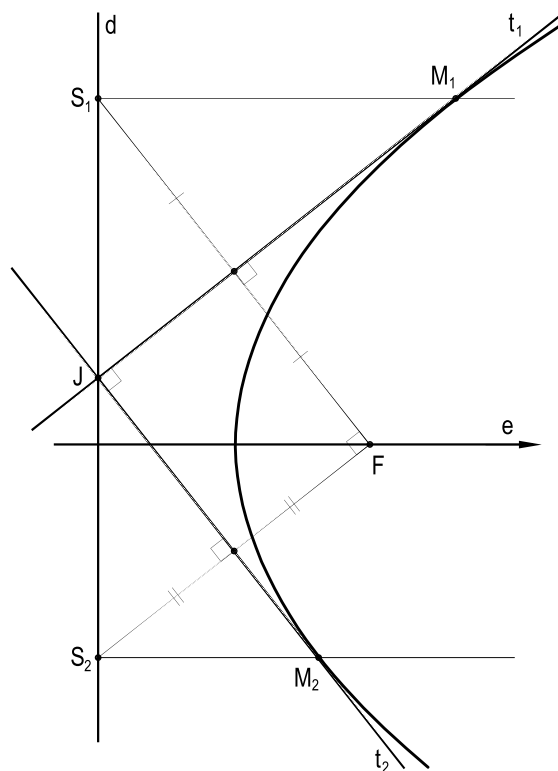


Figura 256

Mas como  $S_1$  e  $S_2$  são pontos da diretriz (número 152.6),  $J$  forçosamente pertence a essa reta.

Então, o lugar geométrico dos pontos dos quais se pode traçar tangentes perpendiculares entre si a uma parábola é a própria diretriz da curva.



# CAPÍTULO X

## PARÁBOLA COMO LIMITE DE UMA CÔNICA BIFOCAL

No presente capítulo, demonstraremos que uma parábola pode ser considerada, em determinadas condições, como a posição limite ocupada por uma elipse ou por uma hipérbole, isto é, por uma cônica bifocal que tenha um foco impróprio, o que permitirá importar da elipse, ou da hipérbole, um sem número de propriedades.

### 168 – Teorema

A parábola é a posição limite ocupada por uma elipse, quando são mantidos fixos um foco e o vértice mais próximo do eixo real, enquanto que o outro foco se afasta indefinidamente sobre esse eixo.

Demonstração: Consideremos uma elipse de eixo real  $AA'$  e focos  $F$  e  $F'$ , bem como o círculo diretor relativo ao foco  $F'$ .

Sabe-se (número 23.1) que um ponto  $M$  qualquer da elipse equidista do foco  $F$  e do círculo diretor relativo ao outro foco  $F'$  (Figura 257), o que permite anotar:

$$MF = MQ \quad (1)$$

Fixemos, então, o foco  $F$  e o vértice  $A$ , do eixo real, mais próximo de  $F$ , e façamos o outro foco  $F'$  descrever o eixo real, afastando-se cada vez mais do fixo.

Porque  $F$  e  $A$  são mantidos fixos, o ponto  $S$ , simétrico de  $F$  em relação a  $A$ , comum ao eixo real e ao círculo diretor considerado, resta também fixo (Figura 257).

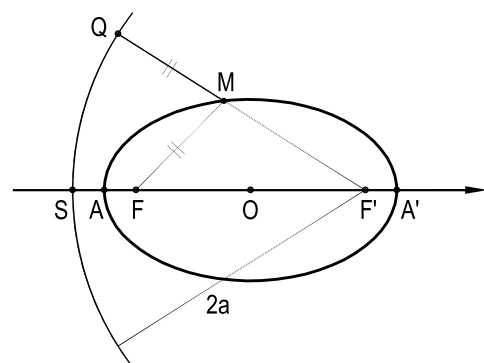


Figura 257

Durante o afastamento do foco  $F'$ , também o centro  $O$  da elipse se afasta, no mesmo sentido.

Pois então, quando  $F'$  chegar a ser o ponto impróprio da semirreta  $AF$  (Figura 258), o círculo diretor, relativo a  $F'$ , ter-se-á degenerado na reta  $d$  pertencente ao ponto  $S$  e perpendicular a  $AF$  (Figura 258). E, como a relação (1) permanece válida durante todo o movimento de  $F'$ , até nesta posição final, o segmento  $MQ$ , por ter seu suporte pertencente ao ponto impróprio  $F'_\infty$  da semirreta  $AF$ , há de ser paralelo a  $AF$ , e, por isso, perpendicular à reta  $d$ , medindo, assim, a distância do ponto  $M$  considerado a esta reta.

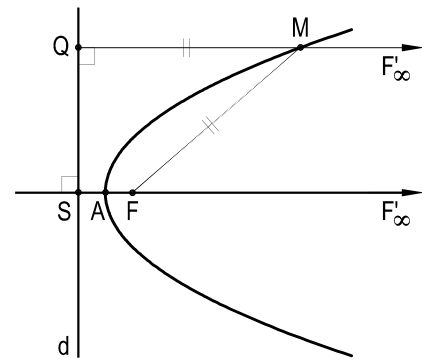


Figura 258

Nestas condições, a curva, inicialmente uma elipse, degenera na parábola do foco  $F$  e diretriz  $d$ , por ter seus pontos  $M$  equidistando desse ponto e dessa reta (Figura 258), ficando, pois, demonstrado o teorema.

## 169 – Corolários

169.1 – Mantidos fixos  $F$  e  $A$ , o deslocamento de  $F'$  para o infinito acarreta, também, que o centro  $O$  da elipse tenda a ser impróprio, na mesma direção, o que implica em que o círculo  $(O, OA)$ , principal da elipse, degenera, na posição limite, segundo a tangente  $w$ , às suas posições inicial, intermédias e final.

Ou seja, quando, nos termos aqui considerados, a elipse se converte em parábola, seu círculo principal degenera na tangente à parábola, em seu vértice (Figura 259).

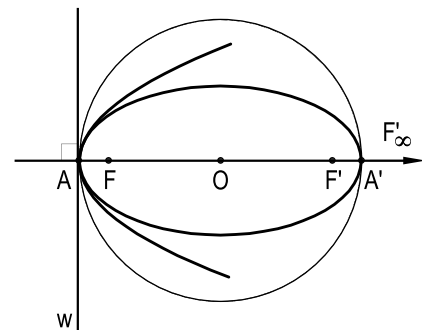


Figura 259

169.2 – A tangente à parábola num ponto corrente  $M$  é a bissetriz do ângulo formado pelo raio vetor de  $M$  e pela perpendicular baixada de  $M$  à diretriz (Figura 260).

Porque, ao se transformar a elipse em parábola, o segundo raio vetor  $MF'_\infty$  adquire a direção do eixo da parábola (Figura 260) e a bissetriz externa do ângulo formado pelos raios vetores (número 20) do ponto corrente  $M$  da elipse assume a posição de tangente à parábola limite, nesse ponto.

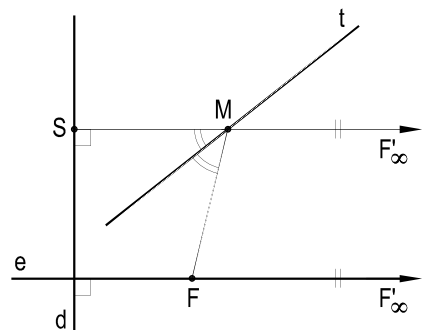


Figura 260

169.3 – O foco da parábola é o ponto médio do segmento determinado no eixo pela tangente e pela normal relativas a um ponto qualquer da curva.

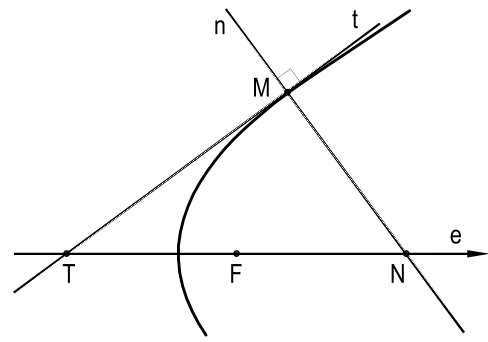


Figura 261

Porque na divisão harmônica existente entre os pés da tangente e da normal num qualquer de seus pontos e os dois focos da elipse (número 21.2), ao se transformar a elipse em parábola, um foco é impróprio, obrigando o outro a ocupar a posição de médio do segmento formado por aqueles pés (Figura 261).

169.4 – O lugar geométrico dos simétricos do foco de uma parábola em relação às tangentes a ela é a sua diretriz.

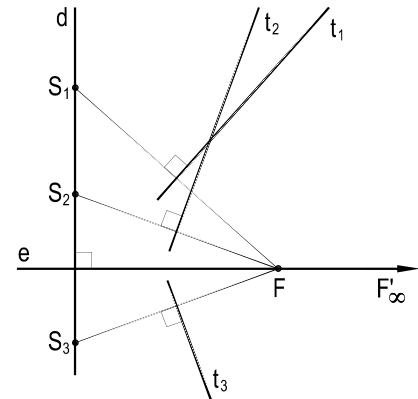


Figura 262

Porque a diretriz é a posição limite ocupada pelo círculo diretor relativo ao foco impróprio.

169.5 – A reta formada pelo ponto de contato de uma tangente genérica a uma parábola e pelo simétrico do foco em relação a essa tangente é paralela ao eixo da curva (Figura 263).

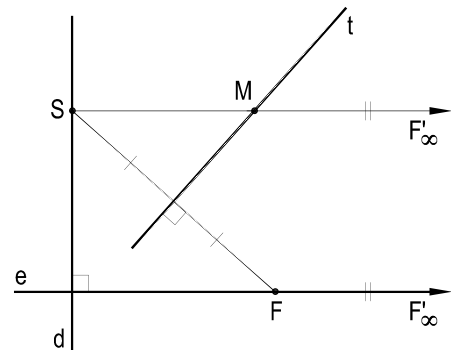


Figura 263

Porque o alinhamento, obrigatório, entre o simétrico S do foco F, o ponto de contato M e o segundo foco (número 21.4) da elipse resulta nesse paralelismo, por ser impróprio esse segundo foco  $F'_\infty$ .

169.6 – O lugar geométrico das projeções ortogonais do foco sobre as tangentes à parábola é a tangente a ela em seu vértice.

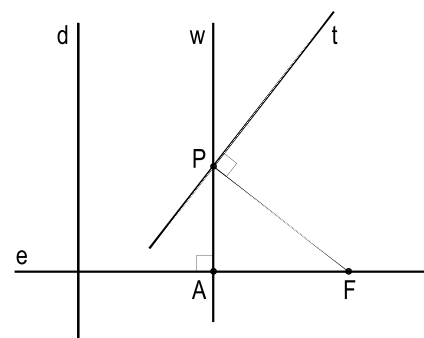


Figura 264

Porque essa tangente é (número 169.1) a posição limite ocupada pelo círculo principal da elipse, quando tem ela seu segundo foco  $F'$  rejeitado ao infinito, na direção do eixo real.

E como, segundo o teorema de La Hire, para a elipse (número 27), o círculo principal dessa curva é o lugar geométrico procurado, sua transformada, a reta w, tangente à parábola em seu vértice (Figura 264), é o lugar geométrico de tais projeções, para a posição limite da parábola.

169.7 – As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma parábola são isogonais em relação aos lados do ângulo formado pela reta que une o ponto exterior ao foco e pela semirreta com origem no ponto e direção e sentido iguais às do eixo da parábola.

Porque, conforme o primeiro teorema de Poncelet para a elipse (número 31), a reta que une o ponto exterior  $J$  (Figura 265) ao foco impróprio  $F'_\infty$  da elipse tem de ser paralela ao eixo  $e$  da parábola.

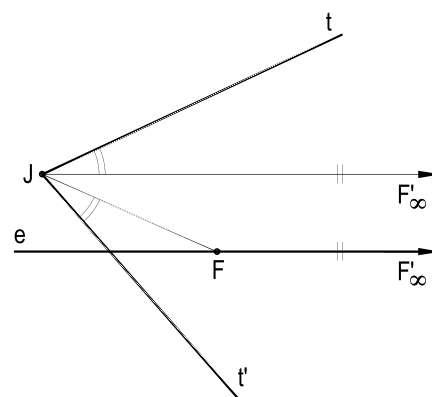


Figura 265

## 170 – Teorema

A parábola é a posição limite ocupada por uma hipérbole, quando são mantidos fixos um foco e o vértice mais próximo, enquanto que o outro foco se afasta indefinidamente sobre o eixo real.

Demonstração:

Consideremos uma hipérbole de focos  $F$  e  $F'$  e eixo real  $AA'$ , bem como o círculo diretor relativo ao foco  $F'$ .

Sabe-se (número 103.1) que um ponto  $M$  qualquer do ramo da hipérbole referente ao foco  $F$  equidista desse foco e do círculo diretor relativo ao outro foco  $F'$  (Figura 266), o que permite escrever:

$$MF = MQ \quad (1)$$

Mantendo fixos o foco  $F$  e o vértice  $A$ , mais próximo, façamos o segundo foco  $F'$  deslocar-se sobre o eixo real até o infinito.

Porque  $F$  e  $A$  permanecem fixos, resta fixo, também, o ponto  $S$ , simétrico de  $F$  em relação a  $A$  (Figura 266). Atenção para o fato de  $S$  pertencer (número 103.1) ao círculo diretor do foco  $F'$ .

Assim, quando o foco  $F'$ , em seu movimento, chegar a ser o ponto impróprio  $F'_\infty$  do eixo real (Figura 267), o círculo diretor relativo a ele ter-se-á transformado na reta  $d$ , que, passando por  $S$ , é perpendicular à reta  $AF$ .

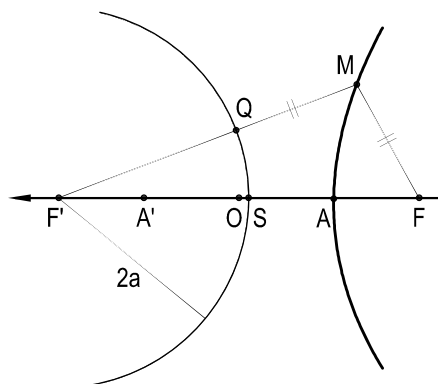


Figura 266

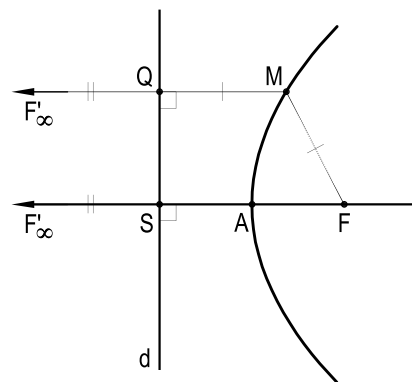


Figura 267

E, como a relação (1) permanece válida durante todo o movimento de  $F'$ , até sua posição final  $F'_\infty$  (Figura 267), por ter seu suporte pertencendo ao ponto impróprio  $F'_\infty$  da semirreta  $FA$ , o segmento  $MQ$  há de ser paralelo a essa semirreta e, então, perpendicular à reta  $d$ . Este segmento  $MQ$ , que mede a distância do ponto  $M$  corrente à reta  $d$ , sendo igual à sua distância ao ponto fixo  $F$ , assegura que a curva em estudo, nessa posição limite, é a parábola de diretriz  $d$  e foco  $F$  (Figura 267), ficando, assim, demonstrado o teorema.

## 171 – Corolários

171.1 – Mantidos fixos o foco  $F$  e o vértice  $A$ , o deslocamento de  $F'$  para o infinito acarreta que também o centro  $O$  da hipérbole tenda a ser impróprio, o que implica em que o círculo principal  $(O, OA)$  da hipérbole venha a se degenerar, na situação limite, segundo a tangente  $w$  a esse círculo no ponto  $A$  (Figura 268).

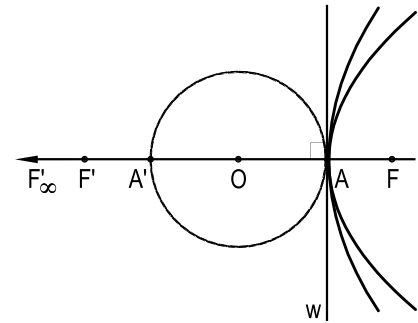


Figura 268

Assim, quando a hipérbole, nas condições em estudo, transforma-se em parábola, seu círculo principal passa a ser a tangente à parábola em seu vértice (Figura 268).

171.2 – A tangente à parábola num qualquer de seus pontos  $M$  é a bissetriz interna do ângulo formado por seu raio vetor  $MF$  e pela perpendicular  $MS$  baixada à diretriz  $d$  (Figura 269).

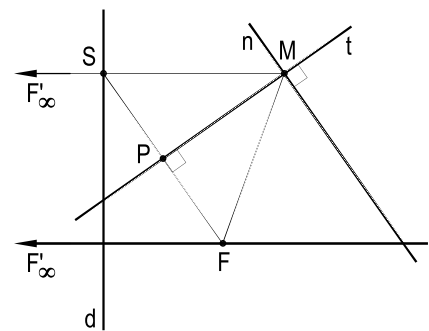


Figura 269

Porque ao se transformar a hipérbole em parábola é este o ângulo formado pelos raios vetores  $MF$  e  $MF'_\infty$  (Figura 269). E, como se sabe (número 100), a bissetriz interna dos raios vetores da hipérbole é a tangente, em  $M$ , à curva.

171.3 – O foco da parábola é o ponto médio do segmento determinado em seu eixo pelos pés da tangente e da normal num qualquer de seus pontos.

Porque, para atender a divisão harmônica existente entre os dois focos da hipérbole e os pés da tangente e da normal num qualquer de seus pontos (número 101.2), quando um dos focos fica impróprio, o outro passa a ser o ponto médio do segmento  $TN$  formado por aqueles pés (Figura 270).

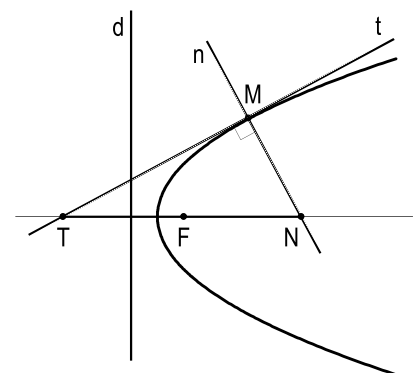


Figura 270

171.4 – O lugar geométrico dos simétricos dos focos de uma parábola em relação às suas tangentes é sua diretriz (Figura 271).

Porque a diretriz é a posição limite ocupada pelo círculo diretor relativo ao foco impróprio (número 170).

171.5 – A reta formada pelo ponto de contato de uma tangente qualquer a uma parábola e pelo simétrico do foco em relação a essa tangente é paralela ao eixo da curva (Figura 272).

Porque o alinhamento obrigatório – para qualquer ponto da hipérbole entre o simétrico de um foco em relação a uma tangente, seu ponto de contato e o outro foco (número 101.3) – implica nesse paralelismo, por ser impróprio o segundo foco, na posição limite da parábola (Figura 272).

171.6 – O lugar geométrico das projeções ortogonais do foco de uma parábola sobre suas tangentes é a tangente à curva em seu vértice (Figura 273).

Porque tal tangente é (número 171.1) a posição limite ocupada pelo círculo principal da hipérbole, quando ela degenera em parábola. E, conforme o teorema de La Hire (número 108), o círculo principal dessa curva é o lugar geométrico em estudo.

171.7 – As tangentes traçadas por um ponto exterior a uma parábola são isogonais em relação aos lados do ângulo formado pela reta que une esse ponto ao foco e a paralela ao eixo traçada pelo ponto exterior.

Porque, conforme o primeiro teorema de Poncelet (número 112), a reta que une o ponto exterior  $J$  (Figura 274) ao foco impróprio  $F'_\infty$  da hipérbole há de ser paralela ao eixo  $e$  da parábola.

Atenção para o fato de serem iguais os sentidos da semirreta paralela considerada  $e$  do eixo. (Figura 274).

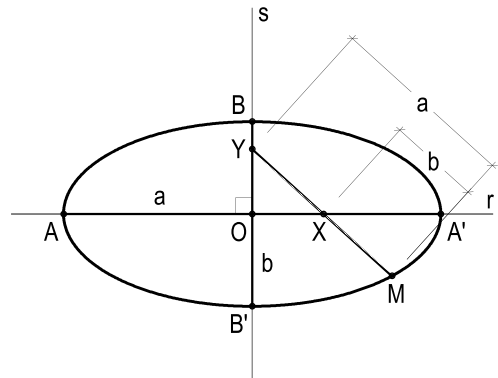


Figura 67

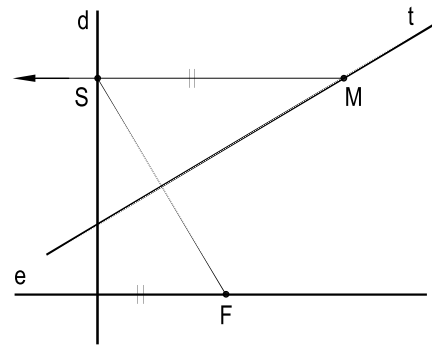


Figura 272

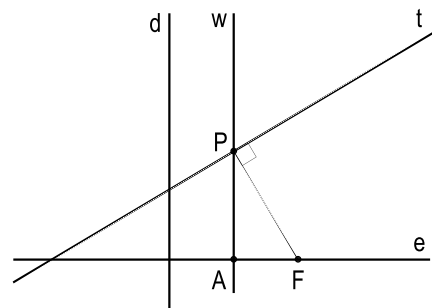


Figura 273

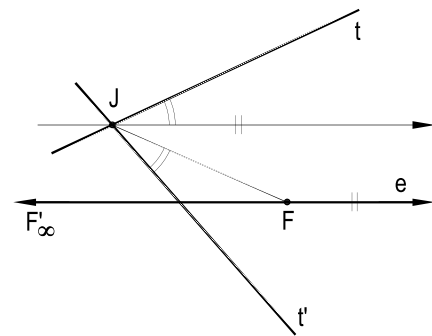


Figura 274

# CAPÍTULO XI

## DIÂMETROS DA PARÁBOLA

### 172 – Diâmetros da parábola

Pela própria definição geral (número 5), diâmetro da parábola relativo a determinada direção é a linha que contém os pontos médios de todas as cordas da parábola com aquela direção.

### 173 – Teorema

O lugar geométrico dos pontos médios das cordas de uma parábola paralelas a uma reta genérica é uma semirreta paralela ao eixo, limitada pela parábola e situada em seu interior.

Demonstração: Consideremos uma corda genérica  $NN'$  de uma parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$ , bem como os círculos pertencentes ao foco, tendo por centros os extremos  $N$  e  $N'$  daquela corda.

Tais círculos, evidentemente tangentes à diretriz (número 152.7), voltam a se cortar no ponto  $S$ , simétrico de  $F$ , em relação a  $NN'$  (Figura 275).

Sendo  $\bar{N}$  e  $\bar{N}'$  os pontos de contato dos dois círculos considerados com a diretriz, porque a reta  $SF$  é o eixo radical desses círculos, o ponto  $\bar{M}$ , segundo o qual ela corta a diretriz, é o médio do segmento  $\bar{N}\bar{N}'$  (Figura 275) (*Geometria Plana*, número 254).

Assim, a paralela ao eixo da parábola, traçada por  $\bar{M}$ , por ser suporte da base média do trapézio retângulo  $\bar{N}NN'\bar{N}'$ , conterá o ponto  $M$ , médio da corda  $NN'$  (*Geometria Plana*, número 87) (Figura 275).

E, se considerarmos outras cordas paralelas a  $NN'$ , porque  $F$  é fixo, a reta  $F\bar{M}$ , sempre perpendicular à direção comum  $r$  dessas cordas (Figura 275), permanecerá fixa.

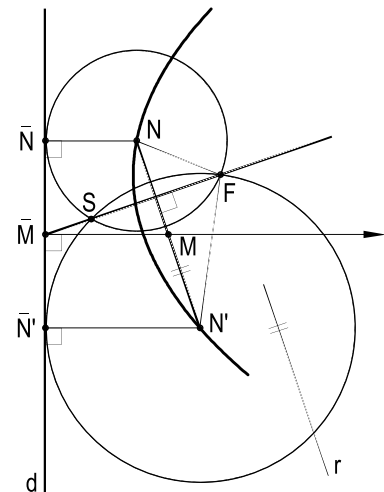


Figura 275

Mas então, sendo fixo o ponto  $\bar{M}$ , os pontos  $M$ , médios de todas as cordas paralelas à reta  $r$  (Figura 276), pertencerão à paralela ao eixo da parábola, traçada por  $\bar{M}$ .

E porque todos os pontos médios das cordas em estudo são, evidentemente, interiores à parábola, da paralela ao eixo pertencente ao ponto  $\bar{M}$ , é útil apenas a parte  $Jx$  interior à parábola (Figura 276).

Então, o lugar geométrico dos pontos médios das cordas de uma parábola paralelas a uma reta genérica é uma semirreta paralela ao eixo, limitada pela parábola e situada em seu interior.

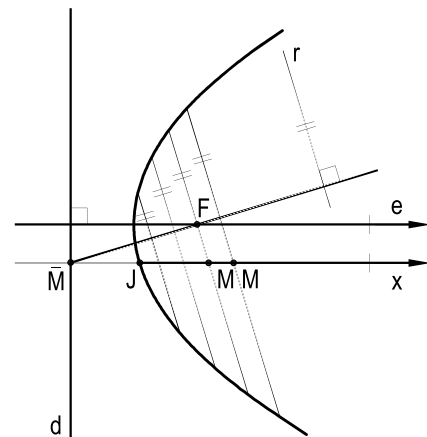


Figura 276

## 174 – Corolário

A parábola possui uma infinidade de diâmetros. Todos eles são semirretas paralelas ao eixo, limitadas pela curva, com o mesmo sentido do eixo.

De fato, basta observar que a direção  $r$  das cordas acima estudadas (número 173) foi arbitrária, sendo válida, pois, a propriedade para qualquer sistema de cordas paralelas da parábola.

## 175 – Observações

175.1 – O diâmetro relativo a uma direção  $r$  é denominado diâmetro conjugado daquela direção.

175.2 – Há apenas uma direção à qual não corresponde diâmetro, na parábola: a própria direção do eixo. Pois, basta ver que toda reta paralela ao eixo possui apenas um ponto em comum com a curva. Ou seja, nem cordas há, com tal direção.

175.3 – Para estudar os diâmetros da parábola, poderíamos considerá-la como posição limite ocupada por uma elipse, ou por uma hipérbole, que tivesse fixos um foco e o vértice real mais próximo e o outro foco, móvel, afastando-se indefinidamente do primeiro (números 168 e 170), sobre o suporte do eixo real.

Como, nessas condições, o próprio centro da elipse, ou da hipérbole, chegaria a ser o ponto impróprio do eixo transversal, os diâmetros da elipse, ou da hipérbole, sendo todos pertencentes ao centro dessa cônica, transforma-se-iam, na posição limite da parábola, em semirretas paralelas ao eixo da curva, o que comprova a proposição.



## 176 – Propriedades

176.1 – A tangente à parábola no extremo de um diâmetro é paralela às cordas que definem esse diâmetro.

Porque tal tangente  $t$  é a posição limite ocupada por essas cordas  $NN'$ , à medida em que caminham para chegar à posição da tangência (Figura 277).

Assim, a tangente à parábola num ponto  $M$  da curva e o diâmetro  $Mx$ , relativo a esse ponto, têm direções conjugadas (número 175.1).

176.2 – Dadas duas cordas paralelas  $N_1N'_1$  e  $N_2N'_2$  de uma parábola, as secantes  $N_1N_2$  e  $N'_1N'_2$  à curva, formadas pelos extremos correspondentes dessas duas cordas, cortam-se sobre a reta que serve de suporte ao diâmetro relativo àquelas cordas.

Porque (Figura 278) os pontos  $N_1, N'_1$  e  $M_1$ , sendo homotéticos respectivamente de  $N_2, N'_2$  e  $M_2$ , obrigam a existência de um ponto  $J$  comum às retas  $N_1N_2, N'_1N'_2$  e  $M_1M_2$ .

Tal ponto  $J$  é o centro dessa homotetia.

E a reta formada pelos pontos  $M_1$  e  $M_2$ , médios das cordas consideradas, é a que serve de suporte ao diâmetro relativo a essas cordas (Figura 278).

176.3 – As tangentes nos extremos de uma corda cortam-se sobre a reta suporte do diâmetro relativo a essa corda.

De fato, basta ver que essas tangentes  $t$  e  $t'$  (Figura 279) podem ser consideradas como as posições limites ocupadas por duas secantes  $N_1N_2$  e  $N'_1N'_2$  (Figura 278) formadas pelos extremos de duas cordas paralelas  $N_1N'_1$  e  $N_2N'_2$  da parábola (número 176.1), quando ambas tendem às respectivas posições de tangência à curva.

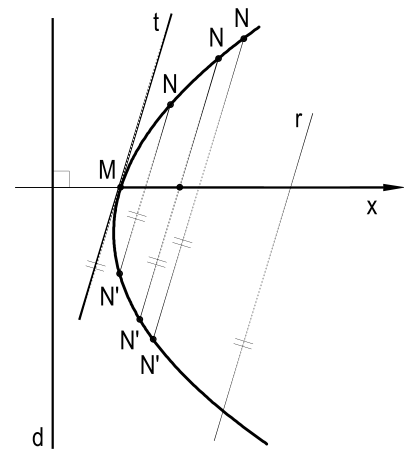


Figura 277

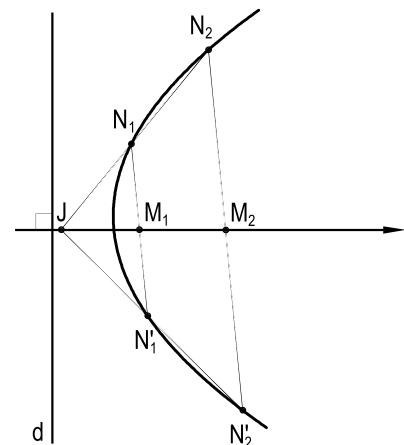


Figura 278

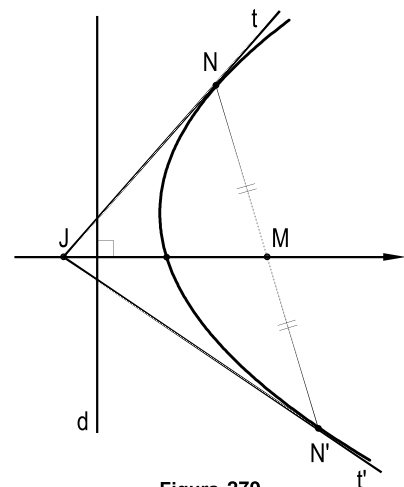


Figura 279

Esta propriedade pode, aliás, ser provada diretamente. Para tanto, consideremos as tangentes  $t$  e  $t'$  nos extremos  $N$  e  $N'$  de uma corda genérica  $NN'$  de uma parábola, bem como os simétricos  $S$  e  $S'$  do foco  $F$ , em relação àquelas tangentes (Figura 280).

Porque  $t$  e  $t'$  são as mediatrizes dos lados  $FS$  e  $FS'$  do triângulo  $FSS'$ , o ponto  $J$  comum a elas é o circuncentro desse triângulo. Ora, a mediatriz de  $SS'$ , sendo o suporte da base média do trapézio  $SS'N'N$ , passa pelo ponto médio do lado  $NN'$  (*Geometria Plana*, número 87). Assim, essa mediatriz passa por  $J$  (Figura 280). E, por ser paralela ao eixo e passar pelo ponto médio da corda  $NN'$ , ela é a reta que serve de suporte ao diâmetro relativo àquela corda.

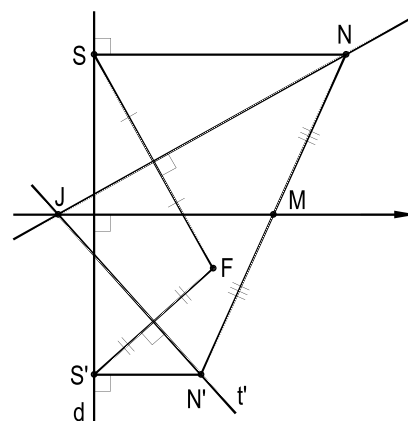


Figura 280

176.4 – Reciprocamente, a reta formada pelo ponto  $J$  comum a duas tangentes  $t$  e  $t'$  e pelo ponto médio  $M$  da corda que une os pontos de contato  $N$  e  $N'$  daquelas tangentes serve de suporte ao diâmetro relativo à corda  $NN'$ , sendo, pois, paralela ao eixo da parábola (Figura 280).

## 177 – Teorema

Sejam  $N$  e  $N'$  os pontos de contato de duas tangentes  $JN$  e  $JN'$  a uma parábola e  $R$  o ponto médio da corda  $NN'$ , o ponto comum à reta  $JR$  e à parábola é o médio  $M$  do segmento  $JR$ .

Demonstração: Sejam  $JN$  e  $JN'$  duas tangentes quaisquer a uma parábola e  $R$  o ponto médio da corda  $NN'$  formada pelos pontos de contato dessas tangentes.

Sabe-se (número 176.4) que a reta  $JR$  serve de suporte ao diâmetro relativo à corda  $NN'$ .

Pois, seja  $M$  (Figura 281) o ponto comum a esse diâmetro e à parábola e consideremos a tangente  $t''$ , à curva, nesse ponto  $M$ , bem como a reta  $GH$  formada pelo ponto comum às tangentes  $t$  e  $t''$  e pelo ponto  $H$  médio da corda  $MN$ .

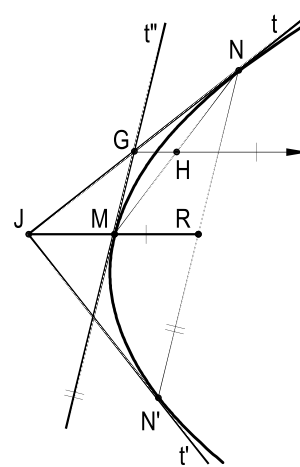


Figura 281

Porque  $GH$  é paralela a  $JR$  (número 176.4), no triângulo  $JNM$ ,  $G$  será o ponto médio do lado  $JN$  (*Geometria Plana*, número 85).

E, porque  $t''$  é paralela a  $NN'$  (número 176.1), no triângulo  $JNR$  (Figura 281),  $M$  será o ponto médio do lado  $JR$ .

Então, sendo  $N$  e  $N'$  os pontos de contato de duas tangentes  $JN$  e  $JN'$  a uma parábola e  $R$  o ponto médio da corda  $NN'$ , o ponto comum à reta  $JR$  e à parábola é o médio  $M$  do segmento  $JR$  (Figura 282), ficando, pois, demonstrado o teorema.

### 178 – Corolário

O extremo  $M$  do diâmetro  $MR$  relativo a uma corda qualquer  $NN'$  de uma parábola é o ponto médio do segmento  $JR$  formado pelo ponto  $J$  comum às tangentes nos extremos  $N$  e  $N'$  da corda considerada e pelo ponto médio  $R$  dessa corda (Figura 282).

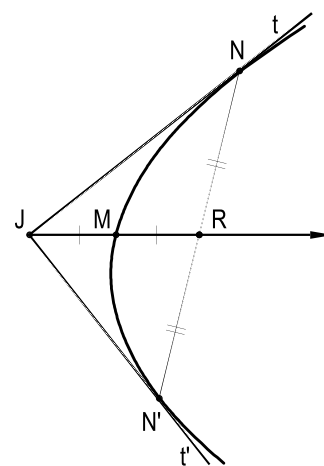


Figura 282

### 179 – Construção direta da parábola a partir de duas tangentes e de seus pontos de contato

Dadas duas tangentes genéricas  $t$  e  $t'$  a uma parábola e seus pontos de contato  $N$  e  $N'$ , para construir diretamente a curva, isto é, sem obter o foco nem a diretriz, basta obter novas tangentes e seus pontos de contato. Para tanto, une-se os pontos  $N$  e  $N'$  e determina-se o ponto  $R$ , médio de  $NN'$ , e o ponto  $M$ , médio de  $JR$  (Figura 283).

Sabe-se que  $M$  pertence à parábola (número 178) e que a reta  $t_1$ , pertencente a  $M$  e paralela à corda  $NN'$ , é tangente à parábola (número 176.1).

Obtida esta nova tangente  $t_1$ , repete-se a operação acima descrita para o par de tangentes  $t$  e  $t_1$ , determinando-se, então, novo ponto corrente  $M'$  e nova tangente  $t_2$  e para o par de tangentes  $t'$  e  $t_1$ , obtendo-se, então, novo ponto corrente  $M''$  e nova tangente  $t_3$  (Figura 283).

As novas tangentes, assim determinadas, e seus pontos de contato permitem reiterar o processo, tanto quanto se julgue necessário, para conseguir ideal precisão no traçado da curva.

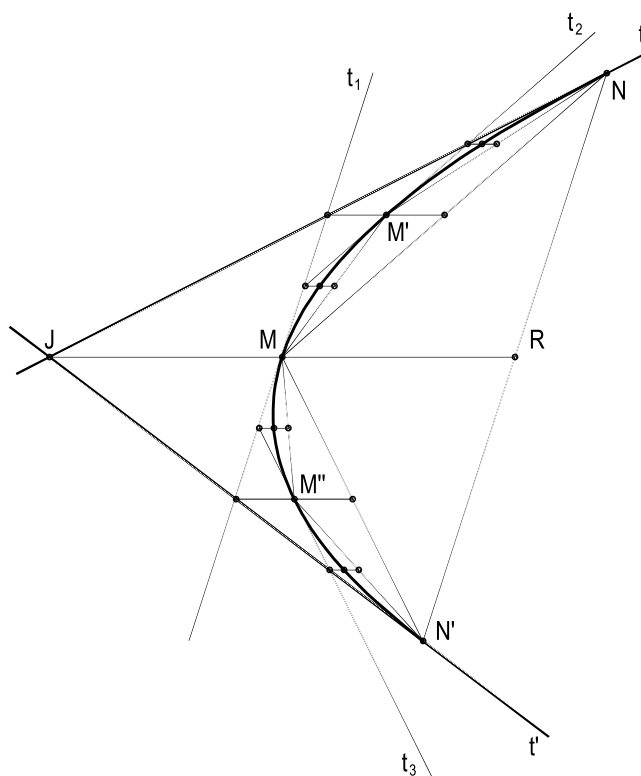


Figura 283

## 180 – Observação

O processo acima apresentado (número 179) para a construção direta da parábola, a partir de duas tangentes e de seus pontos de contato, ou seja, para concordar, diretamente, duas retas por um arco de parábola de extremos conhecidos, proporciona, apenas, pontos do arco de parábola limitado pelas duas tangentes.

Quando, no entanto, for preciso determinar pontos da curva situados além dos extremos daquele arco, para utilizar o mesmo processo de construção lá apresentado, basta obter novas tangentes à parábola, nos prolongamentos daquele arco.

Para analisar essa questão, admitamos que sejam conhecidas as tangentes  $t$  e  $t'$  e seus pontos de contato  $N$  e  $N'$  (Figura 284) e que se deseje estender a parábola além do ponto  $N'$ .

Consideremos, então, a corda  $NN'$  paralela à tangente  $t'$  (Figura 284). Sabe-se que o diâmetro relativo a essa corda passa por  $N'$  (número 176.1) e é (número 174) paralelo a  $JR$ , encontrando a corda  $NN'$ , naturalmente, em seu ponto médio  $\bar{R}$ . E que, além disso, as tangentes  $t$  e  $\bar{t}$ , nos extremos da corda  $NN'$ , concorrem num ponto  $\bar{J}$  situado sobre a reta suporte do diâmetro  $N'R$  considerado (número 176.3).

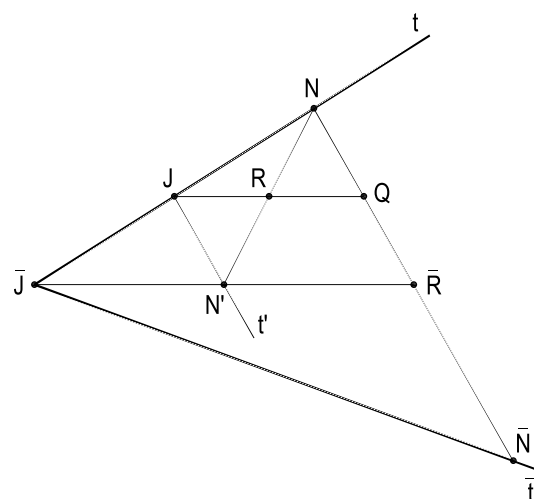


Figura 284

Observando, finalmente, que os pontos  $R$ ,  $J$ ,  $Q$  e  $\bar{R}$  são os médios dos segmentos  $NN'$ ,  $N\bar{J}$ ,  $N\bar{R}$  e  $NN'$ , respectivamente (Figura 284), conclui-se que:  $N\bar{J} = 2 \cdot NJ$  e  $NN' = 4 \cdot JN'$

Assim, conhecidas as tangentes  $t$  e  $t'$  e seus pontos de contato  $N$  e  $N'$ , para obter um ponto corrente  $\bar{N}$ , no prolongamento do arco  $NN'$ , e a tangente  $\bar{t}$  nesse ponto, basta determinar o ponto  $\bar{J}$ , simétrico de  $N$  em relação a  $J$ , e aplicar sobre a paralela a  $t'$ , traçada por  $N$ , o segmento  $N\bar{N} = 4 \cdot JN'$  (Figura 285).

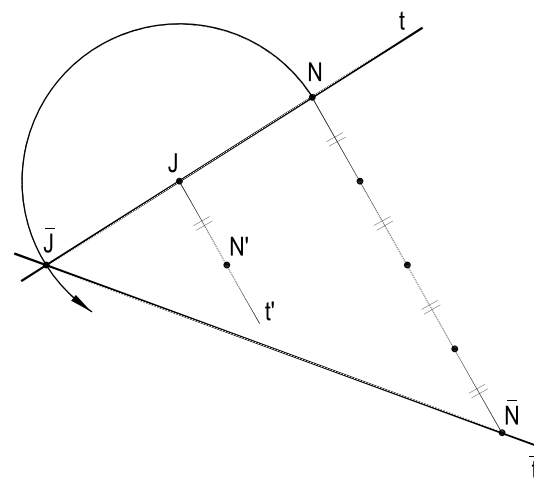


Figura 285

E, para obter pontos correntes entre  $N'$  e  $\bar{N}$ , basta voltar a aplicar o processo direto de construção (número 179).

## 181 – Determinação do foco e da diretriz de uma parábola dada por duas tangentes e seus pontos de contato

Dadas duas tangentes genéricas  $t$  e  $t'$  a uma parábola e seus pontos de contato  $N$  e  $N'$ , para determinar o foco e a diretriz dessa parábola, deve-se obter, inicialmente, a direção do eixo, o que se consegue unindo o ponto  $J$ , comum às tangentes, ao ponto  $R$  médio da corda  $NN'$  (número 176.3).

Como cada tangente deve ser (número 151) a bissetriz do ângulo formado pelo raio vetor do ponto de contato com a semirreta de direção igual à do eixo, mas com sentido oposto ao dele, deve-se traçar, por  $N$  e por  $N'$ , as paralelas  $r$  e  $r'$  ao eixo, ou seja, ao diâmetro  $JR$  (Figura 286).

Constrói-se, a seguir, as simétricas, em relação às tangentes, de cada uma dessas paralelas traçadas por  $N$  e  $N'$ , as quais produzem, por interseção, o foco  $F$  da parábola (número 152.1).

Obtido o foco, determina-se seu simétrico  $S$ , em relação a uma das tangentes (Figura 286), o que se consegue traçando, por  $F$ , a perpendicular a  $JN$ . E, então, traça-se, por  $S$ , a perpendicular ao diâmetro  $JR$ , que será a diretriz procurada  $d$ .

Como simples adição, é imediato, então, obter o vértice  $A$  da parábola, médio do segmento  $FD$ , perpendicular do foco à diretriz (Figura 286).

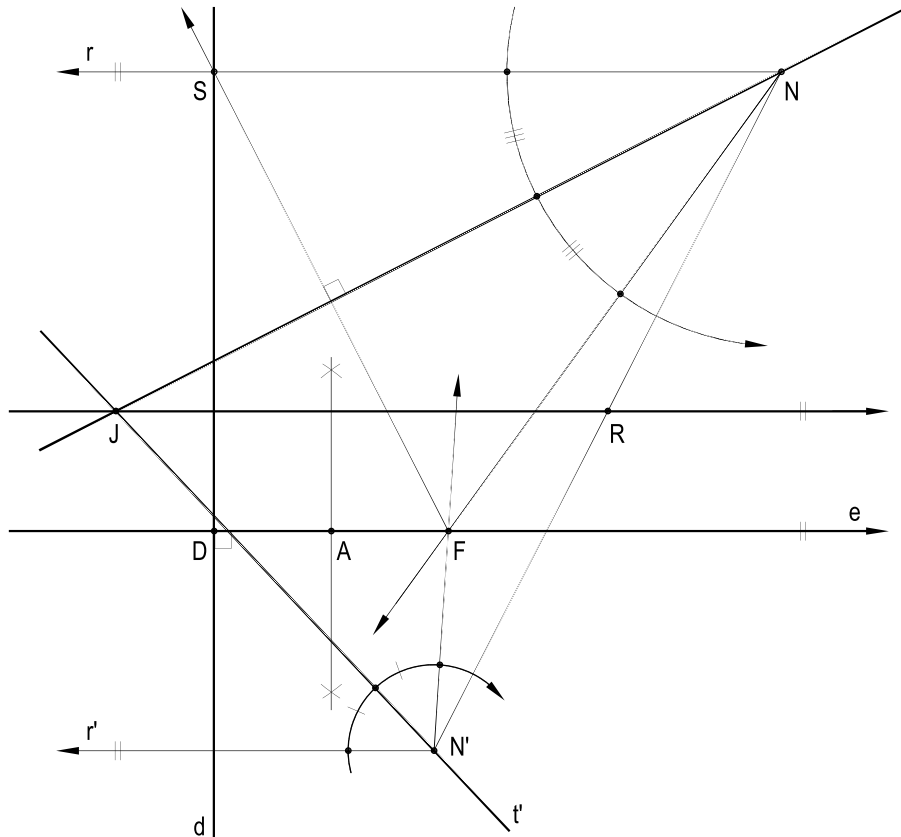


Figura 286

## 182 – Determinação da parábola dada por uma corda e pelo diâmetro relativo a essa corda

Sendo dados, de uma parábola, uma corda  $NN'$  e o diâmetro  $Mx$ , relativo a essa corda, é bem simples a construção das tangentes  $t$  e  $t'$  à parábola, nos pontos  $N$  e  $N'$ .

De fato, porque o extremo  $M$  do diâmetro deve ser o ponto médio do segmento formado pelo ponto comum àquelas tangentes e pelo ponto médio da corda (número 178), basta (Figura 287) construir o simétrico  $J$  do ponto  $R$ , médio da corda  $NN'$ , em relação a  $M$  e unir  $J$  aos extremos  $N$  e  $N'$  da corda, para obter as tangentes  $t$  e  $t'$ , nos pontos  $N$  e  $N'$  (número 177).

E, uma vez determinadas as tangentes  $t$  e  $t'$ , torna-se imediato obter o foco e a diretriz da parábola (número 181) ou construir diretamente a curva (números 179 e 180).

Convém observar que, em verdade, para determinar a parábola, basta fornecer uma corda  $NN'$  e o extremo  $M$  do diâmetro correspondente a essa corda.

De fato, basta ver que, dados uma corda e o diâmetro correspondente (Figura 287), é condição natural de possibilidade a pertinência do diâmetro ao ponto médio da corda.

Assim, como simples variação do problema, poderiam ter sido dados o diâmetro  $Mx$ , um ponto corrente  $N$  e a direção  $r$  conjugada daquele diâmetro (Figura 288).

Para retornar aos dados iniciais bastaria, evidentemente, traçar a paralela a  $r$ , por  $N$ , obtendo, por interseção com o diâmetro dado, o ponto  $R$  e completar a corda  $NN'$ , pela simetria de  $N$  em relação a  $R$  (Figura 288). Com isso, passaríamos a conhecer uma corda  $NN'$  da parábola procurada e o diâmetro  $Mx$  a ela correspondente.

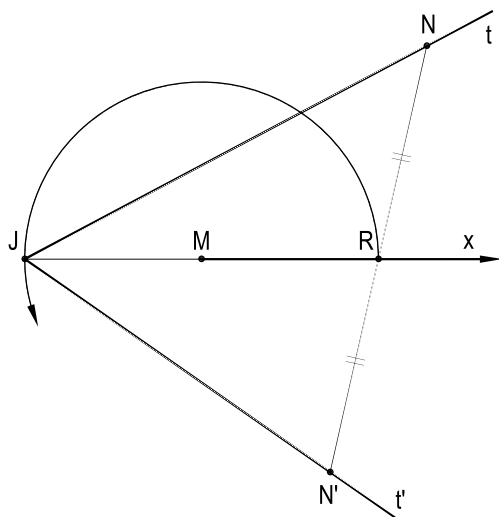


Figura 287

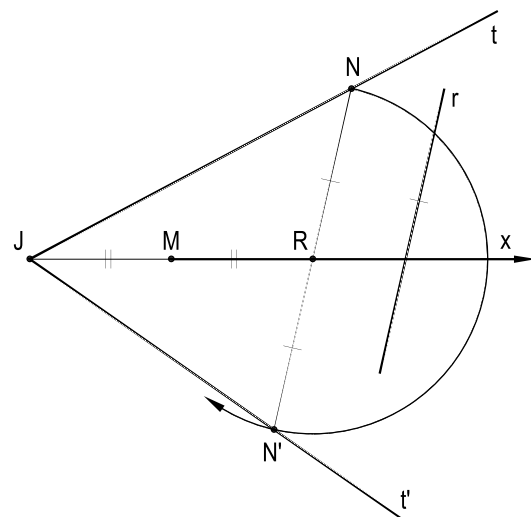


Figura 288

# CAPÍTULO XII

## SEÇÕES CÔNICAS

### 183 – Superfícies tangentes

Já estudamos (*Geometria Espacial*, números 184, 185, 186 e 187) as tangências entre planos e superfícies. Passemos, agora, generalizando, a analisar as tangências entre duas superfícies mais complexas que o plano.

Duas superfícies são ditas tangentes quando se tocam, mas não se atravessam.

Assim, duas superfícies tangentes podem ter apenas um ponto em comum, como nos exemplos indicados na Figura 289 que apresenta uma superfície esférica (O) tangente a um plano ( $\pi$ ) ou duas superfícies esféricas (O) e (O') tangentes no ponto (T); ou podem ter uma linha em comum, como, por exemplo, nos casos mostrados, na Figura 290, de uma esfera (O) com uma superfície cônica (c), ou de uma superfície esférica (O) com uma superfície cilíndrica (s), tangentes, em ambos os casos, segundo uma linha ( $\ell$ ).

O ponto ou a linha, elementos únicos, em cada caso, comuns às duas superfícies consideradas são denominados, respectivamente, pontos ou linhas de contato, ou de tangência, entre as duas superfícies.

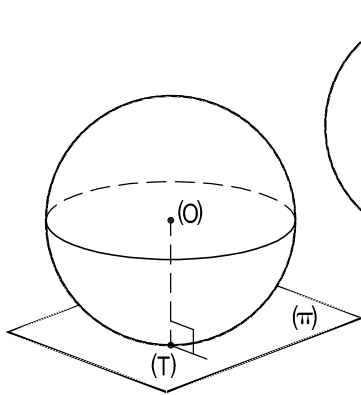


Figura 289

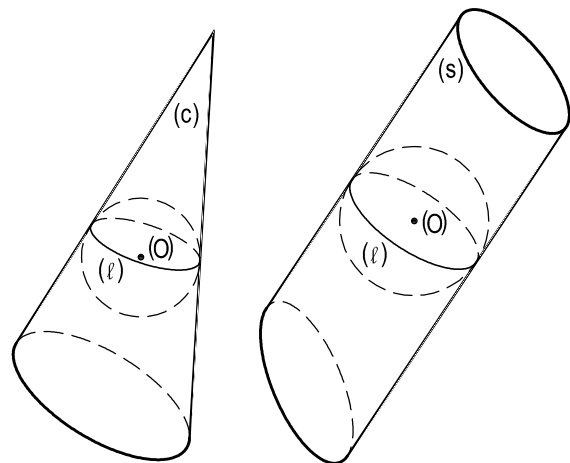


Figura 290

## 184 – Inscrição de uma esfera num cone de revolução

Diz-se que uma esfera está inscrita num cone de revolução quando ela é tangente a todas as geratrizes do cone e à sua base (Figura 291).

Isto implica em dizer que as superfícies esférica e cônica consideradas são tangentes.

Tão importante será esta inscrição, em estudos adiante abordados, que merecem serem destacadas algumas propriedades dela resultantes:

184.1 – O centro (O) da esfera inscrita pertence ao eixo (V)(H) do cone (Figura 291).

184.2 – Todos os pontos (T) de contato das duas superfícies pertencem, naturalmente, às geratrizes do cone e ao círculo (c) de contato dessas duas superfícies.

184.3 – Este círculo (c) pertence a um plano perpendicular ao eixo do cone (Figura 291).

184.4 – Todos os segmentos  $\overline{(V)(T)}$ , de geratrizes do cone, tangentes à esfera inscrita, são iguais, como geratrizes do cone de revolução de vértice (V) e base (c) (Figura 291).

184.5 – Vale a pena também ressaltar a igualdade de  $\overline{(A)(H)} = \overline{(A)(T)}$  entre as tangentes de um ponto (A) qualquer da periferia da base do cone à esfera inscrita (Figura 291), que, aliás, vale, é claro, para todos os pontos da circunferência dessa base.

## 185 – Observação

Mesmo quando se considera a esfera (O) inscrita num cone oblíquo, extraído de uma superfície cônica de revolução (Figura 292), perdura a igualdade das tangentes  $\overline{(A)(T)}$  e  $\overline{(A)(J)}$  de um ponto (A) qualquer da periferia da base à superfície da esfera inscrita, embora varie seu valor com o movimento do ponto (A), ao longo da elipse, periferia da base, ao contrário daquela  $\overline{(A)(H)} = \overline{(A)(T)}$  abordada (Figura 291) para os cones de revolução (número 184.5, acima), esta de valor constante, durante o movimento de (A).

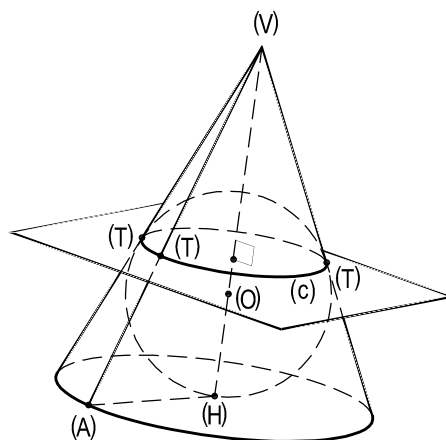


Figura 291

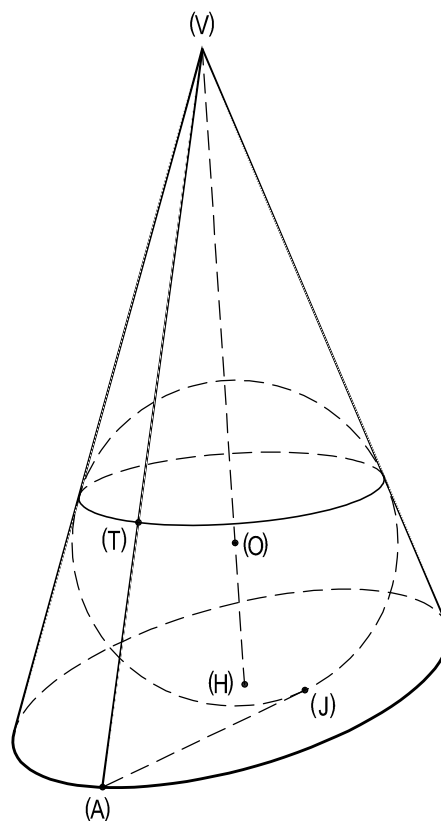


Figura 292



## 186 – O estudo das seções cônicas

Desde a Antiguidade o assunto despertou interesse entre geômetras e matemáticos, tendo sido tema de especial importância para o matemático grego Menecmo, da Escola de Cízico, ao qual se atribui a descoberta das curvas cônicas, mesmo que, à época, não tivessem elas, ainda, essa denominação.

Seus estudos, limitados, no entanto, apontaram a elipse, a parábola e a hipérbole como seções planas em cones circulares retos por planos perpendiculares a uma de suas geratrizes. Apenas cones circulares retos foram, então, analisados.

Segundo Menecmo, tais seções decorriam, quanto a suas naturezas, do fato de o ângulo entre geratrizes opostas da seção meridiana do cone ser respectivamente menor, igual ou maior que o ângulo reto (Figuras 293, 294 e 295).

Assim, sempre para uma seção por um plano  $(\pi)$  perpendicular a uma geratriz  $(V)(A)$  de um cone circular reto, o resultado seria uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole conforme, respectivamente, o ângulo  $\hat{\alpha}$  entre duas geratrizes opostas  $(V)(A)$  e  $(V)(B)$  fosse agudo, reto ou obtuso (Figuras 293, 294 e 295).

As limitações dessas conclusões, vinculadas apenas a seções por planos perpendiculares a uma geratriz, padeciam ainda, da identificação de um só ramo para as hipérboles, muito embora, é claro, os dois ramos da curva decorrente da seção em questão estivessem presentes.

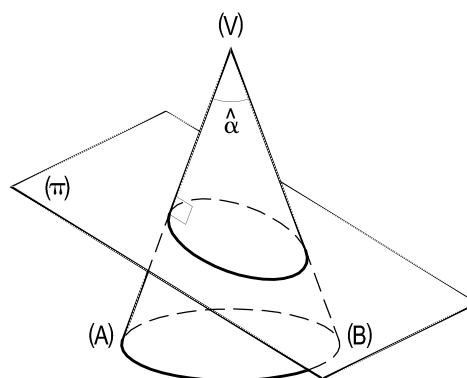


Figura 293

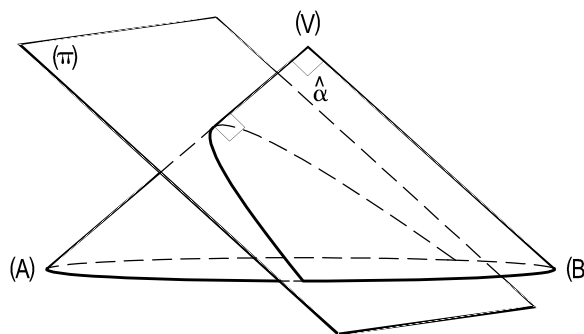


Figura 294

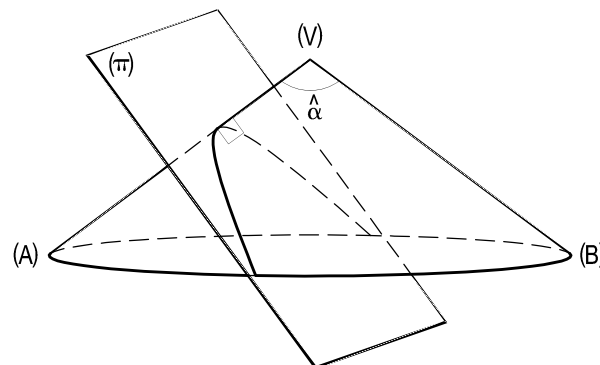


Figura 295

Pouco menos de dois séculos após, surgiram os estudos de Apollonius de Perga, matemático e astrônomo, grego também, da Escola de Alexandria, que aprofundou-se na matéria a ponto tal de ter ficado conhecido, por isso, e não só, como o Grande Geômetra. Pena que importante parte de seus estudos escritos tenha se perdido, restando a respeito deles apenas referências, sempre muito elogiosas.

Coube a Apollonius generalizar os estudos iniciais desenvolvidos por Menecmo, abandonando a limitada análise dos planos perpendiculares a geratrizes de cones circulares retos, para a obtenção das seções cônicas.

São dele as análises que comprovam que, num mesmo cone de revolução, independentemente do ângulo formado por duas de suas geratrizes opostas, como defendia Menecmo, pode-se obter seções elíticas, parabólicas ou hiperbólicas, em função da variação do ângulo que o plano secante forma com o eixo do cone.

Foi, também, Apollonius que, substituindo a superfície cônica de revolução de uma só folha pela de duas folhas, comprovou que a hipérbole é composta por dois ramos (ver Figura 296), ao contrário do que, como antes se entendia, serem duas hipérboles as obtidas por uma única seção plana nessas superfícies.

Apollonius estendeu, ainda, seus estudos para cones oblíquos.

Mas foi Dandelin que, séculos depois, apresentou demonstrações simples e claras para as propostas de Apollonius quanto às cônicas.

Germinal Pierre Dandelin, com colaboração de seu colega Adolphe Quetelet, ambos belgas, conseguiu, com o emprego de tangentes a esferas, demonstrar as seções elítica e hiperbólica por planos a superfícies cônicas de revolução, tendo cabido ao matemático inglês Pierce Morton, anos depois, instituir, com raciocínio semelhante ao utilizado por Dandelin, a seção plana parabólica a uma superfície cônica de revolução.

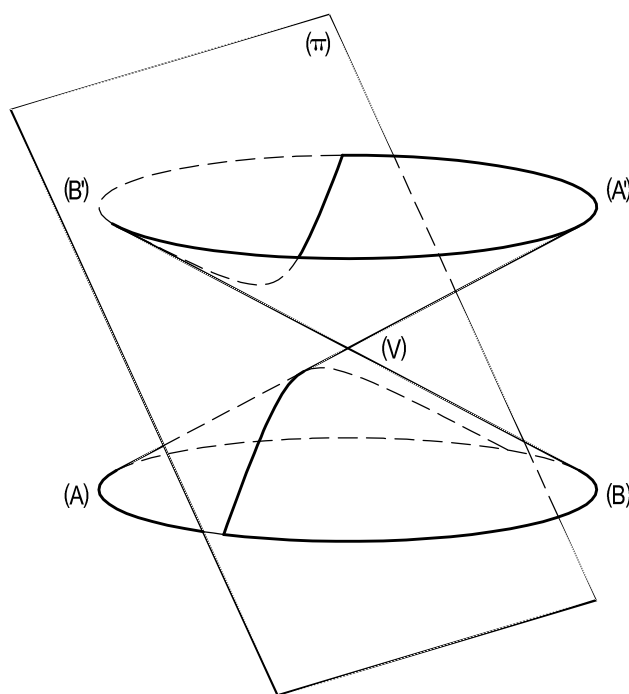


Figura 296

## 187 – Esferas de Dandelin

As assim ditas esferas de Dandelin são as esferas inscritas numa superfície cônica de revolução de duas folhas e tangentes a um plano secante a essa superfície.

Três hipóteses se põem:

187.1 – O plano secante ( $\pi$ ) atinge todas as geratrizes de uma única folha (Figura 297);

187.2 – O plano secante ( $\pi$ ) é paralelo a uma das geratrizes (Figura 298);

187.3 – O plano secante ( $\pi$ ) corta as duas folhas da superfície (Figura 299).

Tais possibilidades são as indicadas pelas seções meridianas nas superfícies cônicas de revolução consideradas, aqui representadas por duas de suas geratrizes opostas VA e VB e pela interseção  $\pi$  do plano secante com tais seções meridianas, nas figuras que se seguem:

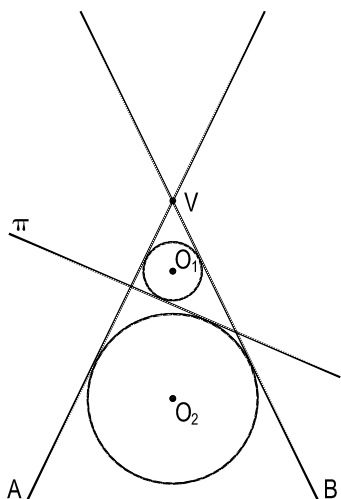


Figura 297

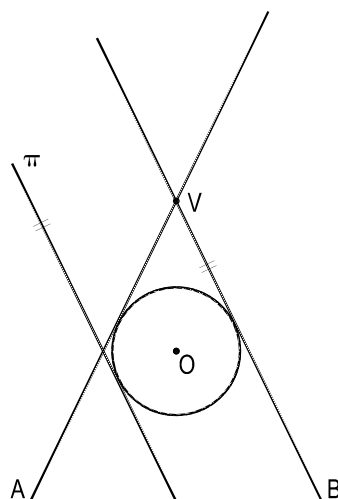


Figura 298

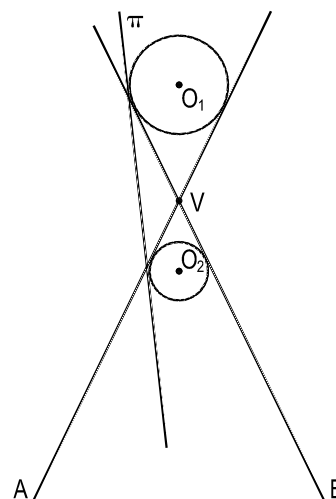


Figura 299

## 188 – Teorema de Dandelin

Um plano exterior ao vértice de uma superfície cônica de revolução a secciona segundo uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, conforme o ângulo desse plano com o eixo da superfície seja maior, menor ou igual ao ângulo que as geratrizes da superfície formam com o eixo.

Demonstração:

Primeira parte: seção elítica.

Estudemos uma superfície cônica de revolução de duas folhas, seccionada por um plano ( $\pi$ ), exterior ao seu vértice (V), que forme com seu eixo (e) um ângulo agudo  $\hat{\alpha}$  maior que o ângulo  $\hat{\theta}$  que as geratrizes da superfície formam com seu eixo.

Tal essa inclinação é, que  $(\pi)$  atinge apenas uma das folhas da superfície (Figura 300).

Porque, considerando a seção meridiana da superfície cônica produzida por plano perpendicular a  $(\pi)$ ,  $\hat{\alpha}$  é ângulo externo de triângulo que tem  $\hat{\theta}$  como interno (Figura 300), o que implica em que a seção provocada por  $(\pi)$  interesse a apenas uma de suas folhas (ver número 189.1).

Com isso, a seção produzida por  $(\pi)$  na superfície há de ser uma curva fechada.

Para tal estudo, consideremos as duas esferas de Dandelin que lhe correspondem, ou seja, as esferas  $(O)$  e  $(O')$  inscritas na superfície e tangentes ao plano  $(\pi)$ .

Sejam, então,  $(F)$  e  $(F')$  os pontos de contato dessas duas esferas com o plano secante e  $(c)$  e  $(c')$  os paralelos de contato de cada uma dessas esferas com a superfície cônica (Figura 300).

Tomemos um ponto  $(M)$  qualquer da seção e unamo-lo a  $(F)$  e a  $(F')$  (Figura 300). Por pertencerem ao plano  $(\pi)$ , tangente às duas esferas, os segmentos  $\overline{(M)(F)}$  e  $\overline{(M)(F')}$  serão tangentes a cada uma das duas esferas.

Unamos, agora, aquele ponto genérico  $(M)$  ao vértice  $(V)$  da superfície, criando a geratriz  $(V)(M)$ , também tangente às duas esferas, já que elas estão inscritas na superfície cônica, e consideremos, sobre esta geratriz, os segmentos  $\overline{(M)(R)}$  e  $\overline{(M)(S)}$  limitados por aqueles dois paralelos de contato (Figura 300).

Ora, como pares de tangentes de um mesmo ponto  $(M)$  a cada uma das duas esferas consideradas, podemos (números 184.4, 185) escrever:

$$\overline{(M)(F)} = \overline{(M)(R)}$$

$$\overline{(M)(F')} = \overline{(M)(S)}$$

Somando, membro a membro:

$$\overline{(M)(F)} + \overline{(M)(F')} = \overline{(M)(R)} + \overline{(M)(S)}$$

Como  $\overline{(M)(R)} + \overline{(M)(S)} = \overline{(R)(S)}$ , vem:

$$\overline{(M)(F)} + \overline{(M)(F')} = \overline{(R)(S)}$$

Mas  $\overline{(R)(S)}$  é constante, para todos os pontos  $(M)$  da seção, por ser a geratriz da superfície do tronco de cone de revolução de primeira espécie de bases  $(c)$  e  $(c')$  (Figura 300). Assim, conclui-se, em obediência à própria definição da curva, que a seção produzida por  $(\pi)$ , nas condições fixadas, é uma elipse de focos  $(F)$  e  $(F')$  e de eixo transversal igual ao segmento  $\overline{(R)(S)}$ .

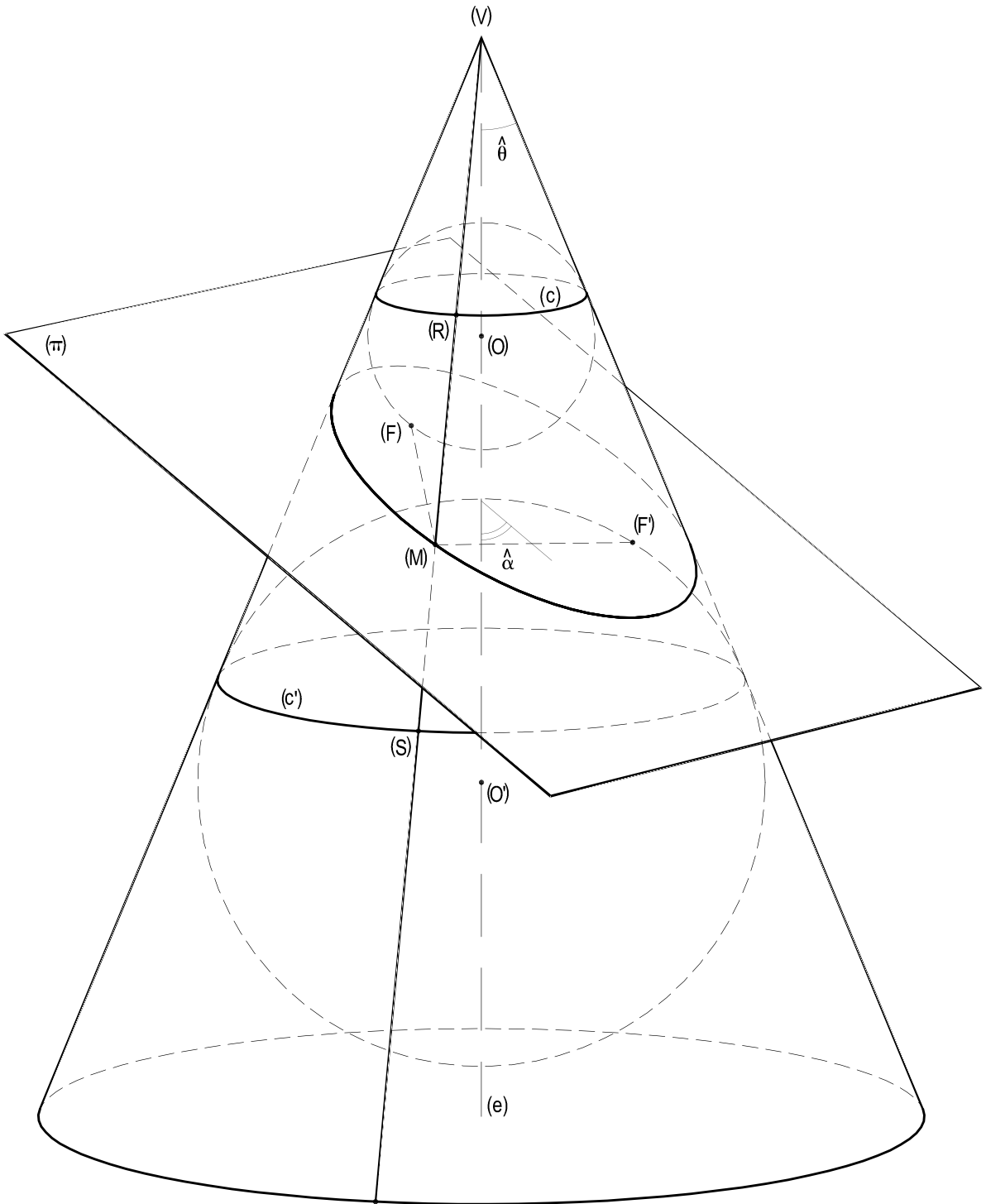


Figura 300

Segunda parte: seção hiperbólica.

Consideremos, agora, uma superfície cônica de revolução de duas folhas, com vértice (V) e eixo (e), bem como o plano secante ( $\pi$ ), exterior ao vértice (V), que forme com (e) ângulo  $\hat{\alpha}$  menor que o ângulo  $\hat{\theta}$  que as geratrizes de superfície formam com o eixo (e).

Porque  $\hat{\alpha} < \hat{\theta}$ , o plano ( $\pi$ ) atinge as duas folhas da superfície (Figura 301).

De fato, neste caso, na seção meridiana da superfície cônica de revolução de duas folhas produzida por plano perpendicular a ( $\pi$ ),  $\hat{\theta}$  é que é ângulo externo no triângulo (Figura 301), em que  $\hat{\alpha}$  é interno (ver número 189.1).

Com isso, a seção produzida será uma curva aberta, com dois ramos, cada um em cada folha da superfície.

Voltemos a considerar as duas esferas de Dandelin, para o caso, isto é, as esferas (O) e (O') inscritas em cada uma das folhas da superfície cônica, tangentes ao plano ( $\pi$ ), respectivamente nos pontos (F) e (F'), bem como seus paralelos de contato (c) e (c') com tal superfície (Figura 301).

Tomemos, para o estudo, um ponto qualquer (M) de um dos ramos da seção e unamo-lo ao vértice (V), criando a geratriz  $\overline{(R)(S)}$ , limitada entre os dois paralelos de contato, e observemos que, por ser  $\overline{(R)(S)}$  tangente às duas esferas e, por também serem tangentes a cada uma delas os segmentos  $\overline{(M)(F)}$  e  $\overline{(M)(F')}$ , pertencentes ao plano ( $\pi$ ), podemos (números 184.4, 185) anotar:

$$\overline{(M)(F)} = \overline{(M)(R)}$$

$$\overline{(M)(F')} = \overline{(M)(S)}$$

Subtraindo, membro a membro:

$$\overline{(M)(F)} - \overline{(M)(F')} = \overline{(M)(R)} - \overline{(M)(S)}$$

Como  $\overline{(M)(R)} - \overline{(M)(S)} = \overline{(R)(S)}$ , vem:

$$\overline{(M)(F)} - \overline{(M)(F')} = \overline{(R)(S)}$$

Ora, como  $\overline{(R)(S)}$  tem valor constante, por ser a geratriz da superfície do tronco de cone de revolução de segunda espécie limitada pelos círculos (c) e (c'), da própria definição da curva, concluímos que a seção em estudo é uma hipérbole de focos (F) e (F') e de eixo transversal igual ao segmento  $\overline{(R)(S)}$ .

É claro que o teorema vale, com demonstração exatamente igual, para pontos (N) do segundo ramo da seção.

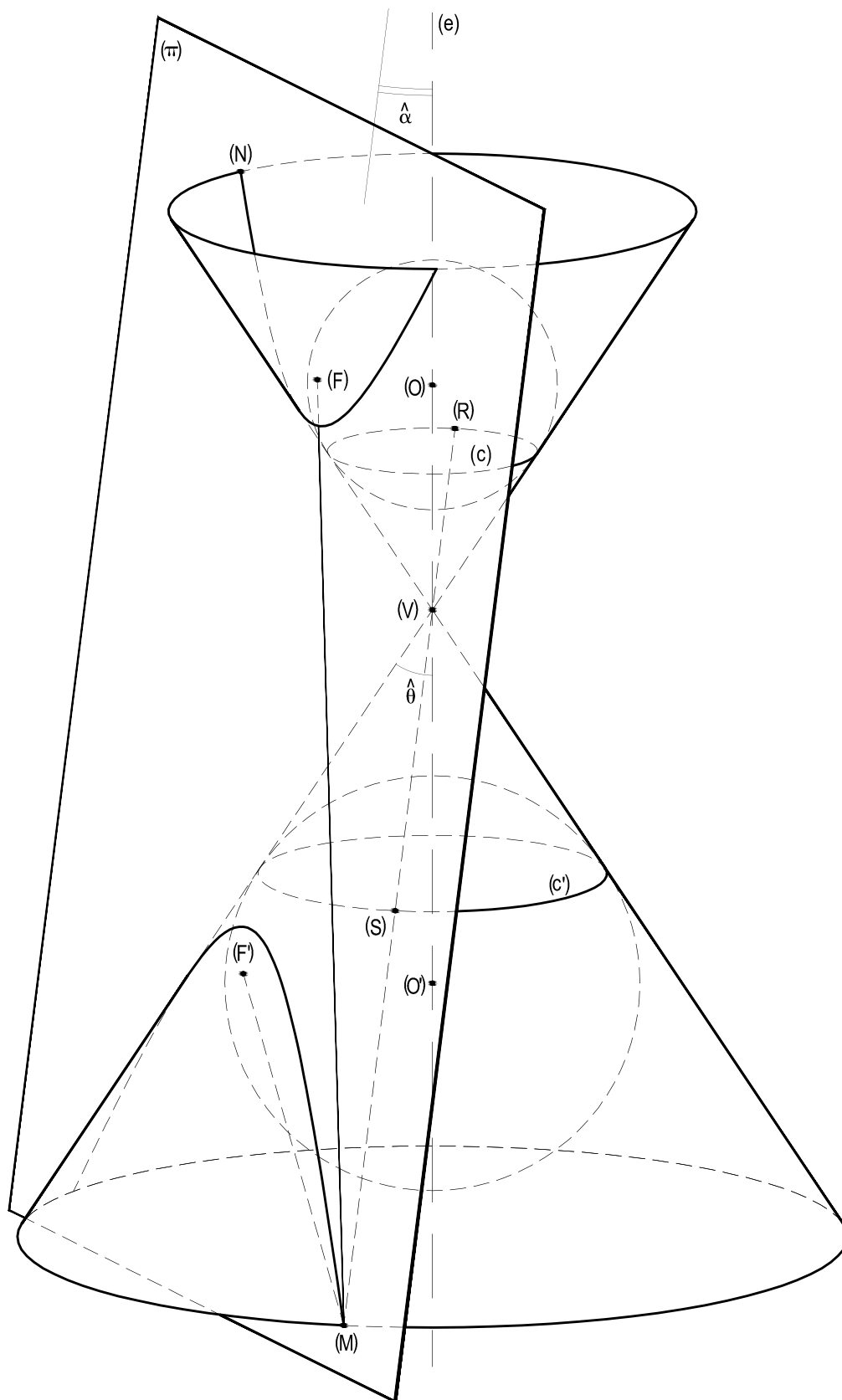


Figura 301

Terceira parte: seção parabólica.

Estudemos, por último, uma superfície cônica de revolução de duas folhas, seccionada por um plano ( $\pi$ ) exterior ao seu vértice ( $V$ ), que forme com seu eixo ( $e$ ) um ângulo  $\hat{\alpha}$  igual ao ângulo  $\hat{\theta}$  que as geratrizes da superfície formam com o eixo, isto é, um plano ( $\pi$ ) paralelo a uma geratriz ( $V$ )( $J$ ) da superfície (Figura 302).

Naturalmente, nestas condições, para o estudo da seção, pode ser desconsiderada a segunda folha de superfície cônica, visto que a superfície só será atingida por ( $\pi$ ) numa de suas folhas.

A seção, então, será uma curva aberta com apenas um ramo.

Observemos que, no presente caso, existe apenas uma esfera de Dandelin que tem a circunferência ( $c$ ) como paralelo de contato com a superfície cônica (Figura 302).

Para análise da seção produzida, tomemos um qualquer de seus pontos ( $M$ ), unamo-lo ao ponto ( $F$ ) de tangência de ( $\pi$ ) com a esfera e com o vértice ( $V$ ), criando, sobre a geratriz ( $V$ )( $M$ ), o segmento  $\overline{(M)(R)}$  (Figura 302), também tangente à esfera de Dandelin, limitado pela circunferência ( $c$ ), e anotemos que, como tangentes do ponto ( $M$ ) àquela esfera (números 184.4, 185), cabe a igualdade:

$$\overline{(M)(F)} = \overline{(M)(R)} \quad (1)$$

Consideremos, ainda, o plano meridiano ( $\varphi$ ) da superfície cônica, perpendicular a ( $\pi$ ), dando origem ao quadrilátero ( $J$ )( $S$ )( $T$ )( $U$ ) (Figura 302), limitado pelos planos ( $\pi$ ) e ( $\varphi$ ) e pelo par de planos ( $\beta$ ), do círculo ( $c$ ) e ( $\gamma$ ), traçado, por ( $M$ ), perpendicularmente ao eixo ( $e$ ).

Ora, porque ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ) são paralelos, ( $J$ )( $S$ )( $T$ )( $U$ ) é um paralelogramo, o que nos dá:

$$\overline{(J)(S)} = \overline{(U)(T)} \quad (2)$$

Como geratrizes do tronco do cone de revolução produzido na superfície considerada entre os planos paralelos ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ), temos:

$$\overline{(M)(R)} = \overline{(J)(S)} \quad (3)$$

Por último, tracemos, pelo ponto ( $M$ ), em estudo, a perpendicular ( $M$ )( $E$ ) à reta ( $d$ ), interseção dos planos ( $\pi$ ) e ( $\beta$ ) (Figura 302). O retângulo ( $M$ )( $E$ )( $T$ )( $U$ ), assim formado, fornece:

$$\overline{(U)(T)} = \overline{(M)(E)} \quad (4)$$

Reunindo as relações (1), (2), (3) e (4), temos:

$$\overline{(M)(F)} = \overline{(M)(R)} = \overline{(J)(S)} = \overline{(U)(T)} = \overline{(M)(E)}$$

Ou simplesmente,  $\overline{(M)(F)} = \overline{(M)(E)}$



Observe-se que, para qualquer ponto (M) da seção em estudo, são fixos a reta (d), interseção de dois planos fixos ( $\pi$ ) e ( $\beta$ ), bem como o ponto (F) de tangência do plano secante ( $\pi$ ) com a esfera de Dandelin (O).

Tal equidistância, a um ponto fixo (F) e a uma reta (d) fixa também, provada para um ponto genérico (M) da seção, valerá para todos os seus pontos.

Assim, porque um ponto (M), qualquer, da seção equidista do ponto fixo (F) e da reta fixa (d), concluímos, pela própria definição, que a seção é uma parábola de foco (F) e diretriz (d) (Figura 302).

Fica, por isso, provada a terceira parte do teorema.

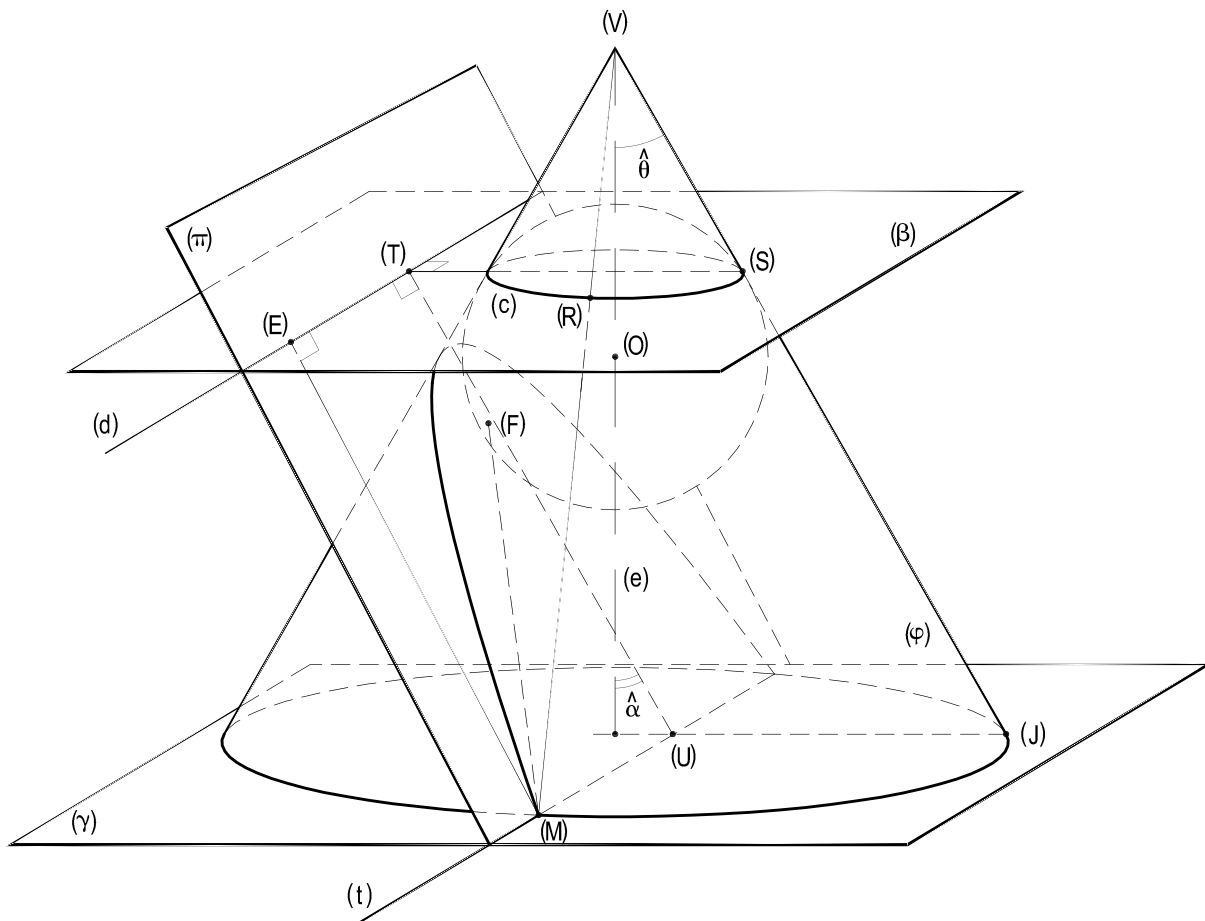


Figura 302

## 189 – Observações

189.1 – Observando as seções meridianas da superfície cônica de revolução de duas folhas de vértice (V) e os traços (r), nelas, dos planos secantes ( $\pi$ ), para as três hipóteses estudadas, fica evidente o atingimento por ( $\pi$ ) em apenas uma folha da superfície (Figura 303), para a seção de natureza elítica, que corresponde a uma inclinação  $\hat{\alpha}$  do plano com o eixo (e) maior que o ângulo  $\hat{\theta}$  das geratrizes com esse eixo, já que no triângulo (V)(1)(2),  $\hat{\alpha}$  é externo e  $\hat{\theta}$  interno.

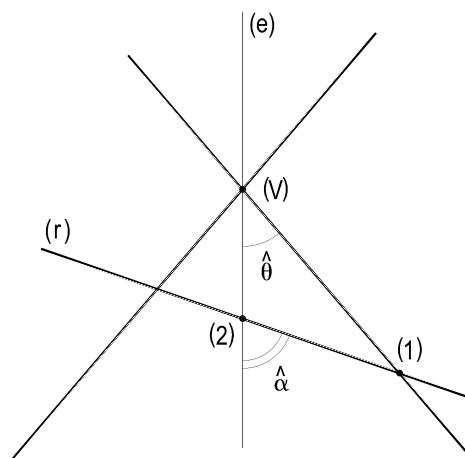


Figura 303

Da mesma forma, resta claro o corte por ( $\pi$ ), como indica sua seção (r) com o plano meridiano da superfície cônica, nas suas duas folhas (Figura 304), motivado pelo fato de o ângulo  $\hat{\alpha}$  que ( $\pi$ ) forma com o eixo ser menor que o ângulo  $\hat{\theta}$  das geratrizes com esse eixo, para o caso da seção hiperbólica, pois, agora, no triângulo (V)(1)(2),  $\hat{\theta}$  é que é o externo.

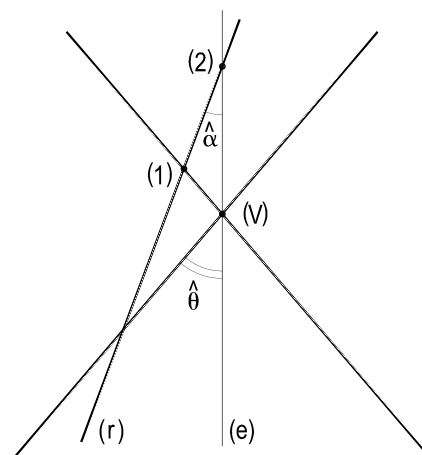


Figura 304

A última hipótese acima analisada, para a seção parabólica, é a mais evidente de todas, pelo paralelismo existente (Figura 305) entre o traço (r) do plano secante ( $\pi$ ) com o meridiano da superfície cônica e de sua geratriz (V)(J), o que implica na igualdade entre  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\theta}$ .

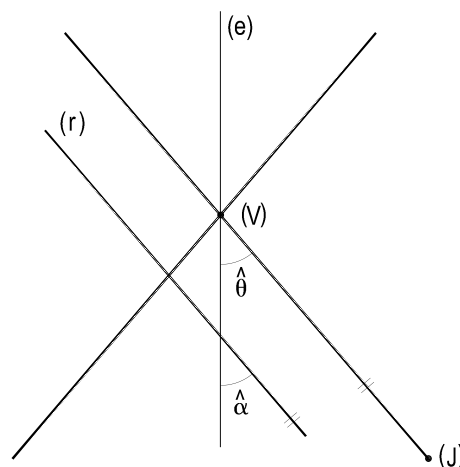


Figura 305

189.2 – Vale observar o caso particular em que o plano secante ( $\pi$ ) é perpendicular ao eixo (e) da superfície cônica (V), que, naturalmente, se inclui na primeira das hipóteses antes estudadas. A seção é, obviamente, um círculo (Figura 306) que pode, então, ser considerado como elipse degenerada pela coincidência de seus dois focos com o traço (O) do eixo (e) com o plano secante ( $\pi$ ).

189.3 – Para completar todas as possibilidades, quanto às posições relativas entre o plano  $(\pi)$  e a superfície cônica de revolução  $(V)$ , cabe considerar, mesmo contrariando a hipótese do teorema de Dandelin, aquelas em que  $(\pi)$  contém  $(V)$ , cortando (Figura 307) ou tangenciando (Figura 308) a superfície, além daquela em que, apenas passando por  $(V)$ , o plano  $(\pi)$  é exterior à superfície, tendo, então, apenas o próprio vértice  $(V)$  em comum com ela.

Quando  $(\pi)$ , contendo  $(V)$ , corta a superfície cônica, a seção (Figura 307) é um par de geratrizes  $(V)(L)$  e  $(V)(K)$ ; quando apenas tangencia a superfície (Figura 308), não há, obviamente, seção, sendo comum a  $(\pi)$  e à superfície cônica a geratriz  $(V)(T)$  do contato (Figura 308).

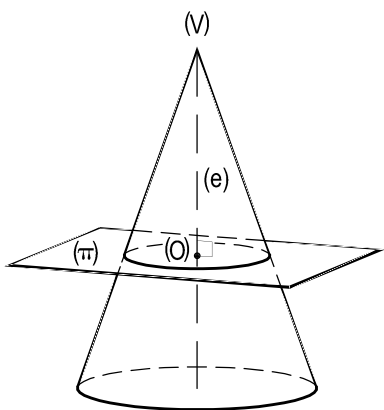


Figura 306

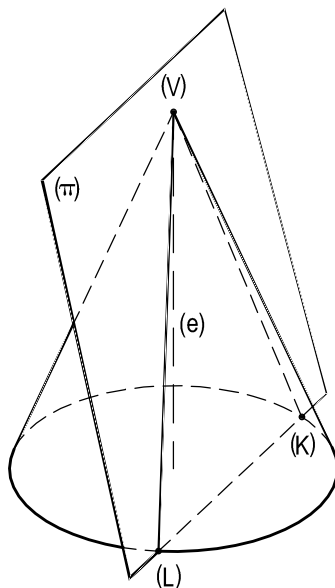


Figura 307

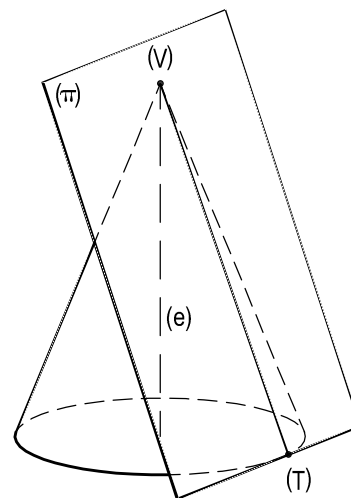


Figura 308

## 190 – A parábola como posição limite da elipse

Consideremos uma superfície cônica de revolução de duas folhas e um plano  $(\pi_1)$  que corte todas as geratrizes de uma das folhas.

Incluamos, para o presente estudo, o plano  $(\gamma)$  que, passando pelo vértice  $(V)$  da superfície, seja perpendicular ao seu eixo  $(e)$ , além da reta  $(r)$ , interseção de  $(\gamma)$  com  $(\pi_1)$ .

A seção de  $(\pi_1)$  na superfície, já se sabe (número 188), é uma elipse.

Façamos o plano  $(\pi_1)$  girar em torno de  $(r)$ , diminuindo progressivamente seu ângulo com o eixo  $(e)$ , buscando o paralelismo com uma geratriz  $(V)(J)$  da superfície.

Durante essa rotação, o plano secante vai assumindo posições  $(\pi_2)$ ,  $(\pi_3)$ , etc. que continuam a proporcionar seções elípticas na superfície cônica (Figura 309), cada vez mais alongadas, até que, na posição limite procurada  $(\pi_n)$ , em que o plano secante  $(\pi)$  chega a ser paralelo à geratriz  $(V)(J)$ , a seção passa a ser, como antes (número 188) demonstrado, uma parábola.

Pode-se, por isso, entender a parábola como posição limite da elipse, quando esta, nos termos acima colocados, tem seu plano tendendo a ficar paralelo a uma das geratrizes da superfície cônica de revolução de duas folhas, tomada como objeto para as sucessivas interseções.

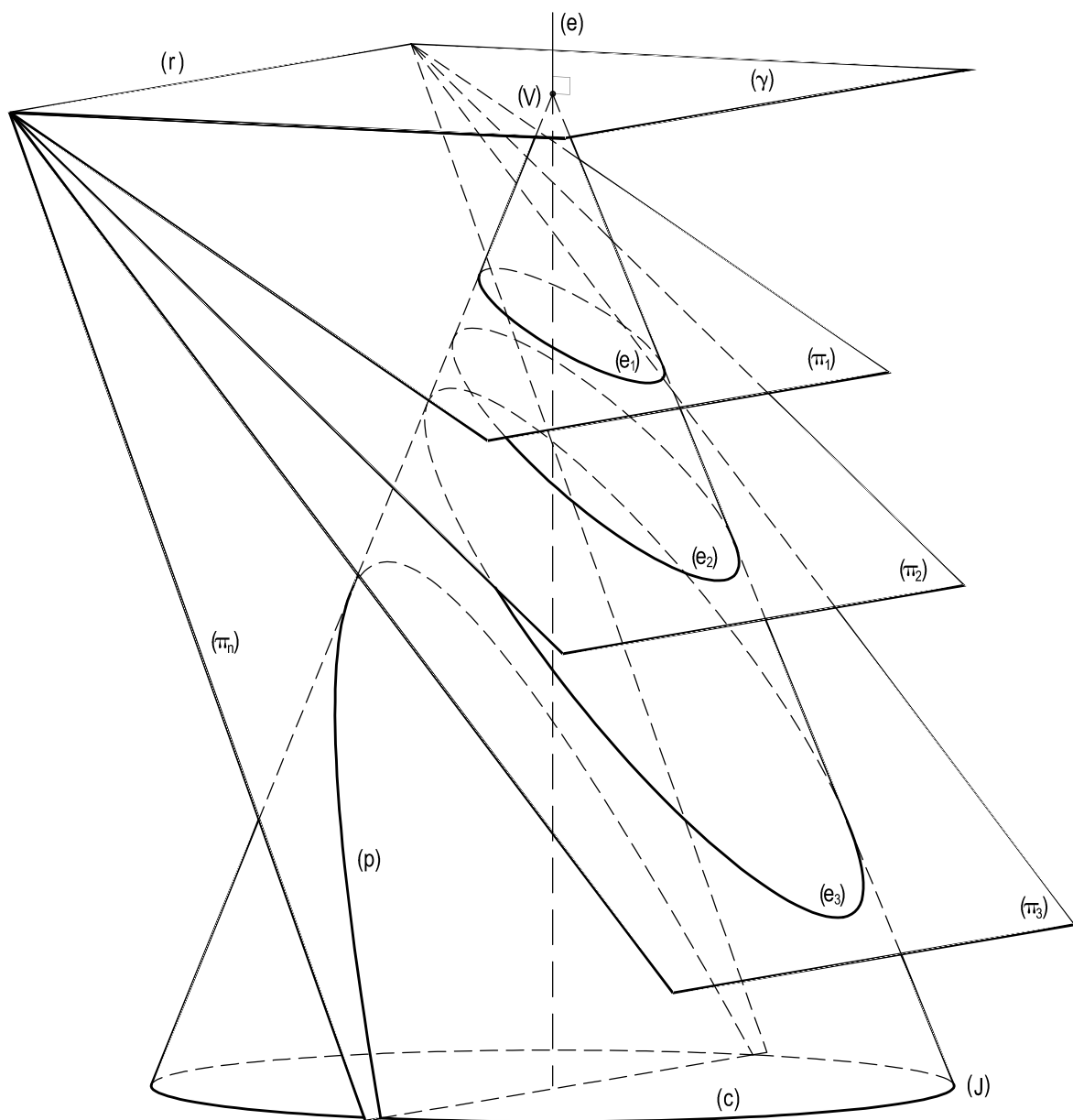


Figura 309

## 191 – A parábola como posição limite da hipérbole

Consideremos uma superfície cônica de revolução de duas folhas e um plano  $(\pi_1)$  que, sendo exterior ao seu vértice  $(V)$ , corte suas duas folhas (Figura 310).

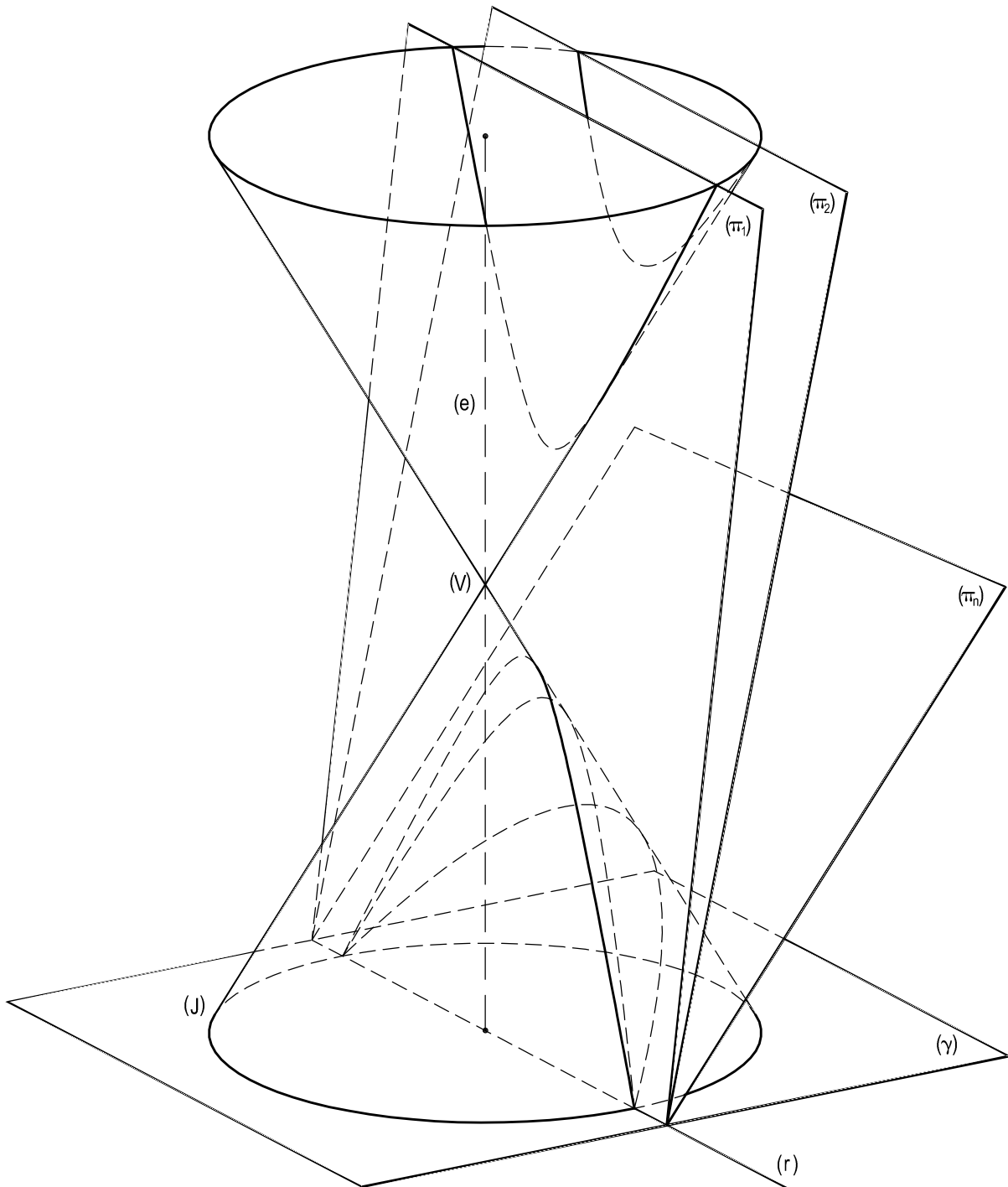


Figura 310

Tal como no estudo anterior, façamos girar o plano ( $\pi_1$ ), em torno da reta ( $r$ ), interseção desse plano ( $\pi_1$ ) com o plano ( $\gamma$ ), perpendicular ao eixo da superfície, traçado por um ponto genérico desse eixo (Figura 310), aumentando o ângulo formado com o eixo da superfície, passando por posições intermediárias como ( $\pi_2$ ), provocando, por isso, novas seções hiperbólicas, até que esse plano secante venha a assumir a posição ( $\pi_n$ ), paralela à geratriz ( $V$ )( $J$ ) da superfície.

Nesta posição final, a seção plana será uma parábola (número 188), o que nos leva a concluir que a parábola pode ser considerada como posição limite da hipérbole, quando esta, nos termos aqui assumidos, chega a ter seu plano paralelo a uma das geratrizes da superfície cônica de revolução de duas folhas, tomada como objeto dessas sucessivas interseções.

## 192 – Observações

192.1 – A rotação do plano secante ( $\pi$ ), estudada em torno da reta fixa ( $r$ ), analisada acima (número 190), pode ser bem apreciada pela observação das seções produzidas, em todo tal movimento, pelo plano meridiano da superfície perpendicular àquela charneira ( $r$ ).

É o que mostra a Figura 311, onde as diversas seções elípticas e, afinal, a parabólica são ressaltadas.

192.2 – Da mesma forma, pode ser observada a rotação dos planos secantes ( $\pi$ ), em torno da charneira escolhida ( $r$ ) (Figura 312), na seção plana produzida na superfície cônica considerada pelo meridiano perpendicular àquela reta fixa, tal como indicado na Figura 312, onde são destacadas as hipérboleres e a parábola final, seções estudadas.

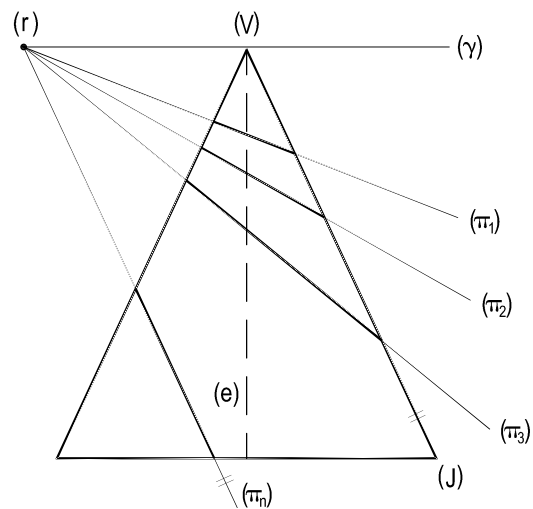


Figura 311

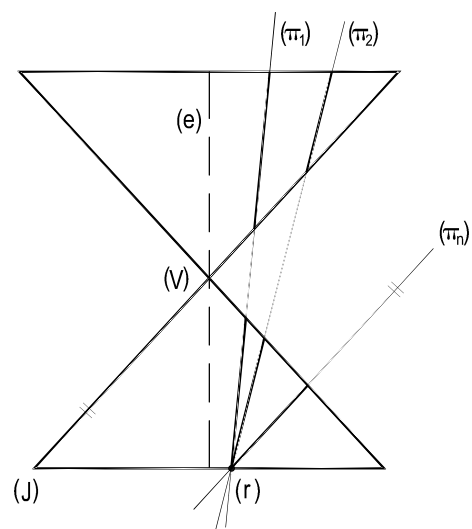


Figura 312

# CAPÍTULO XIII

## EXCENTRICIDADES E DIRETRIZES

### 193 – Excentricidades das cônicas bifocais

Vimos anteriormente (números 14.5 e 93.5) que, tanto para a elipse quanto para a hipérbole, denomina-se excentricidade a razão entre a semidistância focal e o semieixo real da curva.

Que se escreve:  $e = \frac{c}{a}$

E que (números 15.1 e 94.1) as excentricidades das elipses variam no intervalo aberto (0,1) e que as das hipérbolas são sempre superiores a 1.

Vamos, agora, aprofundar o estudo sobre as excentricidades das cônicas bifocais, verificando o que ocorre com os formatos dessas curvas, quando variam suas excentricidades.

### 194 – Variação da excentricidade da elipse

Consideremos uma elipse de eixo real  $AA' = 2a$ , distância focal  $FF' = 2c$  e excentricidade  $e$ .

Para apreciar as modificações de forma que a curva sofre, com a variação do valor de sua excentricidade, fixemos seu eixo maior  $AA'$  e façamos os focos se movimentarem, primeiro, aproximando-se do centro  $O$  da elipse, e, depois, no sentido oposto, afastando-se dele.

No primeiro caso, a diminuição da distância focal  $2c$  acarreta, durante o movimento proposto, que a excentricidade  $\frac{c}{a}$  tenda a se anular, o que ocorre quando os focos chegam a coincidir com o centro  $O$  (Figura 313) e a elipse degenera em um círculo, o seu próprio círculo principal ( $O, a$ ).

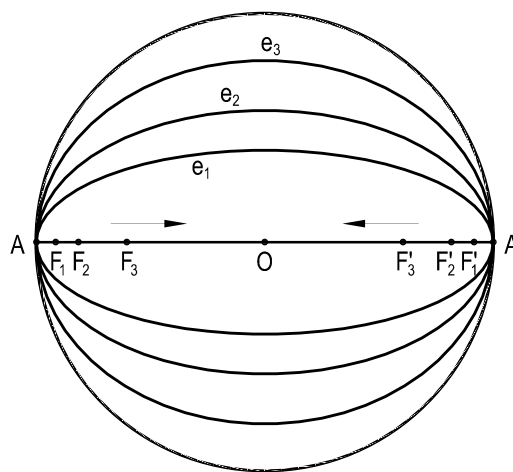


Figura 313

Quando, ao contrário, os focos se afastam, o valor crescente da distância focal implica em que a excentricidade  $\frac{c}{a}$  tenda à unidade, o que ocorre quando cada foco coincide com cada vértice real, e, então, a elipse degenera segundo um segmento de reta  $AA'$  (Figura 314), o seu próprio eixo real.

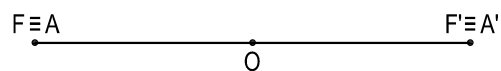


Figura 314

### 195 – Variação da excentricidade da hipérbole

Consideremos uma hipérbole de eixo real  $AA' = 2a$ , distância focal  $FF' = 2c$  e excentricidade  $e$ .

Como vimos (número 193), tal excentricidade é sempre maior que 1.

Para analisar as mudanças de forma da hipérbole, em função das variações de sua excentricidade, fixemos, inicialmente, seus vértices  $A$  e  $A'$  e façamos seus focos  $F$  e  $F'$  afastarem-se continuamente, buscando as posições impróprias da reta  $AA'$ , o que implica em constante crescimento da distância focal  $e$ , por consequência, da excentricidade em estudo. Com isso (Figura 315), a curva se vai alargando até que, na posição limite em que os focos chegam a ser impróprios, a hipérbole degenera em duas retas  $r$  e  $r'$ , perpendiculares ao eixo real  $AA'$ , passando, respectivamente, por  $A$  e por  $A'$  (Figura 315).

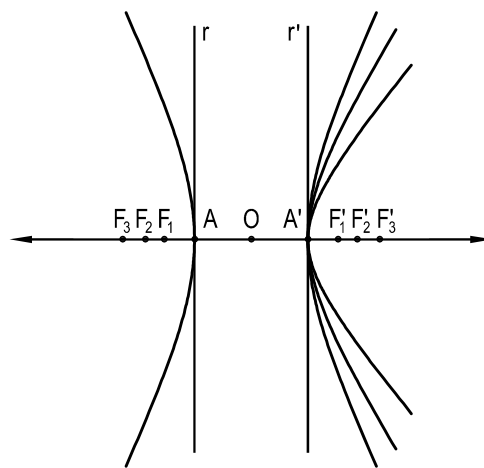


Figura 315

Agora, ao contrário, façamos os focos  $F$  e  $F'$  moverem-se em direção ao centro  $O$ , tendendo aos vértices  $A$  e  $A'$  respectivamente (Figura 316).

Assim, a excentricidade  $\frac{c}{a}$  tende a 1, visto que a distância focal  $2c$  vai se aproximando do valor do eixo real  $2a$ .

Nesse movimento, a hipérbole vai gradualmente se achatando.

E, então, na posição limite, quando os focos chegam respectivamente aos vértices  $A$  e  $A'$ , a hipérbole degenera em duas semirretas de suporte  $AA'$ , com sentidos opostos e origens nos pontos  $A$  e  $A'$  (Figura 316).

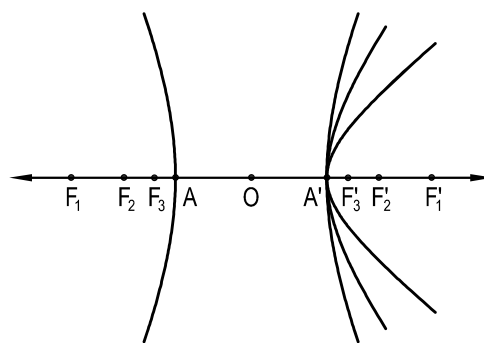


Figura 316



Por fim, fixemos os focos  $F$  e  $F'$  e façamos os vértices  $A$  e  $A'$  aproximando-se, tenderem, ambos, ao centro  $O$ , o que implica em que, com a redução do valor do eixo real  $AA' = 2a$ , a excentricidade  $\frac{c}{a}$  cresça, tendendo ao infinito. E, além disso, que a diferença  $2a$  entre os raios vetores de todos os pontos  $M$  da curva tenda a zero, o que resulta em que ela degenera segundo a mediatriz  $m$  do segmento  $FF'$  (Figura 317).

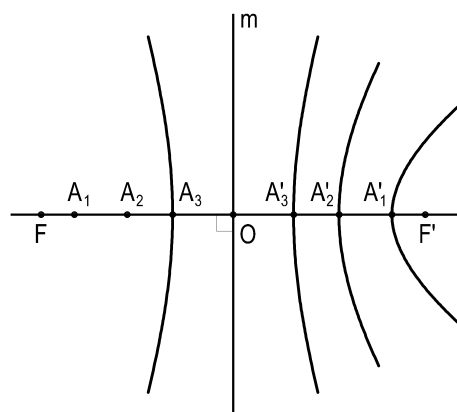


Figura 317

O movimento dos vértices  $A$  e  $A'$  em sentido contrário a este último estudado, isto é, afastando-se do centro  $O$  da hipérbole, é o mesmo já estudado na segunda hipótese acima, visto que (número 89) os vértices não podem ser exteriores ao segmento  $FF'$ .

## 196 – Cálculo dos raios vetores para a elipse

Estudemos uma elipse cujos eixos maior  $AA' = 2a$  e menor  $BB' = 2b$  estejam sobre os eixos coordenados e os focos  $F$  e  $F'$  no das abscissas (Figura 318), buscando calcular os raios vetores  $MF$  e  $MF'$  de um ponto corrente genérico  $M(x, y)$  da curva, de distância focal  $= 2c$ .

Nestas condições, as coordenadas dos principais pontos da elipse são:

$$A(a, 0) \quad e \quad A'(-a, 0)$$

$$F(0, c) \quad e \quad F'(-c, 0)$$

Os triângulos retângulos  $MJF$  e  $MJF'$  (Figura 318) fornecem:

$$MF = \sqrt{MJ^2 + JF^2} = \sqrt{y^2 + (x - c)^2} \quad (1)$$

$$MF' = \sqrt{MJ^2 + JF'^2} = \sqrt{y^2 + (c + x)^2} \quad (2)$$

Assim, pela própria definição da curva, temos:

$$MF + MF' = 2a = \sqrt{y^2 + (x - c)^2} + \sqrt{y^2 + (c + x)^2}$$

$$\text{Ou,} \quad \sqrt{y^2 + (c + x)^2} = 2a - \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

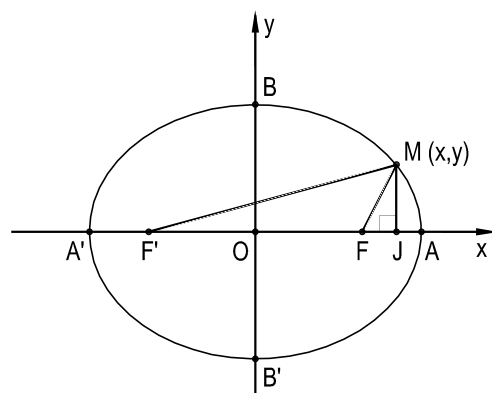


Figura 318

E, elevando ao quadrado:

$$y^2 + (c + x)^2 = 4a^2 + y^2 + (x - c)^2 - 4a \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$\therefore y^2 + c^2 + x^2 + 2cx = 4a^2 + y^2 + c^2 + x^2 - 2cx - 4a \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$\therefore 4cx = 4a^2 - 4a \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$\therefore cx = a^2 - a \sqrt{y^2 + (x - c)^2} \quad (3)$$

Substituindo (1) em (3), vem:

$$cx = a^2 - a \text{ (MF)}$$

$$\therefore \text{MF} = \frac{a^2 - cx}{a}$$

$$\therefore \text{MF} = a - \left(\frac{c}{a}\right)x \quad (4)$$

Para o cálculo do segundo raio vetor MF', temos:

$$\text{MF}' = 2a - \text{MF} \quad (5)$$

Levando (4) a (5), temos:

$$\therefore \text{MF}' = 2a - a + \left(\frac{c}{a}\right)x$$

$$\therefore \text{MF}' = a + \left(\frac{c}{a}\right)x \quad (6)$$

Como se sabe (número 14.5) que a razão  $\left(\frac{c}{a}\right)$  mede a excentricidade  $e$  da elipse, as relações (4) e (6), finalmente, se escrevem:

$$\boxed{\text{MF} = a - ex}$$

e  $\boxed{\text{MF}' = a + ex}$

São estas expressões as que permitem calcular os valores dos raios vetores MF e MF' de um ponto M qualquer de uma elipse referida aos seus eixos, nos termos aqui considerados, em função de seu semieixo real  $a$ , de sua excentricidade  $e$  e de sua abscissa  $x$ , as quais podem, de modo simplificado, ser apresentadas, para um raio vetor MF genérico, assim:

$$\boxed{\text{MF} = a \pm ex}$$

## 197 – Cálculo dos raios vetores para a hipérbole

Consideremos uma hipérbole referida a seus eixos, isto é, tal que seu eixo real  $AA' = 2a$  esteja sobre o eixo das abscissas e seu eixo imaginário  $BB' = 2b$  pertença ao das ordenadas (Figura 319), sendo  $FF' = 2c$  sua distância focal e passemos a calcular os valores dos raios vetores  $MF$  e  $MF'$  de um ponto corrente  $M(x, y)$  da curva.

Nestas condições, as coordenadas dos pontos mais importantes a observar são:

$$A(a, 0) \quad e \quad A'(-a, 0)$$

$$F(c, 0) \quad e \quad F'(-c, 0)$$

Os triângulos retângulos  $MJF$  e  $MJF'$  (Figura 319) fornecem:

$$MF = \sqrt{MJ^2 + JF^2} = \sqrt{y^2 + (x - c)^2} \quad (1)$$

$$MF' = \sqrt{MJ^2 + JF'^2} = \sqrt{y^2 + (c + x)^2} \quad (2)$$

Como  $M$  é ponto da hipérbole, pela própria definição da curva, temos:

$$MF' - MF = 2a$$

$$\therefore \sqrt{y^2 + (c + x)^2} - \sqrt{y^2 + (x - c)^2} = 2a$$

$$\therefore \sqrt{y^2 + (c + x)^2} = 2a + \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

Elevando ao quadrado, vem:

$$y^2 + (c + x)^2 = 4a^2 + y^2 + (x - c)^2 + 4a \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$\therefore y^2 + c^2 + x^2 + 2cx = 4a^2 + y^2 + c^2 + x^2 - 2cx + 4a \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$\therefore 4cx = 4a^2 + 4a \sqrt{y^2 + (x - c)^2}$$

$$\therefore cx = a^2 + a \sqrt{y^2 + (x - c)^2} \quad (3)$$

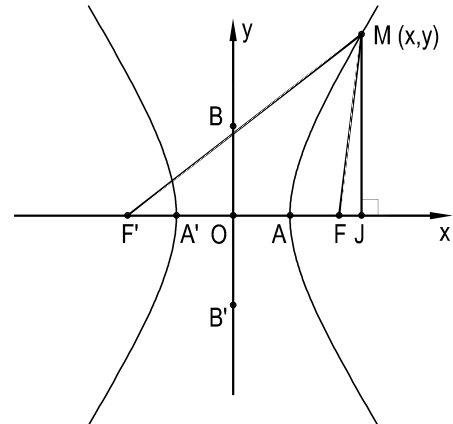


Figura 319

Substituindo (1) em (3), vem

$$cx = a^2 + a \quad (\text{MF})$$

$$\therefore \text{MF} = \frac{-a^2 + cx}{a}$$

$$\therefore \text{MF} = -a + \left(\frac{c}{a}\right)x \quad (4)$$

Para o cálculo de MF', temos:

$$\text{MF}' - \text{MF} = 2a$$

$$\therefore \text{MF}' = 2a + \text{MF}$$

$$\therefore \text{MF}' = 2a - a + \left(\frac{c}{a}\right)x$$

$$\therefore \text{MF}' = a + \left(\frac{c}{a}\right)x \quad (5)$$

Finalmente, como se sabe (número 93.5) que a razão  $\left(\frac{c}{a}\right)$  mede a excentricidade  $e$  da hipérbole, as relações (4) e (5) se escrevem:

$$\text{MF} = -a + ex \quad \therefore \quad \boxed{\text{MF} = ex - a}$$

$$e \quad \text{MF}' = a + ex \quad \therefore \quad \boxed{\text{MF}' = ex + a}$$

Estas são as expressões procuradas para calcular os valores dos raios vetores MF e MF' de um ponto M qualquer de uma hipérbole, em função de seu semieixo real  $a$ , de sua semidistância focal  $c$ , de sua excentricidade  $e$ , naturalmente, de sua abscissa, tudo dentro das condições aqui consideradas.

Tais expressões podem, de modo simplificado, se apresentar para um raio vetor MF genérico, assim:

$$\boxed{\text{MF} = ex \pm a}$$

## 198 – Observação

Reunindo as conclusões dos itens 196 e 197, acima, pode-se resumir a expressão do raio vetor FM genérico de uma cônica bifocal referida a seus dois eixos, os focos pertencendo ao das abscissas, assim:

$$\boxed{\text{MF} = \pm a \pm ex}$$

## 199 – Teorema

A razão entre as distâncias dos pontos de uma elipse a um de seus focos e a uma certa reta fixa perpendicular ao eixo real da curva é constante e igual à excentricidade da elipse.

Demonstração: Consideremos uma elipse de eixos real  $AA' = 2a$  e distância focal  $FF' = 2c$ , referida a seus eixos, isto é, tal que eles pertençam aos eixos cartesianos, os focos sobre o das abscissas e que  $e$  seja o valor de sua excentricidade.

Incluamos, nesse mesmo sistema cartesiano, duas retas  $d$  e  $d'$  perpendiculares ao eixo real, com abscissas respectivamente iguais a  $(+\frac{a}{e})$  e  $(-\frac{a}{e})$  (Figura 320).

Seja  $M(x, y)$  um ponto qualquer da elipse, queremos provar que as razões entre as distâncias de  $M$  a  $F$  e a  $d$  e de  $M$  a  $F'$  e a  $d'$  sejam constantes e iguais à excentricidade da curva.

Ora, as distâncias de  $M$  a  $F$  e a  $F'$  são seus próprios raios vetores, já estudados (número 196), e as distâncias de  $M$  às retas  $d$  e  $d'$  (Figura 320) são iguais, respectivamente, aos segmentos  $MM_1$  e  $MM_2$ , o que permite anotar:

$$MF = a - ex \quad e \quad MF' = a + ex$$

$$MM_1 = \frac{a}{e} - x \quad e \quad MM_2 = \frac{a}{e} + x$$

E, então, por divisões, membro a membro:

$$\frac{MF}{MM_1} = \frac{a - ex}{\frac{a}{e} - x} = \frac{e(a - ex)}{a - ex} = e \quad (1)$$

$$\frac{MF'}{MM_2} = \frac{a + ex}{\frac{a}{e} + x} = \frac{e(a + ex)}{a + ex} = e \quad (2)$$

Como as abscissas das retas  $d$  e  $d'$  (Figura 320) são invariáveis, para a elipse considerada, as relações (1) e (2) demonstram o teorema, visto que o ponto  $M$  escolhido é genérico.

## 200 – Diretrizes da elipse

As retas  $d$  e  $d'$ , acima instituídas, são denominadas diretrizes da elipse.

Assim, a elipse possui duas diretrizes perpendiculares ao eixo real, distantes, ambas,  $\frac{a}{e}$  de seu centro (Figura 321).

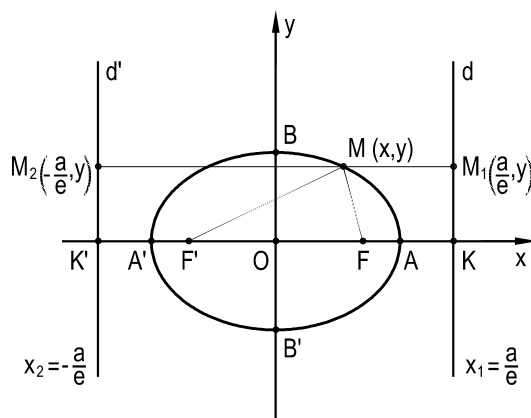


Figura 320

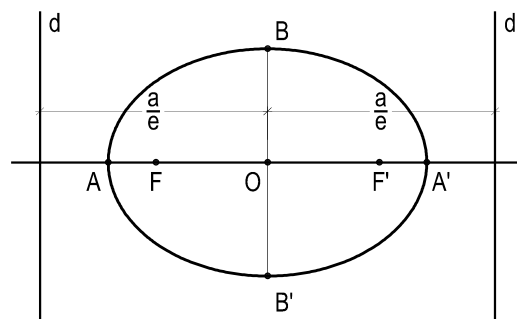


Figura 321

## 201 – Observações

201.1 – As diretrizes da elipse são simétricas em relação ao centro da curva.

201.2 – As diretrizes da elipse são exteriores à curva, pois o quociente  $\frac{a}{e}$  é maior que  $a$ .

201.3 – A distância entre as diretrizes da elipse é igual à razão entre seu eixo real  $2a$  e sua excentricidade  $e$  (Figura 321).

201.4 – Quanto menor for a excentricidade, maior será a distância entre suas diretrizes.

De fato, como essa distância vale  $\frac{2a}{e}$  (número 201.3), a redução do denominador dessa fração implica no crescimento desse quociente.

201.5 – Como posição limite da redução acima abordada, quando a elipse degenera segundo seu círculo principal, isto é, quando sua excentricidade se anula (ver número 194), as duas geratrizes são rejeitadas ao infinito, ou seja, deixam, em termos reais, de existir.

201.6 – Quando, ao contrário, cresce a excentricidade de uma elipse, a distância entre suas diretrizes decresce, até que, na ocasião limite em que toma o valor unitário, o que implica em que a elipse degenere segundo seu eixo real (número 194), as diretrizes passam a ser as perpendiculares a esse eixo, em seus extremos.

## 202 – Teorema

A razão entre as distâncias dos pontos de uma hipérbole a um de seus focos e a uma certa reta fixa perpendicular ao eixo real da curva é constante e igual à excentricidade da hipérbole.

Demonstração: Consideremos uma hipérbole de eixo real  $AA' = 2a$  e distância focal  $FF' = 2c$ , referida a seus eixos, tal que seus focos pertençam ao eixo das abscissas e que  $e$  seja o valor de sua excentricidade. Incluamos, nesse sistema cartesiano, duas retas  $d$  e  $d'$  perpendiculares ao eixo real, com abscissas respectivamente iguais a  $(+\frac{a}{e})$  e  $(-\frac{a}{e})$  (Figura 322).

Sendo  $M(x, y)$  um ponto qualquer da hipérbole, queremos provar que as razões entre as distâncias de  $M$  a  $F$  e a  $d$  e de  $M$  a  $F'$  e a  $d'$  são constantes.

Sabemos (número 197) como calcular os valores dos raios vetores  $MF$  e  $MF'$  e, observando a Figura 322, como anotar as distâncias do ponto corrente  $M$  a cada uma das retas  $d$  e  $d'$ .

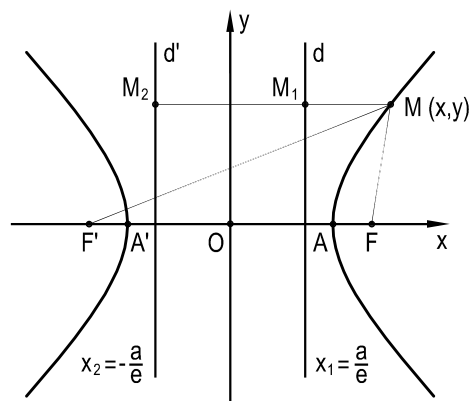


Figura 322

Assim, temos:

$$MF = -a + ex \quad e \quad MF' = a + ex$$

$$MM_1 = x - \frac{a}{e} \quad e \quad MM_2 = x + \frac{a}{e}$$

Assim, por divisões, membro a membro:

$$\frac{MF}{MM_1} = \frac{ex - a}{x - \frac{a}{e}} = \frac{e(ex - a)}{ex - a} = e \quad (1)$$

$$\frac{MF'}{MM_2} = \frac{a + ex}{\frac{a}{e} + x} = \frac{e(a + ex)}{a + ex} = e \quad (2)$$

Como as abscissas das retas  $d$  e  $d'$  (Figura 322) são invariáveis, para a hipérbole considerada, as relações (1) e (2) demonstram o teorema, visto que o ponto  $M$  escolhido é genérico.

### 203 – Diretrizes da hipérbole

As retas  $d$  e  $d'$ , acima instituídas, são denominadas diretrizes da hipérbole.

Então, a hipérbole possui duas diretrizes perpendiculares a seu eixo real, distantes, ambas,  $\frac{a}{e}$  de seu centro (Figura 323).

### 204 – Observações

204.1 – As diretrizes da hipérbole são simétricas em relação ao seu centro.

204.2 – As diretrizes da hipérbole situam-se entre os dois ramos da curva (Figura 323), pois o quociente  $\frac{a}{e}$  é menor que  $a$ .

204.3 – A distância entre as diretrizes da hipérbole é igual à razão entre seu eixo real  $2a$  e sua excentricidade  $e$ .

204.4 – Quanto maior for a excentricidade da hipérbole, menor será a distância entre suas diretrizes.

204.5 – Na situação limite em que a excentricidade da hipérbole tende ao infinito, a distância entre suas diretrizes tende a se anular, ou seja, elas tendem a coincidir com a perpendicular ao eixo real, traçada pelo centro da curva.

204.6 – Quando decresce o valor da excentricidade da hipérbole, tendendo a seu limite mínimo unitário, cresce a distância entre suas diretrizes que, na posição limite, tendem a ser as tangentes à hipérbole em seus vértices.

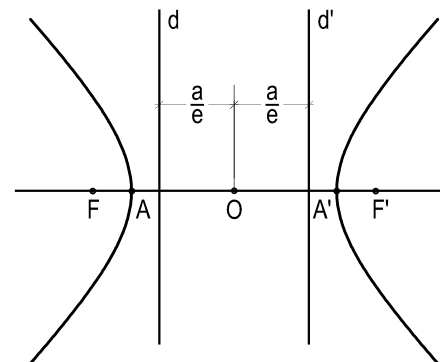


Figura 323

## 205 – Diretrizes das cônicas

Reunindo tudo o que já foi estudado, pode-se concluir que as cônicas bifocais (elipse e hipérbole) têm duas diretrizes cada, enquanto que a parábola tem apenas uma (Figuras 324, 325 e 326).

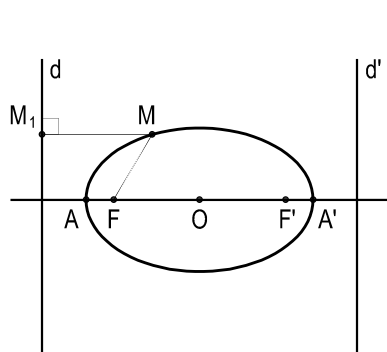


Figura 324

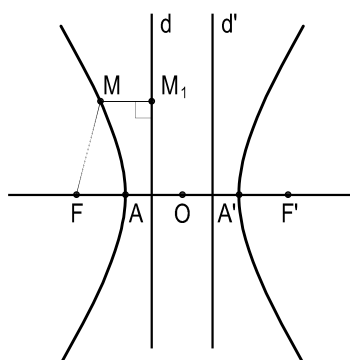


Figura 325

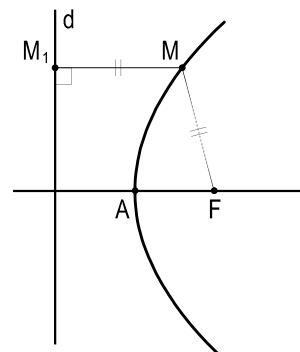


Figura 326

E que é constante a razão, para todas as três cônicas, entre as distâncias de seus pontos a um foco e à diretriz mais próxima, sempre igual à excentricidade  $e$  da curva.

Assim, pode-se organizar o seguinte resumo:

- para as elipses –  $e < 1$
- para as parábolas –  $e = 1$
- para as hipérboles –  $e > 1$

## 206 – Observações

206.1 – As cônicas podem ser definidas como sendo as curvas cujos pontos guardam razão constante entre suas distâncias a um ponto e a uma reta fixos.

206.2 – Como a excentricidade é um valor sempre positivo, pode-se escrever, para as elipses:

$$0 < e < 1$$

206.3 – Como visto anteriormente (número 15.2), a circunferência de círculo pode ser entendida, em termos limites, como uma elipse de excentricidade nula.



## 207 – Diretrizes das seções cônicas

Tudo o que foi até agora estudado, no plano, para as diretrizes da elipse, da hipérbole e da parábola merece, também, ser observado no espaço tridimensional, como passamos a detalhar.

Para tanto, consideremos, em todos os casos, uma superfície cônica de revolução de duas folhas ( $V$ ), um plano a ela secante e exterior ao seu vértice, bem como as esferas de Dandelin correspondentes.

## 208 – Diretrizes da elipse

Seja ( $\gamma$ ) um plano secante à superfície cônica de revolução ( $V$ ), que atinja todas as geratrizes de uma única folha, e ( $e$ ) a elipse seção assim produzida (número 188).

Sendo ( $c_1$ ) e ( $c_2$ ) as circunferências de contato das esferas de Dandelin ( $O_1$ ) e ( $O_2$ ) consideradas, os planos ( $\pi_1$ ) e ( $\pi_2$ ) que contêm cada uma dessas circunferências, por serem perpendiculares ao eixo da superfície, são paralelos entre si, produzindo, por isso, interseções ( $d_1$ ) e ( $d_2$ ) paralelas com o plano ( $\gamma$ ).

Tais retas ( $d_1$ ) e ( $d_2$ ) são (Figura 327) as diretrizes da elipse ( $e$ ) em estudo.

Observe-se que as diretrizes ( $d_1$ ) e ( $d_2$ ), simétricas em relação ao centro da elipse ( $e$ ), são exteriores à curva, tal como demonstrado anteriormente (número 201.2).

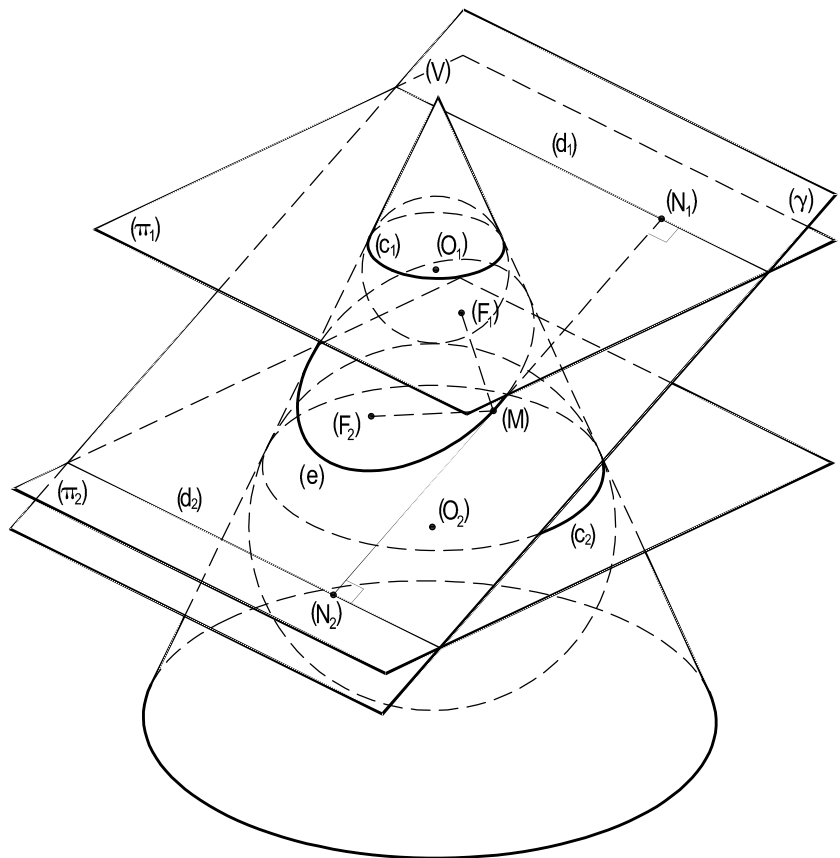


Figura 327

## 209 – Diretrizes da hipérbole

Admitamos, agora, que o plano secante  $(\gamma)$ , exterior ao vértice  $(V)$  da superfície cônica de revolução de duas folhas, atinja geratrizes dessas suas folhas, produzindo, como se sabe (número 188), uma hipérbole  $(h)$  (Figura 328).

Mais uma vez, os planos  $(\pi_1)$  e  $(\pi_2)$  das circunferências de contato das esferas de Dandelin  $(O_1)$  e  $(O_2)$ , por serem perpendiculares ao eixo da superfície, são paralelos entre si, produzindo, assim, por interseção com  $(\gamma)$ , as retas  $(d_1)$  e  $(d_2)$ , paralelas (Figura 328).

São estas retas  $(d_1)$  e  $(d_2)$  as diretrizes da hipérbole  $(h)$ , seção em estudo, simétricas em relação ao centro da curva seção e situadas, ambas, entre seus vértices (número 204.2).

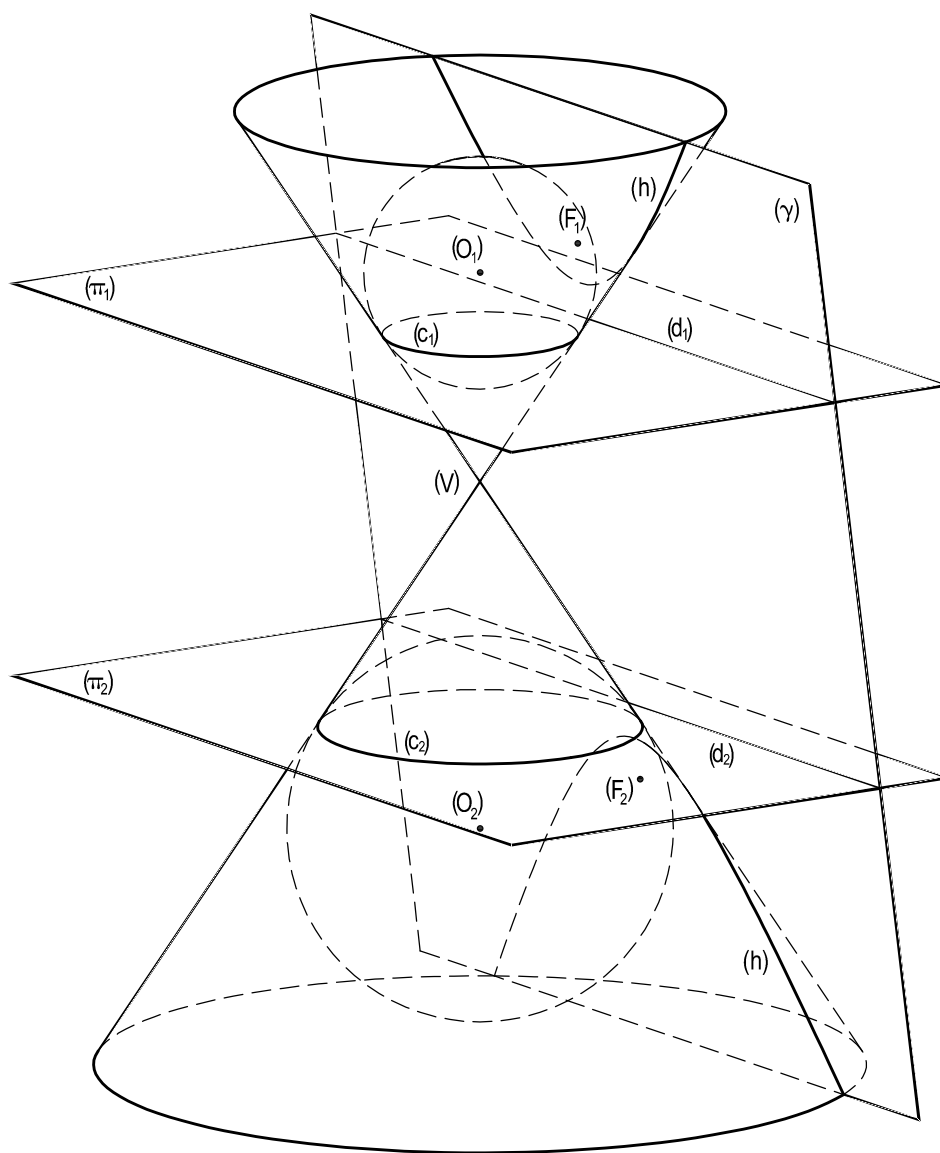


Figura 328

## 210 – Diretriz da parábola

Por último, voltemos a considerar a superfície cônica de revolução ( $V$ ) e o plano secante ( $\gamma$ ), agora paralelo à geratriz ( $V$ )( $A$ ) da superfície, atingindo, por isso, apenas uma folha da superfície (Figura 329), produzindo, então (número 188), por seção, a parábola ( $p$ ).

No caso, há apenas uma esfera de Dandelin ( $O$ ) e, assim, uma só circunferência ( $c$ ) de contato, cujo plano ( $\pi$ ) intercepta ( $\gamma$ ) segundo a reta ( $d$ ) que, como se sabe (número 188), é a diretriz da parábola (Figura 329), evidentemente, exterior à curva.

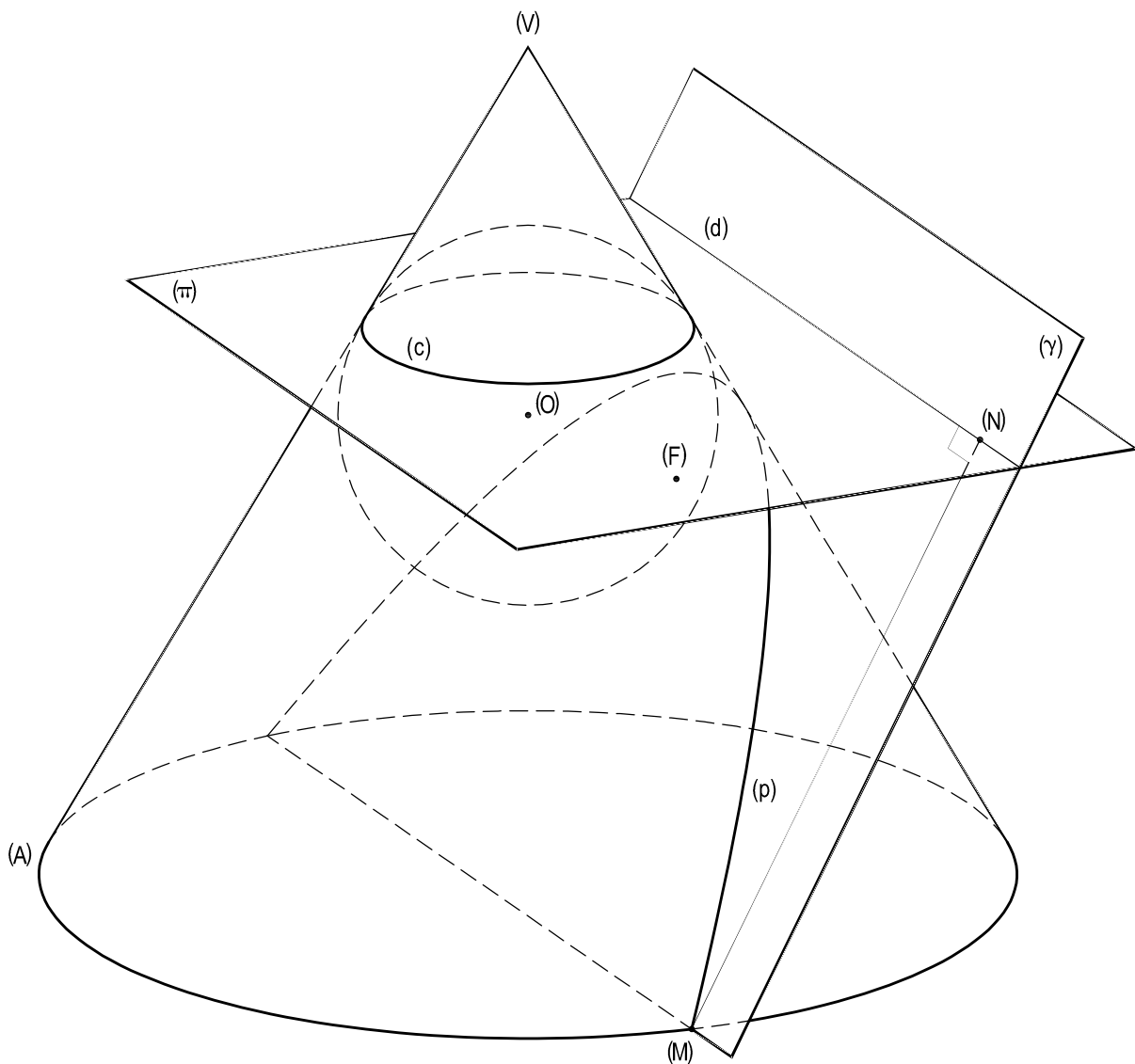


Figura 329

## 211 – Observações

Consideremos uma superfície cônica de revolução ( $V$ ) de duas folhas e as seções que um plano ( $\gamma$ ) a ela secante e exterior ao seu vértice ( $V$ ) produz e, para a análise aqui pretendida, trabalhemos com uma seção meridiana da superfície e incluamos uma das esferas de Dandelin correspondentes, aqui representada pela circunferência ( $O$ ), tangente a duas geratrizes  $VG$  e  $VJ$  axialmente opostas e ao traço  $\gamma\pi$  do plano secante com o da seção meridiana utilizada (Figura 330).

Nesta posição inicial, sabe-se (números 188 e 192.1) que a seção é elítica e que, na seção meridiana apreciada (Figura 330), o ponto  $F$  de contato dessa esfera com o plano secante é um dos focos da elipse e que a interseção  $d$ , do traço do paralelo de contato da esfera com a superfície cônica no plano secante, representa (número 208) uma das diretrizes da elipse seção.

Giremos o plano secante ( $\gamma$ ), sempre tangente à esfera de Dandelin considerada, no sentido anti-horário, como indicado na Figura 331, observando que as seções assim conseguidas continuam a ser elíticas, cada vez mais alongadas, sendo um de seus focos  $F$  sempre o ponto de tangência do plano secante com a esfera de Dandelin que foi mantida fixa, sendo suas diretrizes sempre as interseções de ( $\gamma$ ) com o plano de paralelo de contato dessa esfera, fixo também.

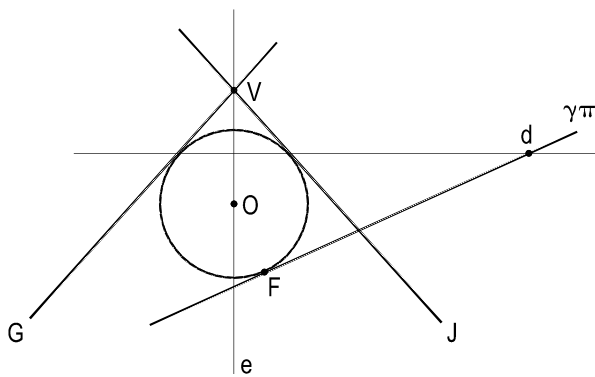


Figura 330

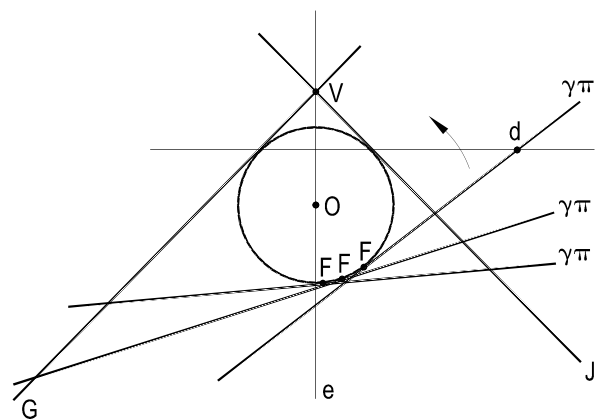


Figura 331

Mantida fixa essa esfera ( $O$ ) de Dandelin, continuemos a girar o plano secante à superfície até que, em posição particular, ele venha a ficar (Figura 332) paralelo à geratriz  $VG$  da superfície, levando, como se sabe (números 188 e 192.2), a seção  $\alpha$  conquistar a natureza parabólica.

A parábola seção, nesta posição representada na seção meridiana em estudo (Figura 332), tem foco  $F$  e diretriz  $d$ .

Prosseguindo na rotação do plano secante e no mesmo sentido já adotado, observa-se que passam a ser, agora, atingidas as duas folhas da superfície e que, então, as seções produzidas (números 188 e 192.2) são hiperbólicas (Figura 333).

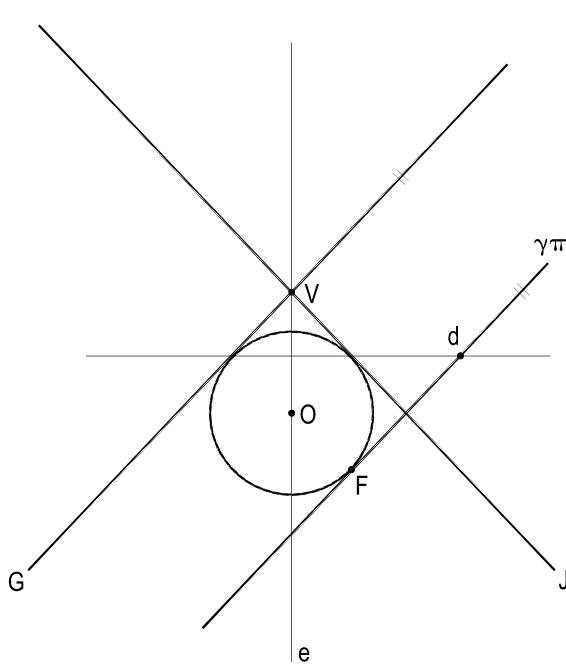


Figura 332

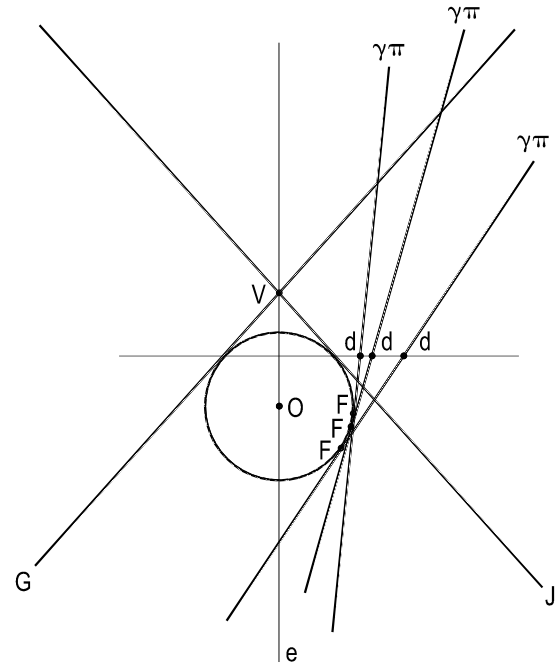


Figura 333

Esta sequência de interseções do plano considerado ( $\gamma$ ) com a superfície cônica de revolução ( $V$ ), de duas folhas, aqui apreciadas em seções meridianas da superfície, confirmam propriedades anteriormente demonstradas e que podem ser assim resumidas:

211.1 – As seções por um plano exterior a seu vértice numa superfície cônica de revolução de duas folhas são elipses, parábolas ou hipérbolés, conforme, respectivamente, tais planos atinjam todas as geratrizes de uma das folhas, sejam paralelos a uma geratriz da superfície ou cortem suas duas folhas.

211.2 – A parábola pode ser considerada como posição limite de uma elipse, ou de uma hipérbole, quando um de seus focos é impróprio.

211.3 – Ao contrário da elipse e da hipérbole, que possuem duas diretrizes, a parábola tem apenas uma.



DADOS INTERNACIONAIS PARA CATALOGAÇÃO NA  
PUBLICAÇÃO (CIP)

---

A44cg

Almeida, Célio Pinto de, 1937-  
Cônicas / Célio Pinto de Almeida. – Rio de Janeiro :  
G. Ermakoff, 2019.  
176 p. : il. ; 28 cm.

.  
ISBN - 9788598815381

1. Geometria. 2. Cônicas. I. Título.

CDD - 516

---

JOSE CARLOS DOS SANTOS MACEDO BIBLIOTECÁRIO CRB7 N. 3575

Este livro foi composto na tipografia Minion pro em  
corpo 12,5/17,3, impresso em papel offset 90g/m<sup>2</sup>,  
na gráfica Santa Marta – São Paulo.