

GEOMETRIA  
DESCRITIVA



Célio Pinto de Almeida

# GEOMETRIA DESCRITIVA

G.Ermakoff CASA EDITORIAL  
RIO DE JANEIRO | 2020

Geometria Descritiva  
Copyright © 2020 by Célio Pinto de Almeida

*Coordenação editorial:*  
George Ermakoff

*Capa:*  
Miriam Lerner e Marcelo Domingues

*Diagramação:*  
Marcelo Domingues

*Desenhos:*  
Michelle Bulhões

Imagem da capa:  
Prisma hexagonal regular

Primeira edição  
Tiragem: 1.000 exemplares – Distribuição gratuita

A Geometria Descritiva é deliciosa!

Simple, clara, facilmente dedutiva, não se utiliza de cálculos, ou fórmulas, para desenvolver seus raciocínios.

Assistindo à conferência na qual Gaspard Monge apresentou, publicamente, sua especial Geometria, o matemático Joseph-Louis Lagrange, presente à palestra, comentou: “Eu não sabia que sabia Geometria Descritiva”.



# SEGREDO MILITAR

Em finais do século XVIII, as batalhas terrestres incluíam frequentes ataques a cidades muradas e fortificações e confrontos a céu aberto, em terrenos muitas vezes de topografias acidentadas e não previamente mapeadas. As tropas necessitavam planeamento adequado para sua proteção de ataques inimigos e, no sentido contrário, estudos que definissem as melhores localizações para os próximos embates.

O que então era utilizado pelas equipas de engenharia dos exércitos decorria de enormes quantidades de cálculos aritméticos que considerassem os acidentes topográficos dos terrenos em questão e os alcances balísticos dos canhões utilizados, cada vez mais potentes.

Em determinada oportunidade, na Escola Militar de Mézières, onde trabalhava, Gaspard Monge recebeu solicitação de propor novos procedimentos para construir obras arquitetônicas para defesa das tropas em confrontos militares e para efetuar cortes de pedras a serem utilizadas nas fortificações.

Pois Gaspard, utilizando apenas conceitos geométricos, ao invés dos extensos e cansativos cálculos matemáticos de hábito, criou um prático método que atendeu plenamente tudo o que lhe fora solicitado.

Tais procedimentos, conhecidos, em conjunto, como Método de Monge, e que forjaram a base da Geometria Descritiva, foram adotados pelo exército francês e, limitados ao conhecimento reduzido de muito poucas pessoas, foram declarados segredo militar, sendo absolutamente vedada sua divulgação pública.

A Geometria Descritiva, em seu nascedouro, configurou-se como especial segredo de Estado!

O Método de Monge só foi, enfim, divulgado publicamente em 1794, pela Escola Normal Superior de Paris, 15 anos após sua criação.



# GASPARD MONGE

Criado com os irmãos Louis e Jean, Gaspard, o caçula, desde cedo, trouxe alegrias a seu pai Jacques, um mascate pobre, que chegou da Alta Saboia e se casou com Jeanne Rousseaux, natural de Beaune, na Borgonha, onde nasceram todos os seus filhos. Garpard foi, desde cedo, brilhante nas escolas locais, conquistando, sempre, o primeiro lugar em todas as classes.

Em 1762, com 16 anos, Garpard concluiu seu curso em Beaune e fez, com instrumentos que ele próprio construiu, um excelente mapa da cidade natal, em grande escala, que, muito admirado por suas qualidade e precisão, lhe proporcionaram um curso de aperfeiçoamento em Física, na cidade de Lyon, numa escola conduzida pela mesma ordem religiosa daquela a que havia pertencido, em Beaune.

Após dois anos, retornou à sua cidade de origem, tendo recebido convite da Escola Militar de Mézières para prestar serviços de agrimensura e desenho.

Em contato com importante matéria, que se ocupava de desenvolver a teoria das fortificações, Garpard apresentou a seus superiores métodos novos, da natureza geométrica, muito mais simples que os cálculos aritméticos então utilizados para projetar fortificações e defesas que protegessem as tropas francesas de ataques inimigos. Tais propostas, mesmo que não bem compreendidas e aceitas a princípio, chegaram a ser reconhecidas como brilhantes, levando Gaspard a desenvolver os métodos por ele concebidos e que vieram a ser a base da Geometria Descritiva, que ele, em seguida, criou e detalhou.

Por duas décadas, Garpard Monge viveu grande crescimento intelectual e tecnológico, tendo estendido seus estudos às áreas da Física e da Química, com excepcionais resultados, que contaram com a publicação de dezenas de artigos e estudos. Em 1792, foi nomeado Ministro da Marinha Francesa.

Participou ativamente das criações da Escola Normal Superior e da Escola Politécnica de Paris e na implantação do sistema decimal de pesos e medidas. Foi membro da Academia de Ciências da França.

Defendeu fortemente a Revolução Francesa, foi amigo de Napoleão Bonaparte e esteve na expedição francesa ao norte da África, chegando a receber do Imperador o título de conde.

Com a restauração da Monarquia na França, devido ao especial apoio que sempre emprestou a Napoleão e às suas ideias, foi banido de todos os postos que ocupava. A perseguição que os Bourbons impuseram a Monge culminou quando, por ocasião de seus funerais, proibiram aos alunos da Escola Politécnica, que tinham Monge como ídolo, o movimento que estavam preparando para homenageá-lo. Os alunos tiveram que obedecer tal proibição, mas, argumentando que ela limitava-se apenas aos atos do funeral, no dia seguinte, em grande quantidade, marcharam até o cemitério para colocar uma coroa de flores na sepultura de seu grande mestre.

Entre todos os seus inúmeros feitos, o que maior fama lhe deixou foi a criação da Geometria Descritiva, completa, como até hoje a conhecemos.

# LISTAGEM DE ASSUNTOS

A listagem abaixo apresenta, em cada capítulo, os principais assuntos, definições e teoremas, ao invés do habitual sumário de títulos, tais as quantidades de conceituações e demonstrações.

<b>Capítulo I – Fundamentos e nomenclatura</b>	Conceituação .....	17
	Coordenadas do ponto .....	18
	Sinais das coordenadas .....	19
	Épura .....	20
	Épuras de pontos nos quatro diedros .....	21
	Posições especiais do ponto .....	21
	Planos bissetores .....	22
	Pontos pertencentes aos planos bissetores .....	22
<b>Capítulo II – Reta</b>	Teorema .....	23
	Traços de uma reta .....	24
	Verdadeira grandeza .....	25
	Classificação das retas .....	25
	Reta horizontal .....	26
	Reta frontal .....	26
	Reta fronto-horizontal .....	27
	Reta vertical .....	27
	Reta de topo .....	27
	Reta de perfil .....	28
	Reta qualquer .....	28
	Posições relativas de duas retas .....	31
	Retas concorrentes .....	31
	Retas paralelas .....	34
	Retas pertencentes a um dos bissetores .....	36
	Retas paralelas a um dos bissetores .....	37
<b>Capítulo III – Plano</b>	Traços de um plano .....	39
	Classificação dos planos .....	40
	Plano horizontal .....	40
	Plano frontal .....	41
	Plano vertical .....	41
	Plano de topo .....	42
	Plano de perfil .....	42
	Plano paralelo à linha de terra .....	43
	Plano pertencente à linha de terra .....	43
	Plano qualquer .....	44
	Retas dos planos .....	45
	Plano não dado por seus traços .....	49

	Determinação dos traços de um plano .....	50
	Marcação de ponto em plano .....	52
	Determinação dos traços de um plano de um plano com os bissetores .....	57
	Supressão da linha de terra .....	58
<b>Capítulo IV – Reta de maior declive</b>	Reta de maior declive .....	59
	Retas de maior declive e de maior inclinação .....	60
<b>Capítulo V – Interseções</b>	Interseção de dois planos .....	65
	Ponto comum a três planos .....	69
	Interseção de reta e plano .....	70
<b>Capítulo VI – Paralelismo</b>	Retas paralelas a planos .....	71
	Construção de uma reta paralela a um plano .....	72
	Construção de uma reta paralela a dois planos secantes ...	74
	Construção de um plano paralelo a uma reta .....	75
	Planos paralelos .....	76
	Planos paralelos a ( $\beta_{24}$ ) .....	78
	Planos paralelos a ( $\beta_{13}$ ) .....	79
	Retas reversas .....	80
	Construção de uma reta concorrente com duas reversas	81
<b>Capítulo VII – Ortogonalidade</b>	Reta perpendicular a um plano .....	83
	Plano perpendicular a uma reta .....	85
	Retas ortogonais .....	85
	Planos perpendiculares .....	88
	Construção de plano perpendicular a outro plano dado ..	89
	Retas perpendiculares aos bissetores .....	91
	Planos perpendiculares aos bissetores .....	92
	Perpendicular comum a duas retas reversas .....	93
<b>Capítulo VIII – Mudanças dos planos de projeção</b>	Métodos descritivos .....	99
	Método das mudanças dos planos de projeção .....	99
	Mudança do plano vertical de projeção .....	100
	Mudança do plano horizontal de projeção .....	100
	Mudanças sucessivas .....	101
	Principais aplicações às retas .....	101
	Construção da perpendicular comum a duas retas reversas	102
	Aplicações aos planos .....	104
	Ângulos do plano qualquer com os de projeção .....	106
	Distância entre dois planos paralelos .....	106
	Distância de um ponto a um plano .....	107
	Distância entre duas retas paralelas .....	108
	Distância entre um ponto e uma reta .....	109
<b>Capítulo IX – Rotações</b>	Método das rotações .....	113
	Rotação do ponto .....	116
	Rotação de reta concorrente com o eixo .....	117

	Rotação de reta reversa ao eixo .....	121
	Rotação do plano .....	125
	Rotação de plano secante ao eixo .....	126
	Rotação de plano paralelo ao eixo .....	128
<b>Capítulo X – Rebatimentos</b>		
	Método dos rebatimentos .....	129
	Rebatimento de um plano sobre um plano de projeção ..	130
	Rebatimento de um plano sobre um plano horizontal ou frontal .....	130
	Triângulo de rebatimento .....	131
	Porção útil de um plano .....	131
	Rebatimento do plano de topo .....	133
	Rebatimento do plano vertical .....	134
	Rebatimento do plano de perfil .....	135
	Rebatimento do plano paralelo a $(\pi'\pi)$ .....	136
	Rebatimento do plano $(\pi'\pi) - (M)$ .....	140
	Rebatimento do plano qualquer .....	142
	Aplicação dos rebatimentos às rotações .....	148
<b>Capítulo XI – Problemas métricos – Distâncias</b>		
	Distância entre dois pontos .....	151
	Distância de ponto à reta .....	155
	Distância de ponto a plano .....	158
	Distância entre duas retas paralelas .....	160
	Distância entre duas retas reversas .....	160
	Distância entre reta e plano, paralelos .....	160
	Distância entre planos paralelos .....	160
<b>Capítulo XII – Problemas métricos – Ângulos</b>		
	Ângulo de reta com cada plano de projeção .....	161
	Ângulo de plano com cada plano de projeção .....	162
	Ângulo de duas retas .....	163
	Ângulo de reta com plano .....	164
	Ângulo de dois planos .....	167
	Construção da reta a partir de seus ângulos com $(\pi)$ e com $(\pi')$ .....	172
	Construção do plano a partir de seus ângulos com $(\pi)$ e com $(\pi')$ .....	174
<b>Capítulo XIII – Equidistâncias e equiinclinações</b>		
	Plano mediador de um segmento de reta .....	177
	Plano bissetor de duas retas concorrentes .....	179
	Bissetor de um diedro .....	186
	Bissetores de dois planos secantes .....	186
<b>Capítulo XIV – Poliedros</b>		
	Definições .....	195
	Gênero .....	196
	Poliedros convexos regulares .....	196
	Prismas .....	198
	Troncos de prismas .....	199
	Pirâmides .....	199

	Troncos de pirâmides .....	200
	Convenções gráficas para a visibilidade .....	202
	Representação, em épura, de poliedros .....	204
	Poliedros regulares – posições especiais .....	212
	Tetraedro regular .....	212
	Hexaedro regular .....	215
	Octaedro regular .....	218
<b>Capítulo XV – Construção de poliedros</b>	Construção de poliedros .....	221
<b>Capítulo XVI – Seções planas em poliedros</b>	Posições relativas entre um plano e um poliedro .....	255
	Seções planas no tetraedro regular .....	257
	Seções planas no hexaedro regular .....	260
	Seções planas no octaedro regular .....	263
	Seções planas nos prismas e nos troncos de prismas ....	266
	Seções planas nas pirâmides e nos troncos de pirâmides ...	268
	Determinação da seção plana num poliedro .....	269
<b>Capítulo XVII – Cilindros – Troncos de cilindro</b>	Superfícies cilíndricas .....	283
	Cilindros .....	284
	Troncos de cilindro .....	285
	Seção reta .....	285
	Projeções elíticas do círculo .....	285
	Construção de cilindros e de troncos de cilindro .....	286
<b>Capítulo XVIII – Cones – Troncos de cone</b>	Superfícies cônicas .....	293
	Cones .....	295
	Troncos de cone de primeira espécie .....	296
	Troncos de cone de segunda espécie .....	296
	Troncos de cone de revolução .....	297
	Construção de cones e de troncos de cone .....	297
<b>Capítulo XIX – Esfera</b>	Superfície esférica .....	309
	Esfera .....	310
	Propriedades .....	310
<b>Capítulo XX – Partes de esfera</b>	Fuso esférico e cunha esférica .....	325
	Zona esférica e calota esférica .....	325
	Segmentos esféricos .....	326
	Setor esférico .....	326
	Anel esférico .....	327

# ITENS DESTACADOS

A seguir, por ordem alfabética, vão listados os itens habitualmente mais procurados.

Anel esférico .....	327
Bissetores de dois planos secantes .....	186
Calota esférica .....	325
Convenções gráficas para a visibilidade .....	202
Cunha esférica .....	325
Determinação dos traços de um plano .....	50
Distância entre duas retas reversas .....	160
Épura .....	20
Fuso esférico .....	325
Interseção de dois planos .....	65
Interseção de reta e plano .....	70
Marcação de ponto em plano .....	52
Métodos descritivos .....	99
Mudanças dos planos de projeção .....	99
Perpendicular comum a duas retas reversas .....	93
Plano bissetor de duas retas concorrentes .....	179
Plano de perfil .....	42
Plano de topo .....	42
Plano frontal .....	41
Plano horizontal .....	40
Plano mediador de um segmento de reta .....	177
Plano paralelo à linha de terra .....	43
Plano pertencente à linha de terra .....	43
Plano qualquer .....	44
Plano vertical .....	41
Planos bissetores .....	22
Planos paralelos a $(\beta_{13})$ .....	79
Planos paralelos a $(\beta_{24})$ .....	78
Planos perpendiculares .....	88
Ponto comum a três planos .....	69
Porção útil de um plano .....	131
Projeções elípticas do círculo .....	285
Rebatimentos .....	129

Reta de maior declive .....	59
Reta de maior inclinação .....	60
Reta de perfil .....	28
Reta de topo .....	27
Reta frontal .....	26
Reta fronto-horizontal .....	27
Reta horizontal .....	26
Reta qualquer .....	28
Reta vertical .....	27
Retas ortogonais .....	85
Retas paralelas a um dos bissetores .....	37
Retas pertencentes a um dos bissetores .....	36
Retas reversas .....	80
Rotações .....	113
Seção reta .....	285
Segmentos esféricos .....	326
Setor esférico .....	326
Supressão da linha de terra .....	58
Traços de um plano .....	39
Traços de uma reta .....	24
Triângulo de rebatimento .....	131
Verdadeira grandeza .....	25
Zona esférica .....	325

# CAPÍTULO I

## FUNDAMENTOS E NOMENCLATURA

### 1 – Conceituação

A Geometria Descritiva, criada pelo matemático francês Gaspard Monge no final do século XVIII, tem por objetivo resolver, no plano, problemas geométricos existentes em ambiente tridimensional, utilizando projeções ortogonais dos elementos envolvidos sobre dois planos perpendiculares entre si.

Consegue-se, assim, mediante a simplificação de uma dimensão, optar por aplicar todo o conhecimento da Geometria Plana à resolução dos problemas espaciais, seja quanto às grandezas, seja quanto às formas e às suas posições relativas.

Uma das principais aplicações práticas da Geometria Descritiva é o desenho técnico, com vistas ortogonais, cortes e seções, permitindo o estudo detalhado dos sólidos.

Tudo se passa a partir da consideração, como referência, de um par de planos perpendiculares, sobre os quais são projetados ortogonalmente os elementos em estudo, para sua apreciação e análise em condições bidimensionais.

Os dois planos de projeção ocupam as posições horizontal e vertical e são, respectivamente, denominados plano horizontal de projeção e plano vertical de projeção, sendo comumente representados pelas letras gregas  $(\pi)$  e  $(\pi')$ , respectivamente (Figura 1).

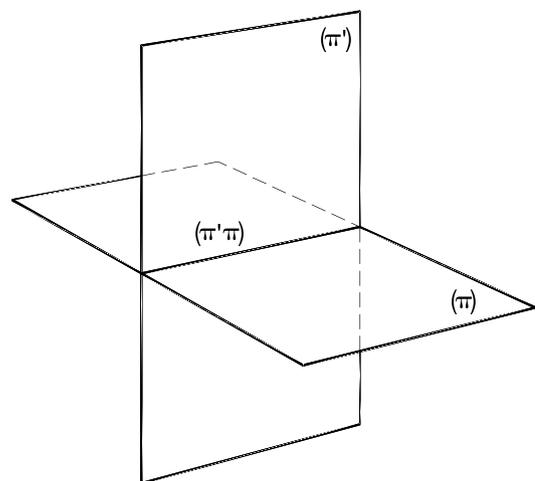


Figura 1

Sua interseção é denominada linha de terra, sendo, habitualmente representada por  $(\pi' \pi)$ , como indicado na Figura 1.

## 2 – Nomenclatura

Os quatro diedros formados pelos dois planos de projeção são numerados sequencialmente no sentido anti-horário, sendo o primeiro o situado à frente do plano vertical de projeção e acima do horizontal de projeção (Figura 2).

Apesar da impropriedade de tal simbologia, os semiplanos formados pela linha de terra são habitualmente designados planos verticais superior ( $\pi'_S$ ) e inferior ( $\pi'_I$ ) e planos horizontais anterior ( $\pi_A$ ) e posterior ( $\pi_P$ ), como indicado na Figura 2.

As figuras espaciais são indicadas por letras, ou números, entre parênteses, suas projeções horizontais pelas mesmas letras, ou números, sem parênteses e as verticais por esses símbolos acrescidos de um apóstrofo (Figura 2). Para os pontos, são utilizadas letras maiúsculas; para as retas, minúsculas.

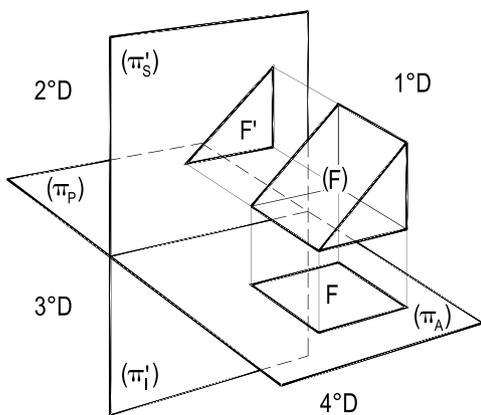


Figura 2

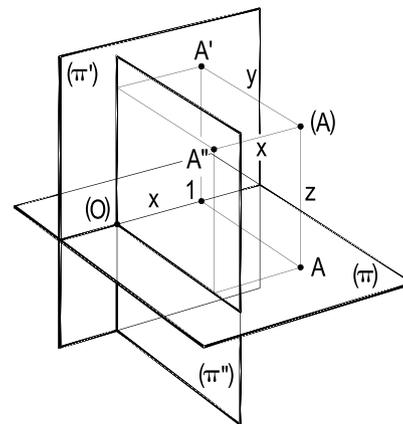


Figura 3

## 3 – Coordenadas do ponto

Como, naturalmente, são três as coordenadas de cada ponto, necessita-se de um novo plano referencial ( $\pi''$ ), que é perpendicular aos dois de projeção e conduzido por um ponto (O) da linha de terra, tomado como origem para a primeira das coordenadas, a abscissa. As outras duas são o afastamento e a cota, distâncias do ponto considerado a ( $\pi'$ ) e a ( $\pi$ ), respectivamente.

Como notação, escreve-se  $(A)(x, y, z)$ , para identificar o ponto por suas três coordenadas, sempre em ordem alfabética, abscissa, afastamento e cota. Assim, na Figura 3, para o ponto  $(A)(x, y, z)$  considerado, temos:

$$\text{Abscissa} \quad x = \overline{A''(A)} = \overline{(O)1}$$

$$\text{Afastamento} \quad y = \overline{A'(A)} = \overline{1A}$$

$$\text{Cota} \quad z = \overline{A(A)} = \overline{1A'}$$

O plano ( $\pi''$ ), referencial para a contagem das abscissas, não é, a princípio, considerado um plano de projeção, embora, como adiante se verá, possa ser utilizado como tal, para esclarecer questões que os dois principais ainda permitam persistir e para resolver problemas especiais. Trata-se, como à frente se definirá (número 36), de um plano de perfil.

#### 4 – Sinais das coordenadas

As coordenadas dos pontos, na Geometria Descritiva, têm medidas algébricas.

Assim (Figura 4) são positivas, respectivamente:

- as abscissas dos pontos localizados à direita de ( $\pi''$ ), colocado o observador no primeiro diedro;
- os afastamentos dos pontos situados à frente de ( $\pi'$ );
- as cotas dos pontos localizados acima de ( $\pi$ ).

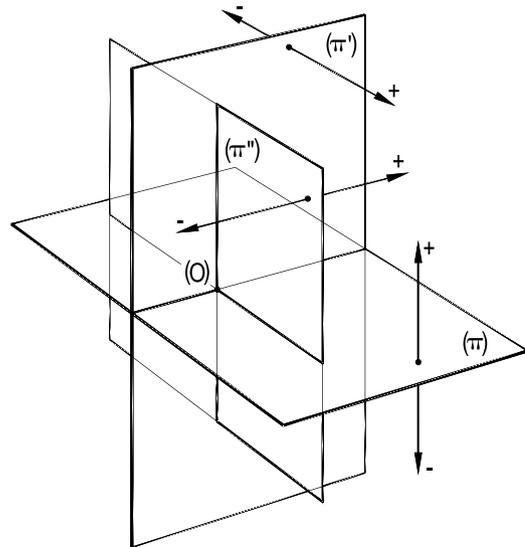


Figura 4

Desse modo, para afastamentos e cotas dos pontos, cabe o seguinte resumo:

Diedros	1º	2º	3º	4º
Afastamentos	+	-	-	+
Cotas	+	+	-	-

#### 5 – Representação

As figuras espaciais – como os planos e demais superfícies que, adiante, estudaremos – são, habitualmente, consideradas opacas. Assim, os elementos situados por trás delas serão representados por linhas tracejadas, como nas Figuras 1 e 2, por exemplo, ou por linhas finas, como nas Figuras 3 e 4, de modo a não poluir o desenho, em sua totalidade.

Utilizaremos, conforme a quantidade de elementos incluídos, e considerando suas posições relativas, uma dessas duas representações, sempre buscando a maior clareza do conjunto em estudo.

Eventualmente, para situações de muito maior densidade de linhas, algumas delas poderão ser interrompidas, nas regiões em que tais acúmulos vierem a ocorrer.

## 6 – Épura

Como o propósito da Geometria Descritiva é o estudo, em duas dimensões, de figuras espaciais, através de suas projeções, é necessário reuni-las num só plano.

Para tanto, o que se faz é girar o plano horizontal de projeção, em torno da linha de terra, no sentido horário, até que ele venha a coincidir com o plano vertical de projeção (Figura 5).

Analisando tal movimento para um ponto genérico ( $A$ ), porque o plano ( $\gamma$ ) que ele define com suas duas projeções  $A$  e  $A'$  é perpendicular à linha de terra, em sua posição final, após a rotação do plano horizontal de projeção, a projeção horizontal  $A$  definirá, com a projeção vertical  $A'$ , uma reta  $A'A$  perpendicular à linha de terra (Figuras 6 e 7).

Esta reta  $A'A$  é denominada linha de chamada para o ponto ( $A$ ) e é, habitualmente, representada por uma linha fina.

A figura final, após a rotação estudada, e que reúne as duas projeções  $A$  e  $A'$  do ponto ( $A$ ) com a linha de terra é denominada *épura* e se aplica não apenas a pontos, mas a todas as figuras estudadas pela Geometria Descritiva.

Épura é, portanto, a representação, num só plano, de qualquer figura geométrica, pela reunião de suas duas projeções ortogonais sobre dois planos perpendiculares, após a rotação de um sobre o outro, em torno de sua interseção.

Em *épura*, a linha de terra é comumente representada por uma reta contínua, horizontal, sublinhada por dois pequenos traços, tal como indicado na Figura 7.

Adiante veremos que situações podem ser propostas e resolvidas para *épuras* sem a presença da linha de terra, indispensável, no entanto, é claro, o conhecimento da direção das linhas de chamada.

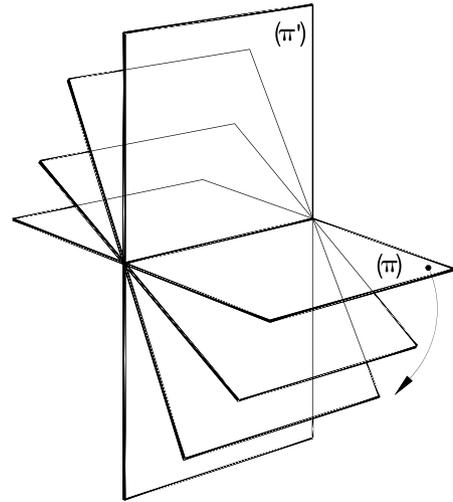


Figura 5

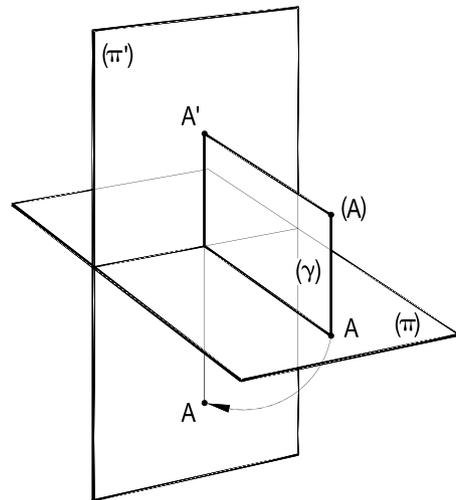


Figura 6

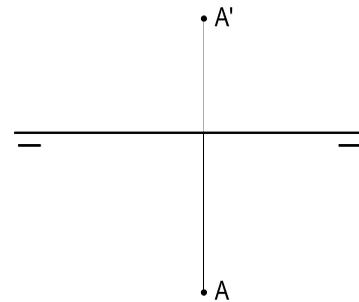


Figura 7

## 7 – Épuras de pontos nos quatro diedros

As Figuras 8 e 9, abaixo, apresentam pontos (A), (B), (C) e (D), respectivamente localizados nos primeiro, segundo, terceiro e quarto diedros, vistos no espaço e em écura.

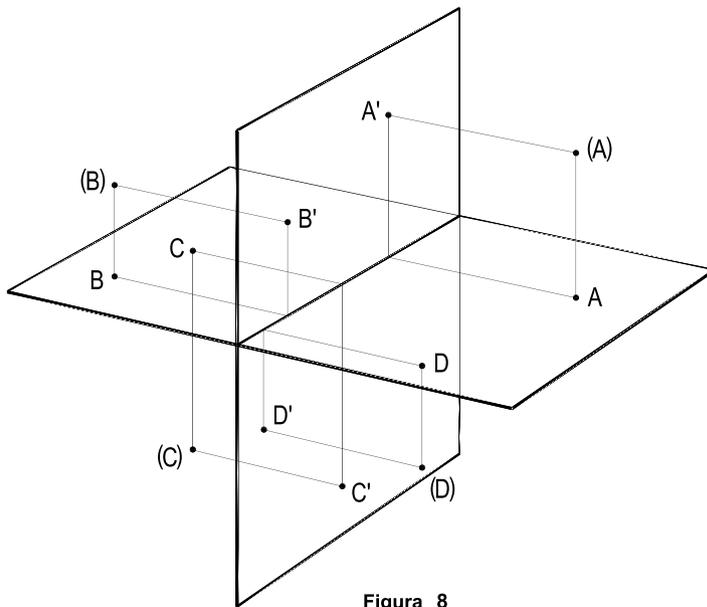


Figura 8

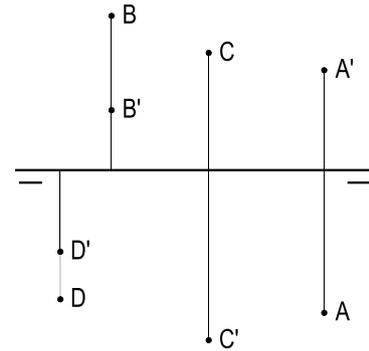


Figura 9

## 8 – Posições especiais do ponto

As Figuras 10 e 11, seguintes, mostram pontos (A), (B), (C), (D) e (E), em posições muito especiais: os dois primeiros situados no plano vertical de projeção, acima e abaixo da linha de terra; os dois seguintes no horizontal de projeção, à frente e atrás de  $(\pi')$ , e o último pertencendo à linha de terra.

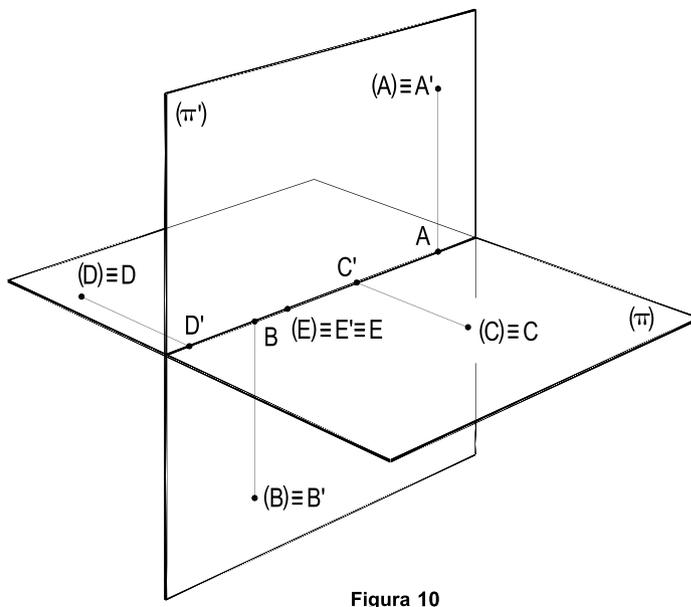


Figura 10

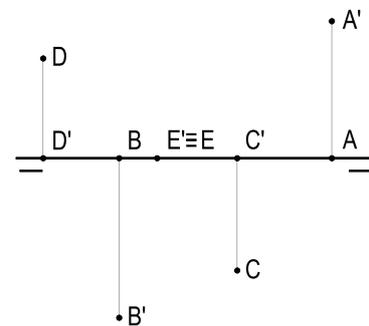


Figura 11

## 9 – Planos bissetores

Os diedros formados pelos planos de projeção admitem dois planos bissetores (*Geometria Espacial*, número 54), um dividindo ao meio os diedros ímpares e, por isso, denominado bissetor ímpar e outro atravessando os diedros pares e, então, designado bissetor par. São, habitualmente, anotados  $(\beta_{13})$  e  $(\beta_{24})$ , respectivamente (Figura 12).

Sabe-se que esses dois planos bissetores são perpendiculares entre si e que (*Geometria Espacial*, número 55.4) eles constituem o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos dois planos de projeção (Figura 13).

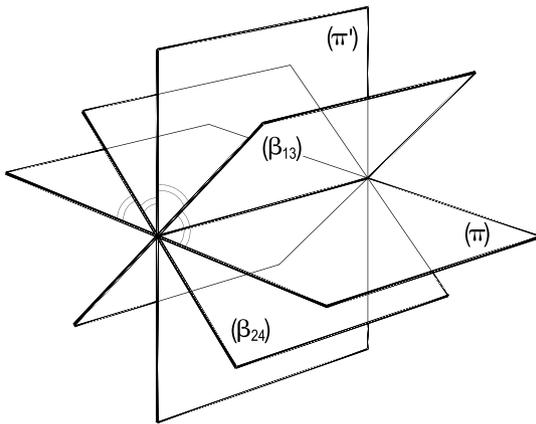


Figura 12

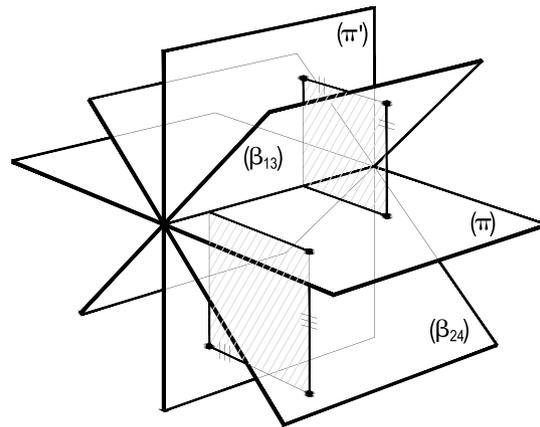


Figura 13

## 10 – Pontos pertencentes aos planos bissetores

Todo ponto pertencente ao bissetor ímpar tem cotas e afastamentos iguais e, por isso, apresenta, em *épura*, projeções simétricas em relação à linha de terra. Assim são os pontos (A) e (B) da Figura 14.

Todo ponto pertencente ao bissetor par tem cotas e afastamentos de mesmo valor absoluto, mas com sinais contrários e, então, em *épura*, são coincidentes suas projeções, tais como os pontos (C) e (D) da Figura 15.

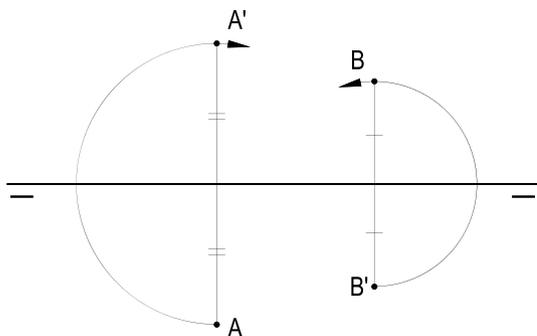


Figura 14

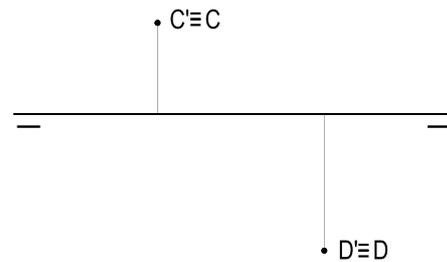


Figura 15

# CAPÍTULO II

## RETA

### 11 – Teorema

As projeções ortogonais de uma reta sobre cada um dos planos de projeção são retas, ou, eventualmente, pontos.

Demonstração: Consideremos uma reta genérica ( $r$ ) e construamos suas projeções ortogonais  $r$  e  $r'$  sobre os planos de projeção  $(\pi)$  e  $(\pi')$ , o que se consegue pelos traçados dos planos projetantes  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ , contendo  $(r)$  e respectivamente perpendiculares a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$  (Figura 16).

Como a projeção horizontal  $r$  da reta genérica ( $r$ ) em estudo é a interseção do plano projetante  $(\gamma)$  com o plano horizontal de projeção  $(\pi)$  (Figura 16),  $r$  tem de ser uma reta (*Geometria Espacial*, número 4). Da mesma forma, a projeção vertical  $r'$  da reta ( $r$ ) é a interseção do plano projetante  $(\varphi)$  com o plano vertical de projeção  $(\pi')$  (Figura 16).

Assim, as projeções ortogonais sobre  $(\pi)$  e sobre  $(\pi')$  de uma reta genérica ( $r$ ) são retilíneas, como se queria demonstrar.

É claro que, no caso particular em que as retas em estudo ( $s$ ) e ( $t$ ) são perpendiculares a um dos planos de projeção, suas projeções sobre os planos a que são perpendiculares têm de ser pontuais, embora a outra projeção continue a ser retilínea, tal como acima justificado, o que completa a demonstração do teorema proposto (Figura 17).

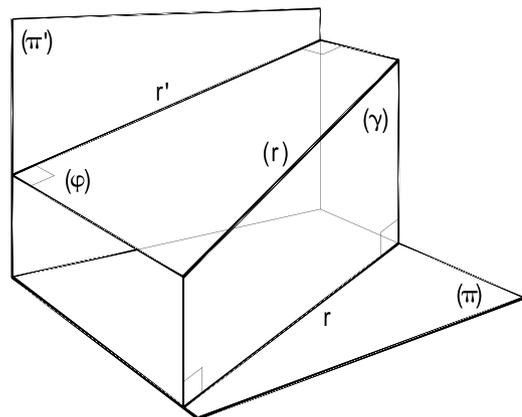


Figura 16

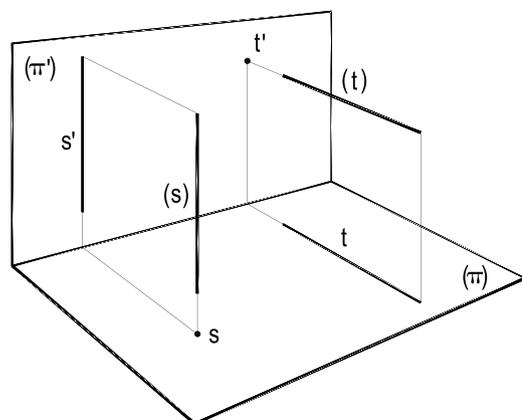


Figura 17

## 12 – Teorema

Quando um ponto pertence a uma reta, suas projeções pertencem às projeções de mesmo nome da reta.

Demonstração: Sejam  $(r)$  e  $(A)$  uma reta genérica e um ponto a ela pertencente.

Para obter  $r$  e  $r'$ , projeções ortogonais de  $(r)$  sobre  $(\pi)$  e  $(\pi')$ , sabe-se que se deve traçar os planos projetantes  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ , que, contendo  $(r)$ , são respectivamente perpendiculares a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$  (Figura 18).

Como as retas  $(A)A$  e  $(A)A'$ , projetantes do ponto  $(A)$ , por serem perpendiculares respectivamente a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$  (Figura 18), têm de pertencer, respectivamente, aos planos  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ , as projeções do ponto  $(A)$  hão de pertencer às interseções daqueles dois planos projetantes com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$ , que são as próprias projeções da reta  $(r)$  (Figura 19).

Então, quando um ponto pertence a uma reta, suas projeções pertencem às projeções de mesmo nome da reta, como se queria provar.

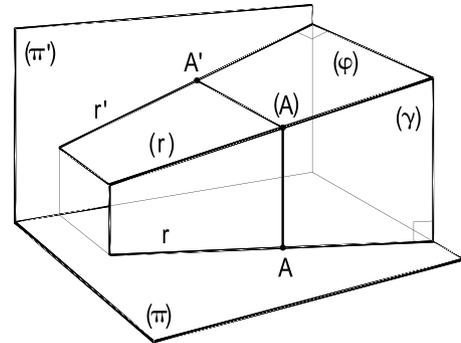


Figura 18

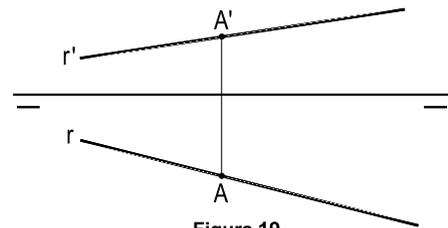


Figura 19

## 13 – Observações

13.1 – A recíproca é verdadeira, salvo para retas oblíquas a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$  e ortogonais, ou perpendiculares, à linha de terra, como será detalhado no número 26, adiante.

13.2 – O sinal habitualmente utilizado para a pertinência é a letra grega minúscula épsilon –  $\epsilon$ . Para indicar, então, que um ponto  $(A)$  pertence a uma reta  $(r)$ , anota-se  $(A) \in (r)$ .

## 14 – Traços de uma reta

De um modo geral, em Geometria Descritiva, traço é sinônimo de interseção. Assim, quando uma reta e um plano são secantes, o traço da reta com o plano é o ponto segundo o qual a reta corta o plano.

Entre os muitos possíveis, há dois traços que convém destacar para uma reta genérica  $(r)$ : o traço horizontal  $(H)$ , ponto em que ela corta o plano horizontal de projeção, e o vertical  $(V)$ , segundo o qual ela corta o plano vertical de projeção (Figura 20).

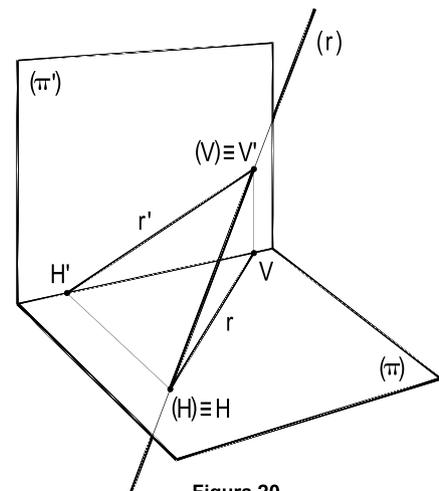


Figura 20

Em épura, tais pontos (H) e (V) são de imediata obtenção (número 8), por terem de ter, respectivamente, cota nula, ou afastamento nulo, tal como indicado na Figura 21.

Além desses dois, são também importantes os traços das retas com cada um dos bissetores. Assim são os pontos (I) e (P), nas Figuras 22 e 23, respectivamente, traços da reta genérica (r) com o bissetor ímpar e com o bissetor par.

As obtenções de tais pontos são de grande simplicidade, já que o traço (P) de (r) com o bissetor par há de ser em épura o ponto  $P \equiv P'$ , em que se encontram as duas projeções da reta (número 10), e o traço (I) com o bissetor ímpar se consegue, em épura, pela construção da simétrica  $\bar{r}'$  de uma das projeções  $r'$  de reta em questão, em relação à linha de terra e de seu corte com a outra projeção  $r$  (número 10).

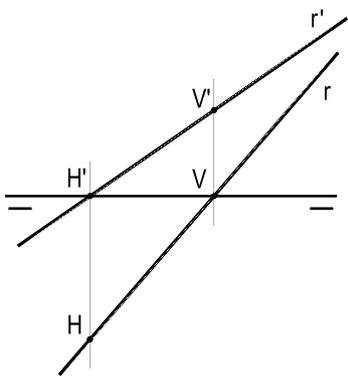


Figura 21

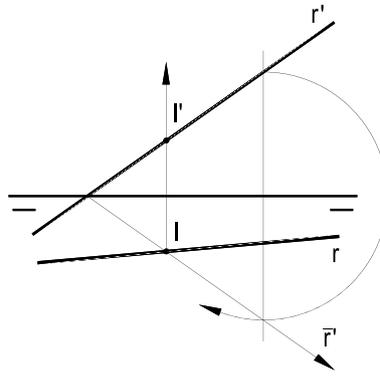


Figura 22

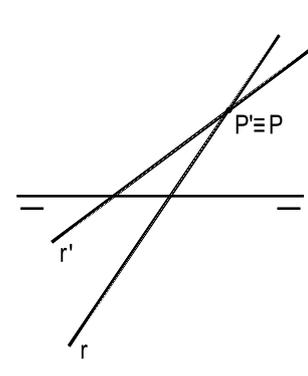


Figura 23

## 15 – Verdadeira grandeza

Sempre que uma distância, um ângulo, ou alguma outra grandeza se projeta igualmente sobre um plano, diz-se que ela se faz em verdadeira grandeza e se anota, resumidamente, em V.G.

## 16 – Classificação das retas

Quanto às posições que ocupam, em relação aos planos de projeção e à linha de terra, as retas classificam-se assim:

- Reta horizontal.
- Reta frontal.
- Reta fronto-horizontal, ou paralela à linha de terra.
- Reta vertical.
- Reta de topo.
- Reta de perfil.
- Reta qualquer.

Passemos a estudá-las, individualmente.

## 17 – Reta horizontal

- É a reta que é paralela a  $(\pi)$  e oblíqua a  $(\pi')$  (Figura 24).
- Tem cota constante.
- Tem traço vertical (V) e traços (I) e (P) com os bissetores (Figura 25).
- Não tem traço horizontal.
- Projeta-se em verdadeira grandeza sobre  $(\pi)$ , onde também apresenta em, V.G., o ângulo  $\beta$  que  $(r)$  forma com  $(\pi')$  (Figuras 24 e 25).

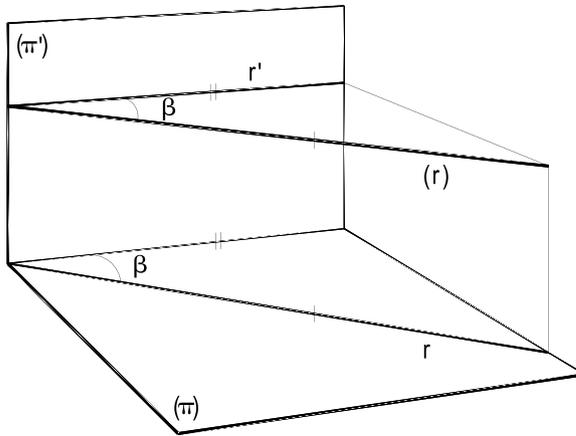


Figura 24

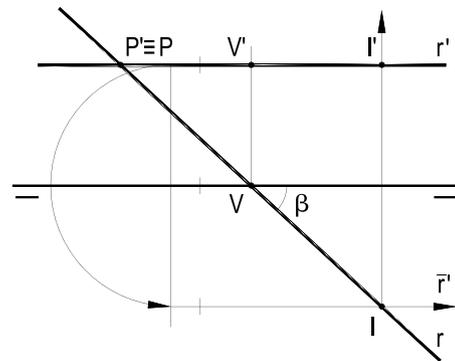


Figura 25

## 18 – Reta frontal

- É a reta que é paralela a  $(\pi')$  e oblíqua a  $(\pi)$  (Figura 26).
- Tem afastamento constante.
- Tem traço horizontal (H) e traços (I) e (P) com os planos bissetores (Figura 27).
- Não tem traço vertical.
- Projeta-se em verdadeira grandeza sobre  $(\pi')$  e sua projeção vertical  $r'$  apresenta, em V.G., o ângulo  $\alpha$  que  $(r)$  forma com  $(\pi)$  (Figuras 26 e 27).

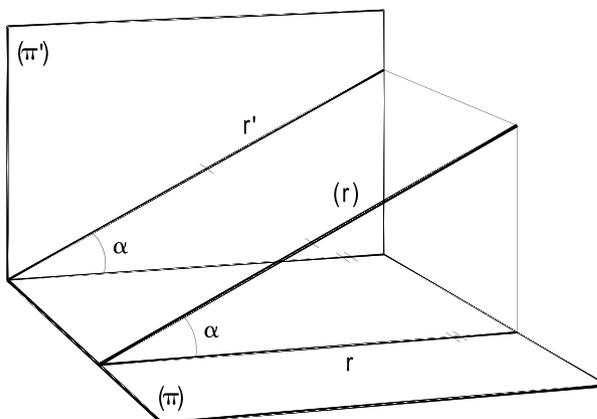


Figura 26

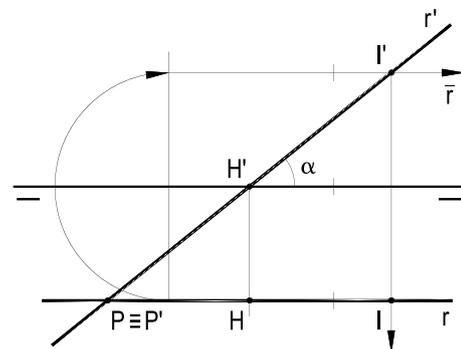


Figura 27

## 19 – Reta fronto-horizontal

- É a reta que é paralela aos dois planos de projeção e, por isso, (*Geometria Espacial*, número 10.2) é paralela à linha de terra (Figura 28).
- Tem cota e afastamentos constantes.
- Não tem traço horizontal, nem vertical.
- Também não tem traço com nenhum dos dois bissetores, podendo, eventualmente, pertencer a qualquer um dos dois, como são a reta (i), pertencente ao bissetor ímpar, e a reta (p), pertencente ao bissetor par (Figura 29).
- Projeta-se em V.G. em ambos os planos de projeção.

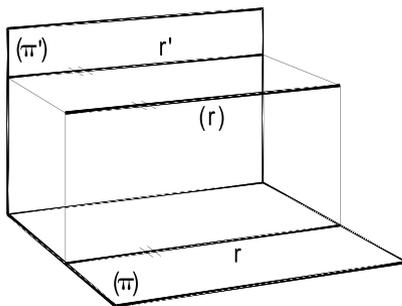


Figura 28

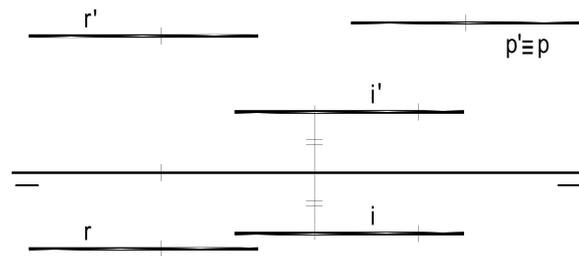


Figura 29

## 20 – Reta vertical

- É a reta que é perpendicular a  $(\pi)$ .
- Tem abscissa e afastamento constantes (Figura 30).
- Sua projeção horizontal reduz-se a um ponto (Figura 31).
- Tem traço horizontal (H) e traços (P) e (I) com os bissetores (Figura 31).
- Não tem traço vertical.
- Sua projeção vertical se faz em V.G.

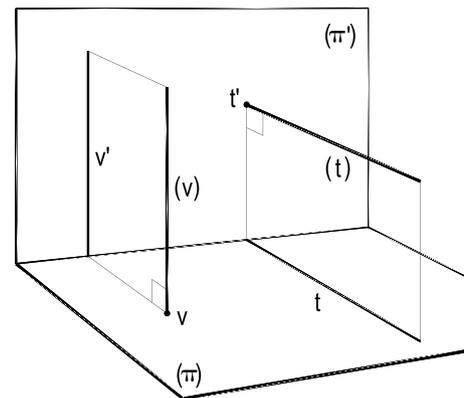


Figura 30

## 21 – Reta de topo

- É a reta que é perpendicular a  $(\pi')$ .
- Tem abscissa e cota constantes (Figura 30).
- Sua projeção vertical reduz-se a um ponto (Figura 31).
- Tem traço vertical (V) e traços (I) e (P) com os bissetores (Figura 31).
- Não tem traço horizontal.
- Sua projeção horizontal se faz em V. G.

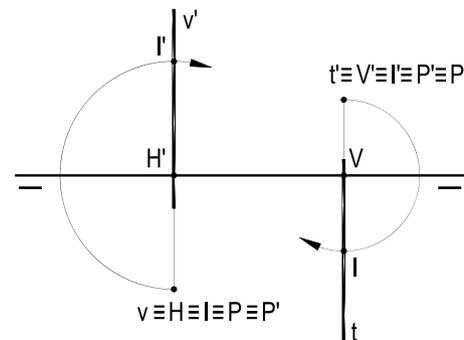


Figura 31

## 22 – Reta de perfil

- É a reta ortogonal, ou perpendicular, à linha de terra e oblíqua a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$ .
- Por fazer  $90^\circ$  com a linha de terra, toda reta de perfil tem de pertencer a um plano perpendicular a  $(\pi')$  (*Geometria Espacial*, número 23.4). Assim são as retas  $(A)(B)$  e  $(C)(D)$ , pertencentes, respectivamente, aos planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , perpendiculares à linha de terra (Figura 32).
- Como consequência primeira, vem que toda reta de perfil tem abscissa constante (Figuras 32 e 33) e necessita ser identificada por dois de seus pontos, para que suas projeções não se confundam, indistintamente, com linhas de chamada.
- Tem traços horizontal e vertical e pode ter traços com os bissetores (ou, eventualmente, ser paralela, ou pertencer a um deles), como adiante se verá (números 28 e 29).

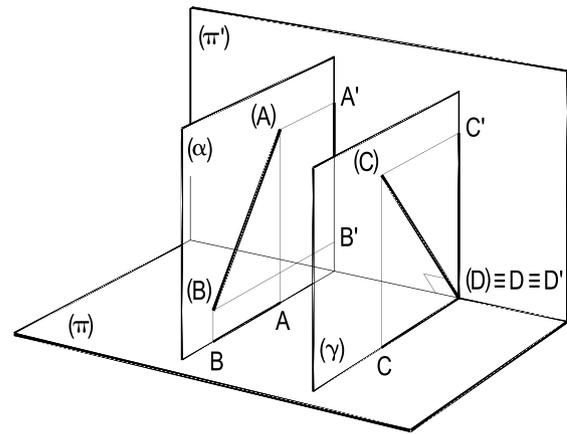


Figura 32

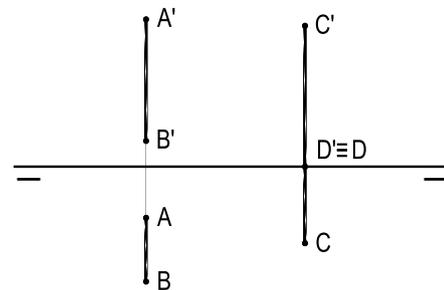


Figura 33

## 23 – Reta qualquer

- É a reta oblíqua à linha de terra, a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$  (Figura 34).
- Tem traços horizontal e vertical e, usualmente, com cada um dos bissetores, como no exemplo da reta  $(r)$  da Figura 35, mas pode, como adiante (números 28 e 29) será detalhado, ser paralela, ou pertencer, a um dos dois bissetores.

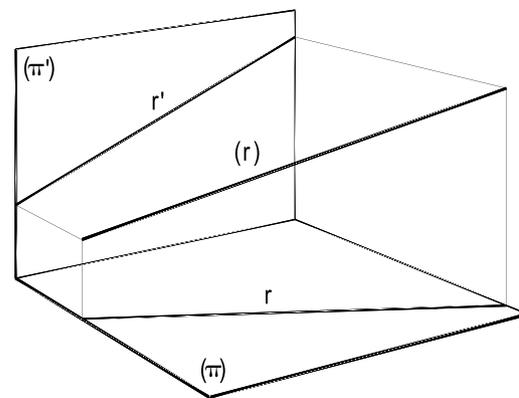


Figura 34

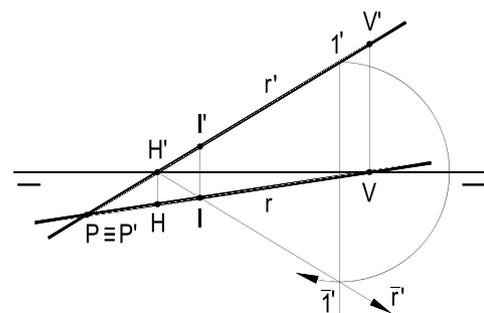


Figura 35

## 24 – Verdadeiras grandezas para as retas de perfil e qualquer

As retas de perfil e qualquer não apresentam, em é pura, as verdadeiras grandezas nem de seus segmentos, nem dos ângulos que formam com os planos de projeção, elementos essenciais para a condução da resolução de inúmeros problemas métricos.

Passamos, por isso, a detalhar processos que permitam, rapidamente, obter tais verdadeiras grandezas, o que, em verdade, é uma breve antecipação de um dos métodos da Descritiva, o dos rebatimentos, que será profundamente estudado e detalhado no Capítulo X.

### 24.1 – Rebatimento do plano projetante de uma reta de perfil.

Rebater um plano sobre outro é, simplesmente, girá-lo, em torno de sua interseção com este outro, até que os dois coincidam.

Como toda reta de perfil pertence a um plano ( $\alpha$ ) perpendicular à linha de terra (número 22), que, por isso mesmo, é seu plano projetante tanto em relação a ( $\pi$ ) quanto a ( $\pi'$ ), vamos estudar seu rebatimento sobre ( $\pi'$ ), como indicado na Figura 36, onde adotamos o sentido anti-horário, porque, assim, após o rebatimento, os diedros ocupam as mesmas posições que num corte cartesiano.

Nas Figuras 36 e 37, vemos o rebatimento, sobre ( $\pi'$ ), de um segmento (A)(B) de reta perfil, para a posição final (A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub>, onde se obtém sua V.G., bem como as dos ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  que a reta (A)(B) forma com ( $\pi$ ) e com ( $\pi'$ ), respectivamente.

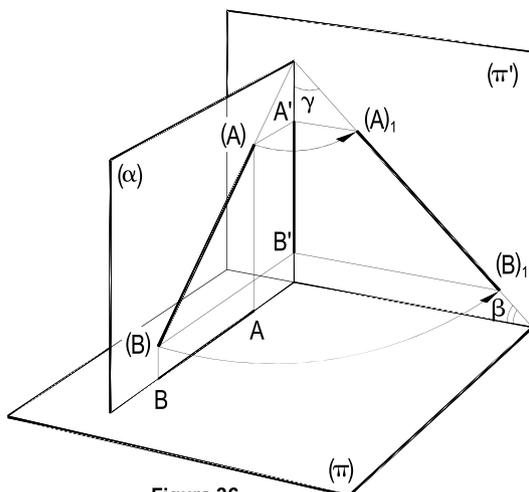


Figura 36

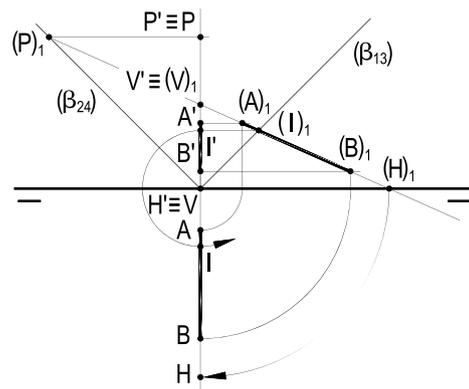


Figura 37

Além da V.G. do comprimento do segmento (A)(B) e dos valores dos ângulos que a reta de perfil (A)(B) forma com ( $\pi$ ) e com ( $\pi'$ ), tal rebatimento permite, também, obter seus traços com os planos de projeção e com os bissetores, para retorná-los à é pura, num movimento de rotação de sentido contrário, denominado alçado. Na Figura 37 indicamos as obtenções desses traços e seus alçados de volta à é pura.

## 24.2 – Rebatimento de um plano projetante de uma reta qualquer.

Tal como com as retas de perfil, consegue-se obter as verdadeiras grandezas de um segmento  $(A)(B)$  de uma reta qualquer, e dos ângulos que ela forma com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$ , mediante os rebatimentos de cada um de seus dois planos projetantes, sobre os respectivos planos de projeção. Mas, como tais planos projetantes têm, para as retas quaisquer, posições menos simples que os referentes às retas de perfil, o procedimento é diferente, algo mais longo, como indicado nas Figuras 38 e 39, que apresentam o rebatimentos sobre  $(\pi)$  e sobre  $(\pi')$  e dos planos  $(\alpha)$  e  $(\varphi)$ , projetantes da reta qualquer  $(A)(B)$ .

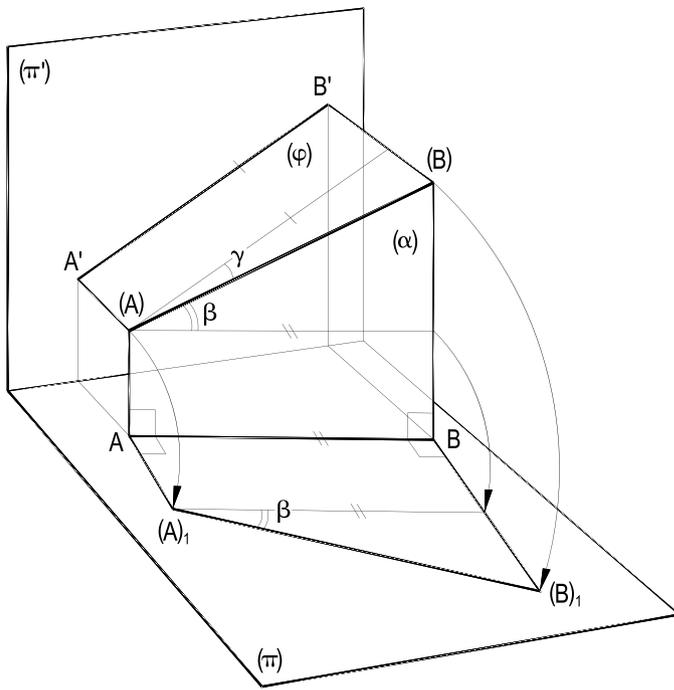


Figura 38

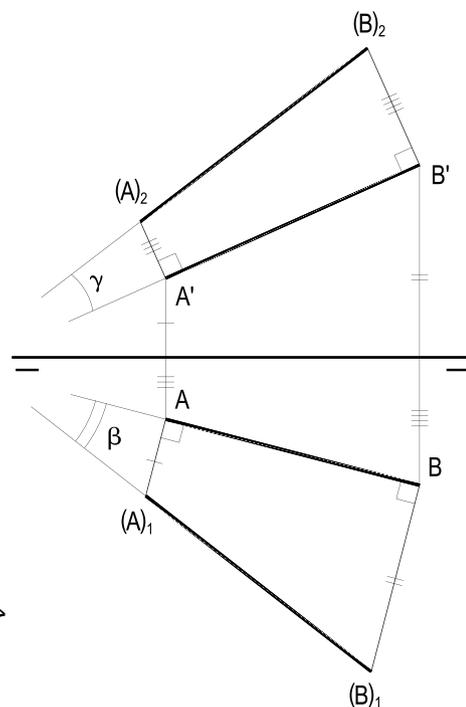


Figura 39

Detalhando e observando a Figura 38, nota-se que tal rebatimento, em torno da projeção horizontal  $AB$ , implica em girar o trapézio retângulo  $(A)(B)BA$  até que ele, vindo a pertencer a  $(\pi)$ , origine o trapézio  $AB(B)_1(A)_1$ , igual àquele, responsável pela entrega da V.G. do comprimento  $(A)_1(B)_1$  do segmento qualquer  $(A)(B)$  e do ângulo  $\beta$  que  $(A)_1(B)_1$  forma com  $AB$ , ou seja (*Geometria Espacial*, número 44), que a reta qualquer  $(A)(B)$  forma com  $(\pi)$ .

Também apresentamos, simplificadamente, na épora da Figura 39, o rebatimento do plano  $(\varphi)$ , projetante de  $(A)(B)$  em relação a  $(\pi')$ , em torno da projeção vertical  $A'B'$  para obter o ângulo  $\gamma$ , que a reta  $(A)(B)$  forma com  $(\pi')$ , o que se consegue girando o trapézio retângulo  $(A)(B)B'A'$  até que ele, passando a pertencer a  $(\pi')$ , produza o trapézio  $A'B'(B)_2(A)_2$ , que apresenta a V.G. do ângulo  $\gamma$  que  $(A)(B)$  forma com  $(\pi')$  (Figuras 38 e 39), além da repetição da V.G.  $(A)_2(B)_2$  do segmento  $(A)(B)$ .

## 25 – Posições relativas de duas retas

Duas retas podem ser concorrentes, paralelas ou reversas, conforme, respectivamente, tenham um ponto próprio comum, um ponto impróprio comum, ou não tenham qualquer ponto em comum (*Geometria Espacial*, número 5).

## 26 – Retas concorrentes

De um modo geral, quando duas retas são concorrentes, em *épura*, são também concorrentes suas projeções de mesmo nome, em dois pontos que são (número 12) as projeções de seu ponto comum (Figura 40).

São assim os exemplos de concorrência de retas quaisquer ( $r$ ) e ( $s$ ) (Figuras 40 e 41), de retas quaisquer ( $q$ ) com uma horizontal ( $h$ ) (Figura 42), ou com uma frontal ( $f$ ) (Figura 43), ou com uma fronto-horizontal ( $f$ ) (Figura 44), ou, enfim, de uma horizontal ( $h$ ) com uma frontal ( $f$ ) (Figura 45).

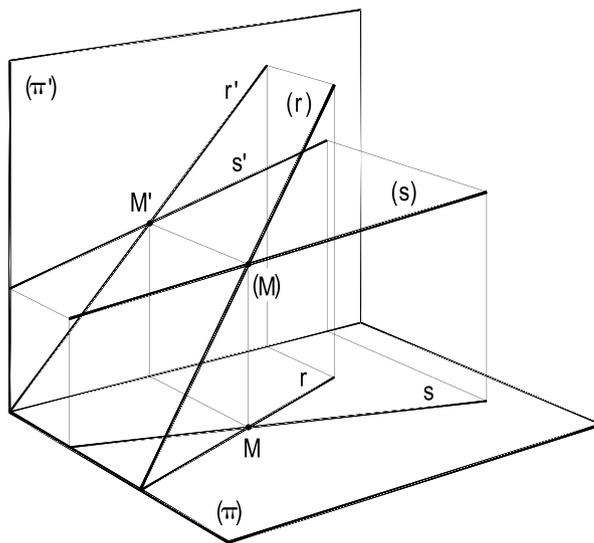


Figura 40

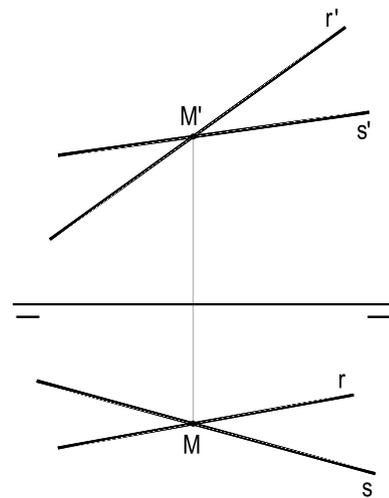


Figura 41

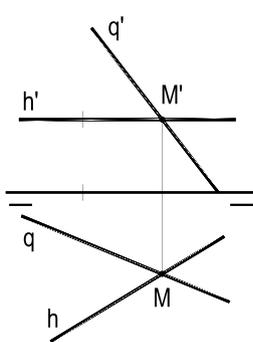


Figura 42

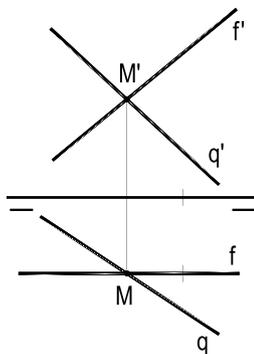


Figura 43

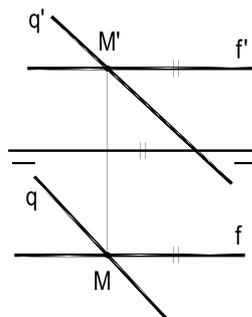


Figura 44

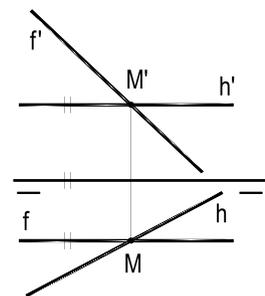


Figura 45

Quando, em casos especiais, as duas retas concorrentes pertencem a um plano projetante, em relação a  $(\pi)$ , suas projeções verticais continuam concorrentes, mas as horizontais, naturalmente, coincidem.

É o que explicitam as Figuras 46 e 47, das retas  $(r)$ ,  $(s)$  e  $(h)$  pertencentes ao plano  $(\alpha)$ , perpendicular a  $(\pi)$ , exemplos dessa situação.

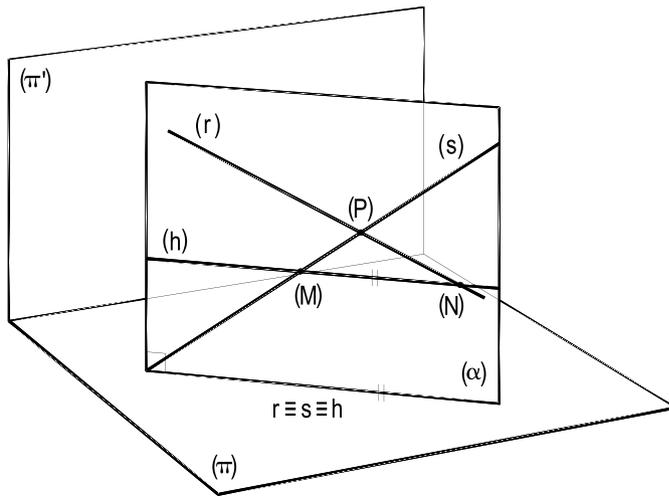


Figura 46

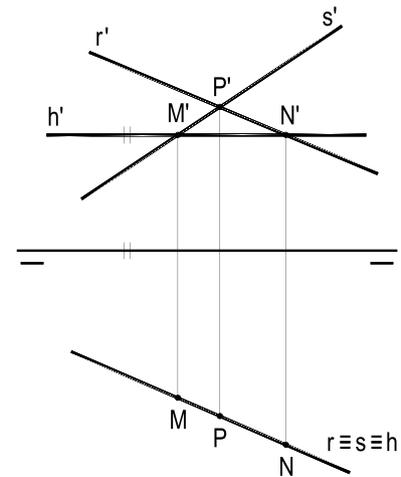


Figura 47

Analogamente, quando as retas concorrentes pertencem a um plano projetante em relação a  $(\pi')$  (Figuras 48 e 49), são as projeções verticais que coincidem, enquanto que concorrem as horizontais.

Assim são as retas  $(r)$ ,  $(s)$  e  $(f)$ , respectivamente quaisquer e frontal, do plano  $(\alpha)$ , perpendicular a  $(\pi')$ , nas Figuras 48 e 49.

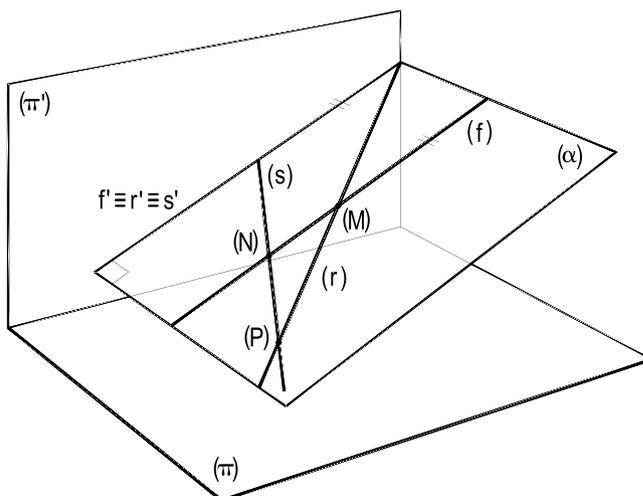


Figura 48

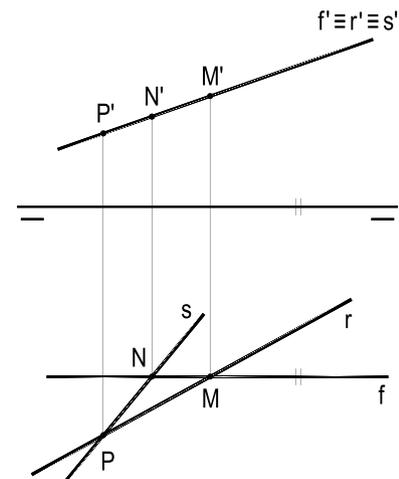


Figura 49

São ainda mais especiais as concorrências das retas verticais (Figuras 50 e 51) e de topo (Figura 52) com as demais, já que uma de suas projeções reduz-se a um ponto (números 20 e 21), o que acarreta que tais concorrências tenham que ocorrer sempre que tal projeção pontual pertença à projeção de mesmo nome da segunda reta.

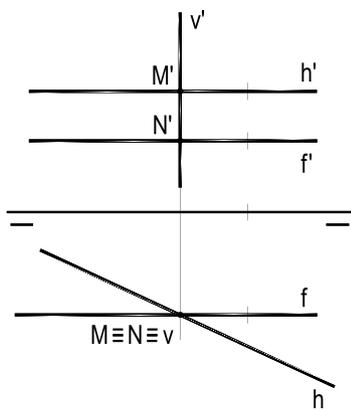


Figura 50

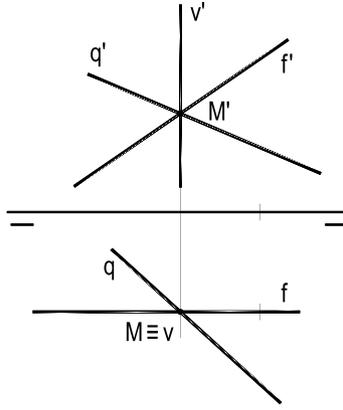


Figura 51

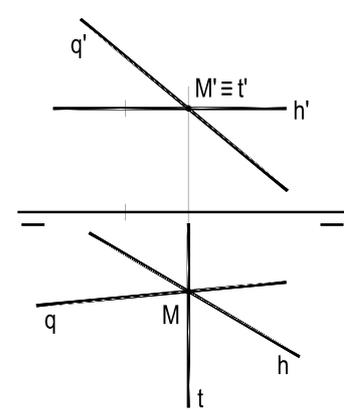


Figura 52

Resta, enfim, analisar as concorrências dos diversos tipos de reta com as de perfil.

É claro que as retas verticais e de topo de mesma abscissa que uma de perfil obrigatoriamente concorrem com ela. Para todas as demais hipóteses, basta operar como o descrito no item 24.1, anterior, rebatendo o plano da reta de perfil sobre  $(\pi)$ , ou sobre  $(\pi')$ , para verificar se o ponto da segunda reta que tenha a abscissa da reta de perfil considerada pertence, ou não, a ela.

Os exemplos apresentados nas Figuras 53 e 54, abaixo, ilustram o aqui exposto. É este mesmo método o utilizado (Figura 55) para verificar a concorrência de duas retas de perfil (A)(B) e (C)(D), de mesma abscissa.

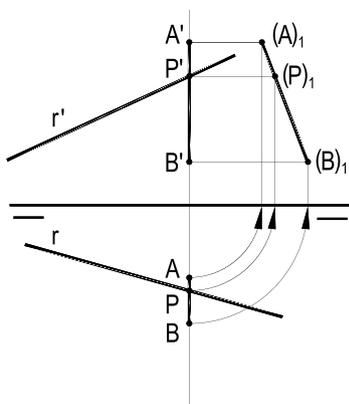


Figura 53

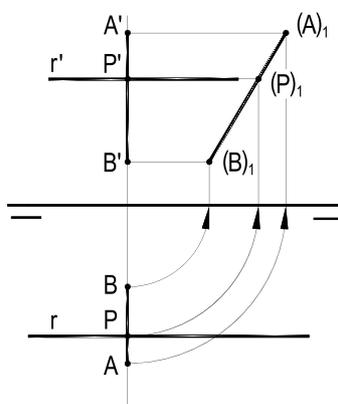


Figura 54

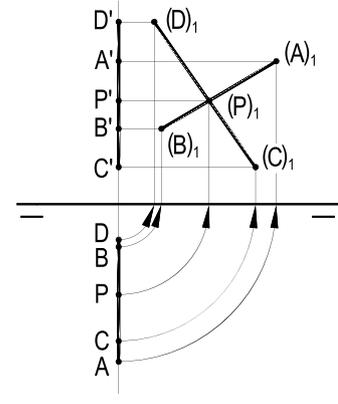


Figura 55

## 27 – Retas paralelas

O paralelismo de duas retas é bem mais simples que a concorrência, abordada no item precedente. De início, é óbvio que sempre são paralelas duas retas verticais, duas de topo e duas fronto-horizontais.

Já duas retas horizontais, ou duas frontais, serão paralelas se suas projeções de mesmo nome forem paralelas entre si (Figuras 56 e 57), ou um par delas coincidentes e o outro paralelo, pois assim não poderão ter ponto próprio comum (Figuras 58 e 59).

Para duas retas quaisquer, é necessário que as projeções do mesmo nome sejam paralelas (Figura 60), ou, no máximo, um par delas coincida (Figura 61) e o outro apresente paralelismo, o que ocorrerá, como visto anteriormente (número 26), quando o plano por elas definido for perpendicular a um dos dois planos de projeção. No exemplo da Figura 61, o plano definido pelas retas paralelas (a) e (b) é perpendicular a ( $\pi'$ ).

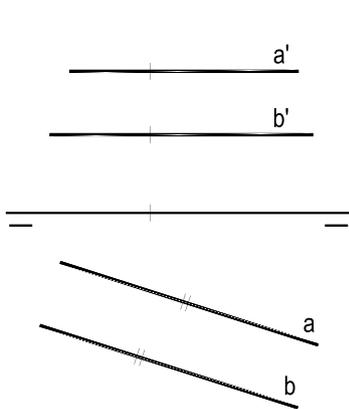


Figura 56

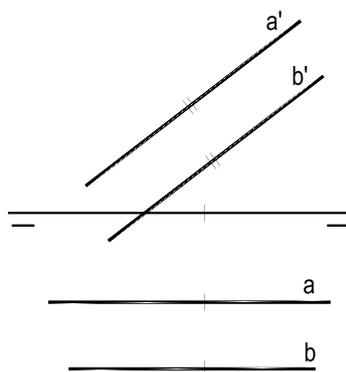


Figura 57

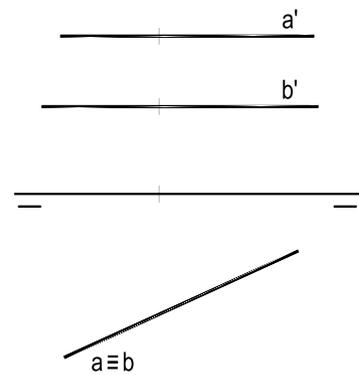


Figura 58

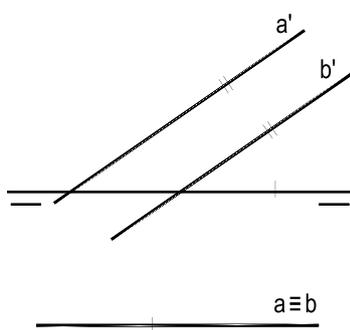


Figura 59

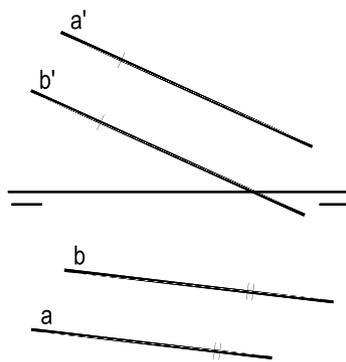


Figura 60

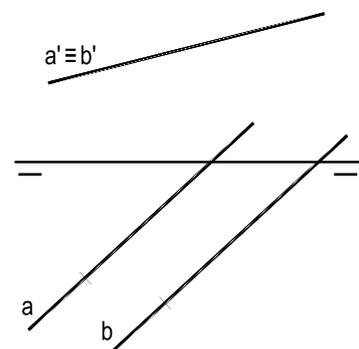


Figura 61

Para duas retas de perfil, independentemente de suas abscissas, o método do rebatimento, já antes abordado, assegurará (como na Figura 62) o paralelismo de duas retas de perfil (A)(B) e (C)(D), ou não (como nas Figuras 63 e 64). Aliás, devido a terem abscissas diferentes, as retas (A)(B) e (C)(D) da Figura 64 são reversas (ver número 25).

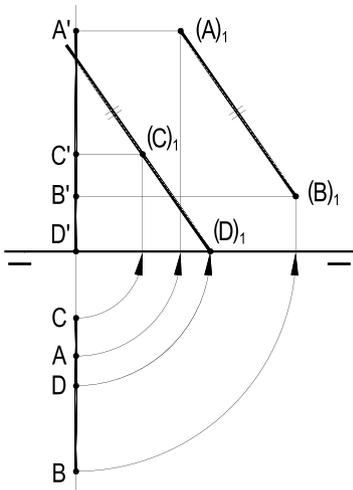


Figura 62

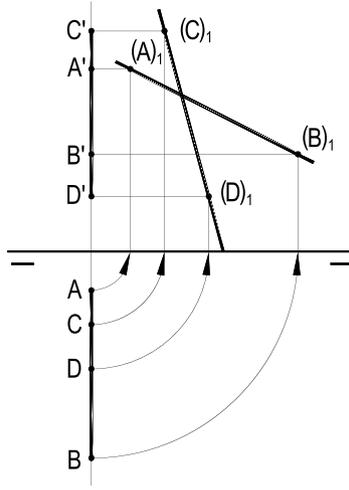


Figura 63

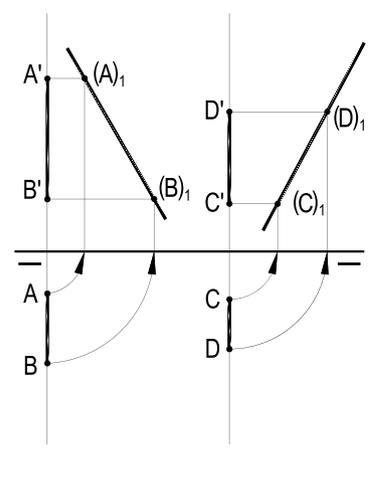


Figura 64

Para duas retas de perfil de abscissas diferentes, pode-se, também, alternativamente, verificar se são concorrentes ou paralelas duas retas formadas por dois pontos de cada reta de perfil, pois se assim o forem estará garantido que as duas retas de perfil sejam coplanares e, portanto, paralelas, tal como explorado nas Figuras 65 e 66, abaixo.

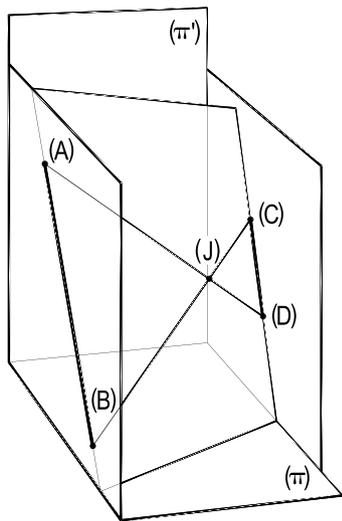


Figura 65

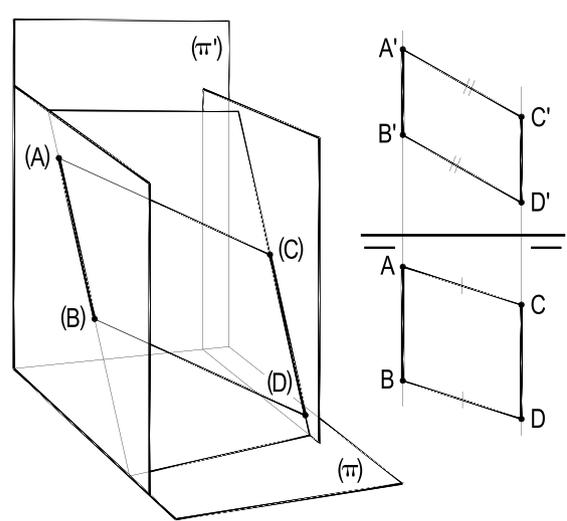


Figura 66

## 28 – Retas pertencentes a um dos bissetores

Para serem coplanares com a linha de terra, apenas as retas fronto-horizontais, de perfil e quaisquer podem pertencer a um dos planos bissetores, devendo estas duas últimas, obrigatoriamente, concorrer com a linha de terra (Figuras 67 e 68).

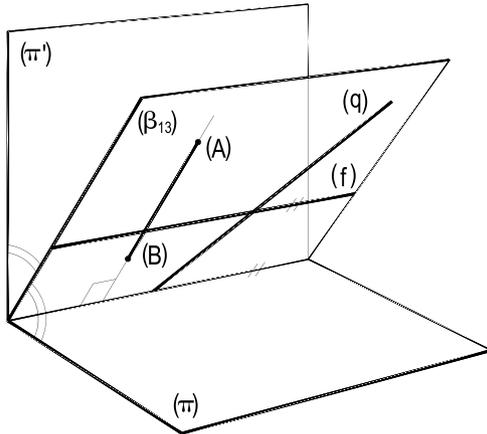


Figura 67

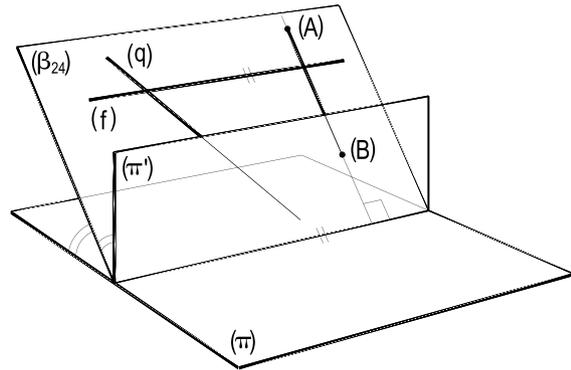


Figura 68

Como são muito especiais, em *épura*, as projeções dos pontos pertencentes a  $(\beta_{13})$  e a  $(\beta_{24})$  (número 10), tais peculiaridades valem, conseqüentemente, para suas retas.

Assim, toda reta pertencente ao bissetor ímpar tem, em *épura*, projeções simétricas em relação à linha de terra, como são as retas (f), (q) e (AB) da Figura 69.

Toda reta pertencente ao bissetor par deve ter, em *épura*, projeções coincidentes, tal como as retas (f), (q) e (AB) da Figura 70.

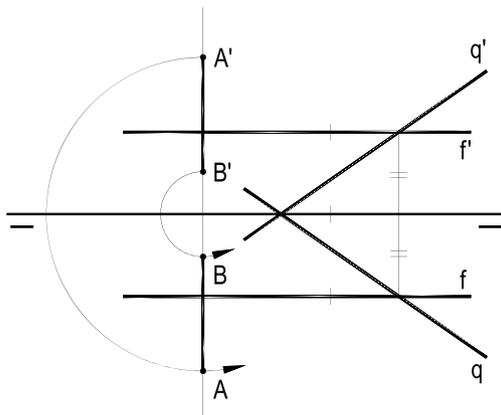


Figura 69

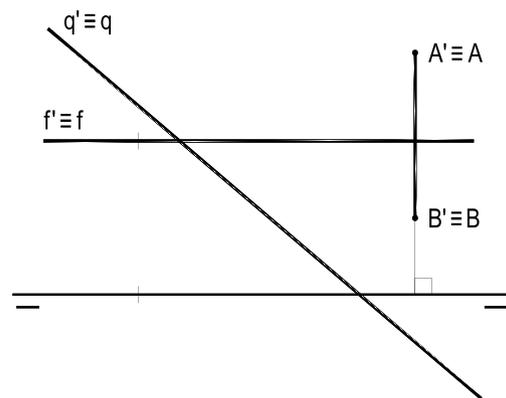


Figura 70

## 29 – Retas paralelas a um dos bissetores

Por terem de ser paralelas a retas pertencentes ao bissetor em questão, as retas paralelas a qualquer dos bissetores têm de ser fronto-horizontais, ou de perfil, ou quaisquer.

Vejamos como se comportam, em *épura*, suas projeções.

É claro que toda reta fronto-horizontal, desde que não tenha projeções simétricas, ou coincidentes, em *épura*, há de ser paralela simultaneamente aos dois bissetores, por ser paralela à sua interseção (*Geometria Espacial*, número 9).

Para estudar as retas de perfil, como (A)(B) e (C)(D), respectivamente paralelas a  $(\beta_{13})$ , ou a  $(\beta_{24})$ , consideremos os rebatimentos dos planos de perfil que as contêm (Figuras 71 e 72) e observemos que, em ambos os casos, são retângulos e isósceles os triângulos  $(A)_1(J)_1(B)_1$  (Figura 71) e  $(C)_1(L)_1(D)_1$  (Figura 72), o que acarreta, para ambas as hipóteses, as igualdades das dimensões das projeções do segmento em estudo:

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \quad (\text{Figura 71})$$

e 
$$\overline{C'D'} = \overline{CD} \quad (\text{Figura 72})$$

E, analisando os alçados, nota-se que, para segmentos de perfil (A)(B) paralelos a  $(\beta_{13})$ , são invertidas as ordens, em *épura*, das letras de suas projeções, ou seja, que um dos extremos do segmento tem projeções mais próximas da linha de terra que o outro (Figura 71). Já para segmentos do perfil (C)(D) paralelos a  $(\beta_{24})$ , estas ordens são iguais (Figura 72).

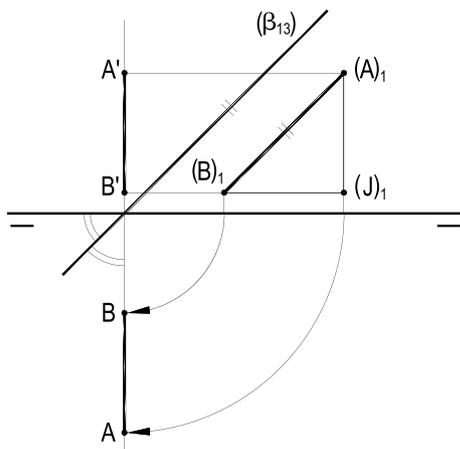


Figura 71

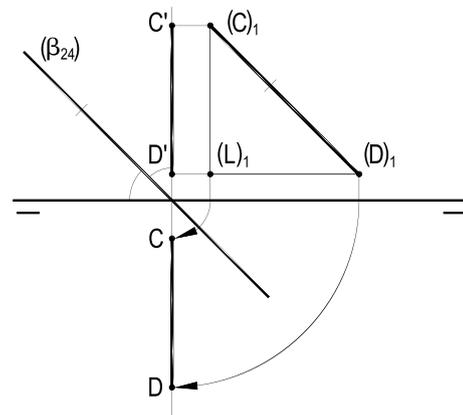


Figura 72

Cabe, ainda, observar que o traço (P) de uma reta de perfil (A)(B), paralela a  $(\beta_{13})$  com o bissetor par, há de ter, em *épura*, projeções coincidentes  $P' \equiv P$ , equidistantes, tanto das projeções de (A), quanto das de (B), isto é, coincidindo, em *épura*, com o ponto médio comum dos segmentos  $A'A$  e  $B'B$  (Figura 73).

E mais, o traço (I) de uma reta de perfil (C)(D), paralela a  $(\beta_{24})$  com o bisetor ímpar, tem, em épura, projeções simétricas em relação à linha de terra e igualmente dispostas nas duas projeções do segmento (C)(D) (Figura 74).

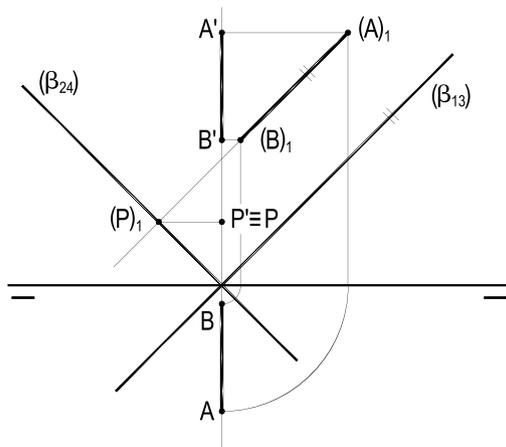


Figura 73

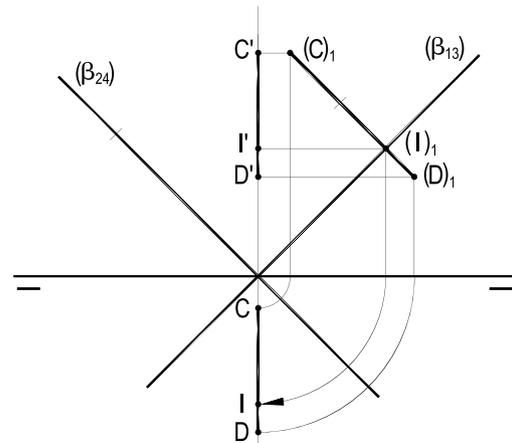


Figura 74

Finalmente, para analisar as retas quaisquer paralelas a um dos bissetores, observemos que (r), paralela a  $(\beta_{13})$ , para não ter traço com esse plano, deve ter, em épura, qualquer de suas projeções paralela à simétrica da outra em relação à linha de terra (Figura 75). E que uma qualquer (s), paralela a  $(\beta_{24})$ , para não ter traço com esse bisetor, deve ter, em épura, projeções paralelas (Figura 76).

Além disso, é imediato concluir que, em épura, o traço (P) de uma reta qualquer (r) paralela a  $(\beta_{13})$  com o bisetor par é o ponto médio do segmento (V)(H) formado pelos traços vertical e horizontal de (r) (Figura 77) e que tal propriedade se repete (Figura 78) para o traço (I) de uma reta qualquer (s) paralela a  $(\beta_{24})$  com o bisetor ímpar.

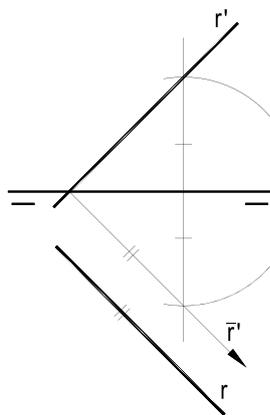


Figura 75

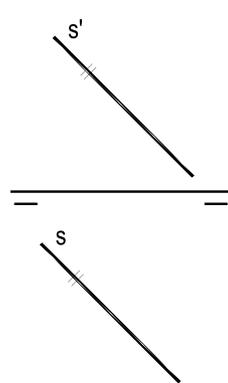


Figura 76

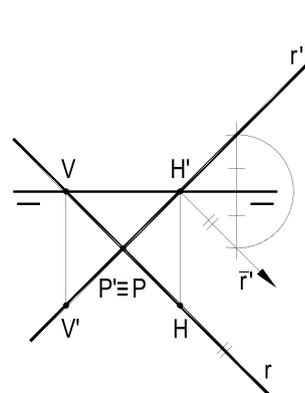


Figura 77

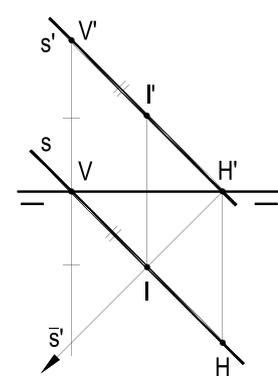


Figura 78

# CAPÍTULO III

## PLANO

### 30 – Traços de um plano

Denomina-se traço de um plano com outro a interseção dos dois. Os mais importantes traços de um plano ( $\alpha$ ) são o horizontal e o vertical, retas segundo as quais ele encontra o plano horizontal de projeção ( $\pi$ ) e o plano vertical de projeção ( $\pi'$ ). Tais retas são então anotadas, em *épura*, por  $\alpha\pi$  e  $\alpha\pi'$ , respectivamente (Figuras 79 e 80).

Observe-se que, sendo ( $\alpha$ ) um plano genérico,  $\alpha\pi'$  é uma frontal ( $f$ ) de afastamento nulo e que  $\alpha\pi$  é uma horizontal ( $h$ ) de cota zero (Figura 81).

É claro que, em situação particular, sendo paralelo a um dos planos da projeção, um plano ( $\gamma$ ) passa a ter apenas um desses dois traços (Figura 82) e que pode encontrar os dois planos de projeção simultaneamente, quando, então, contém a linha de terra, como o plano ( $\varphi$ ) da Figura 83. E, como visto anteriormente, pode ter, em *épura*, os dois traços coincidentes com uma linha de chamada, como no caso do plano ( $\theta$ ) da Figura 84.

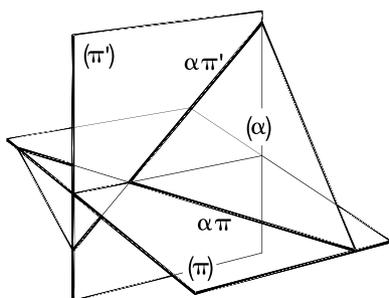


Figura 79

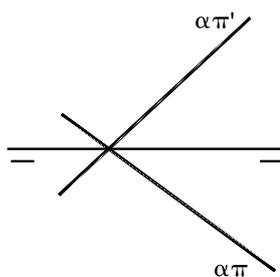


Figura 80

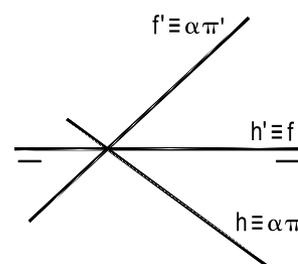


Figura 81

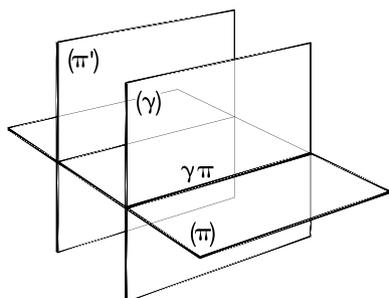


Figura 82

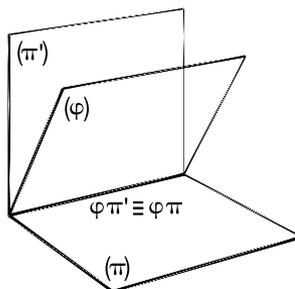


Figura 83

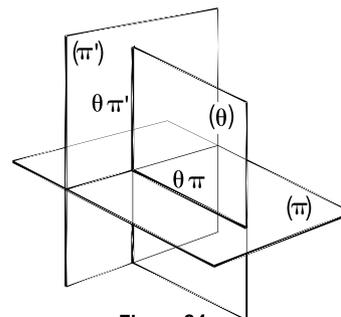


Figura 84

### 31 – Classificação dos planos

Quanto às posições que ocupam em relação a cada um dos planos de projeção e à linha de terra, os planos classificam-se assim:

- Planos projetantes – horizontal  
frontal  
vertical  
de topo  
de perfil
- Planos não projetantes – paralelo à linha de terra  
pertencente à linha de terra  
qualquer

Projetantes são os planos perpendiculares a um dos planos de projeção, ou, em caso particular, aos dois. A principal particularidade que oferecem esses planos é proporcionar a qualquer figura bidimensional que contenham, pelo menos uma projeção retilínea, aquela no plano de projeção ao qual o plano considerado é perpendicular.

São não projetantes os planos oblíquos simultaneamente a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$ .

### 32 – Plano horizontal

É o plano paralelo a  $(\pi)$  (Figura 85).

- É projetante em relação a  $(\pi')$ .
- Todos os seus pontos têm cotas iguais.
- Suas figuras projetam-se em V.G. sobre  $(\pi)$ .
- Tem apenas traço vertical  $\alpha\pi'$ , paralelo à linha de terra (Figura 86).
- O traço vertical  $\alpha\pi'$  é o lugar geométrico das projeções verticais de todos os pontos do plano (Figura 87).
- Atravessa apenas dois diedros.

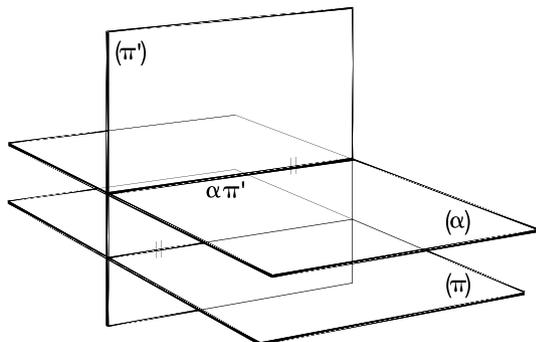


Figura 85

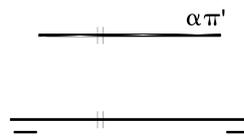


Figura 86

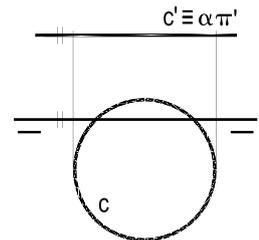


Figura 87

### 33 – Plano frontal

É o plano paralelo a  $(\pi')$  (Figura 88).

- É projetante em relação a  $(\pi)$ .
- Todos os seus pontos têm afastamentos iguais.
- Suas figuras projetam-se em V.G. sobre  $(\pi')$ .
- Tem apenas traço horizontal  $\alpha\pi$ , paralelo à linha de terra (Figura 89).
- O traço horizontal  $\alpha\pi$  é o lugar geométrico das projeções horizontais de todos os pontos do plano (Figura 90).
- Atravessa apenas dois diedros.

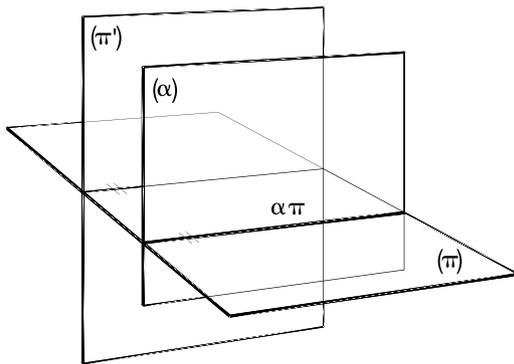


Figura 88



Figura 89

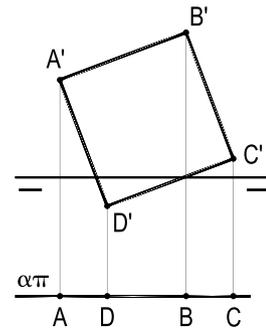


Figura 90

### 34 – Plano vertical

É o plano perpendicular a  $(\pi)$  e oblíquo a  $(\pi')$  (Figura 91).

- É projetante em relação a  $(\pi)$ .
- Tem o traço vertical  $\alpha\pi'$  perpendicular e o horizontal  $\alpha\pi$  oblíquo à linha de terra.
- Apresenta, em épura, em V.G., o ângulo  $\beta$  que o plano forma com  $(\pi')$ , entre seu traço horizontal  $\alpha\pi$  e a linha de terra (Figuras 91 e 92).
- $\alpha\pi$  é o lugar geométrico das projeções horizontais de todos os pontos do plano.
- Atravessa os quatro diedros.

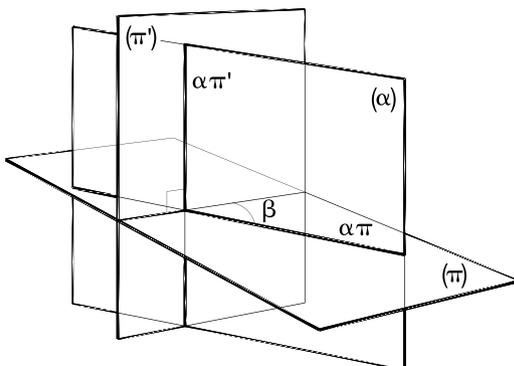


Figura 91

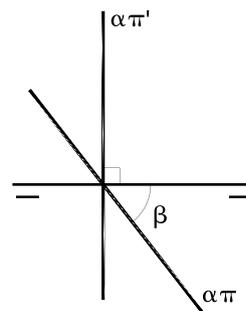


Figura 92

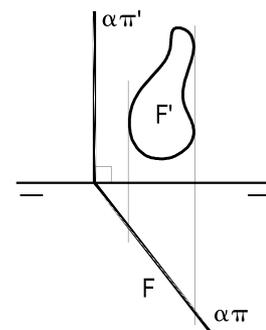


Figura 93

### 35 – Plano de topo

É o plano perpendicular a  $(\pi')$  e oblíquo a  $(\pi)$  (Figura 94).

- É projetante em relação a  $(\pi')$ .
- Tem o traço horizontal  $\alpha\pi$  perpendicular e o vertical  $\alpha\pi'$  oblíquo à linha de terra.
- Apresenta, em épura, em V.G., o ângulo  $\varphi$  que o plano forma com  $(\pi)$ , entre seu traço vertical  $\alpha\pi'$  e a linha de terra (Figuras 94 e 95).
- $\alpha\pi'$  é o lugar geométrico das projeções verticais de todos os pontos do plano (Figura 96).
- Atravessa os quatro diedros.

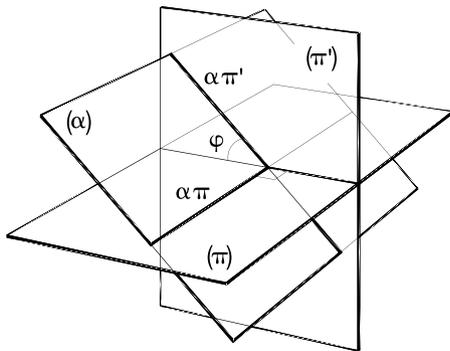


Figura 94

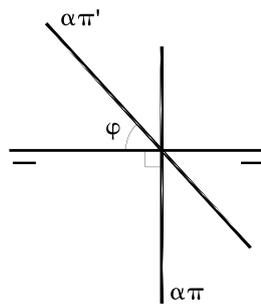


Figura 95

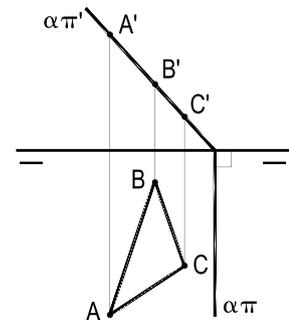


Figura 96

### 36 – Plano de perfil

É o plano perpendicular a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$  (Figura 97).

- É projetante, tanto em relação a  $(\pi)$  quanto em relação a  $(\pi')$ .
- É perpendicular à linha de terra.
- Tem, em épura, ambos os traços colineares, numa perpendicular à linha de terra.
- Todos os seus pontos têm abscissas iguais.
- As projeções de todos os seus pontos pertencem aos traços do plano.
- Suas figuras são vistas em V.G. num rebatimento sobre qualquer dos planos de projeção (Figura 99).
- Atravessa os quatro diedros.

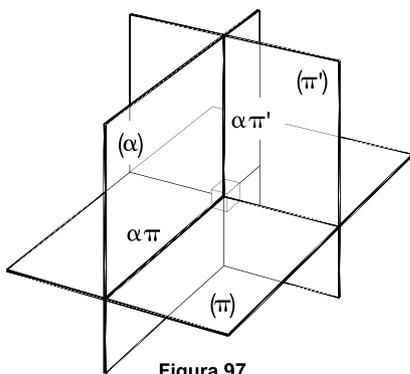


Figura 97

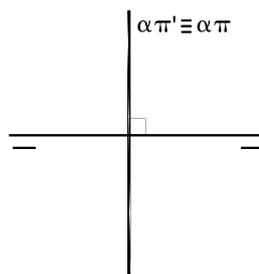


Figura 98

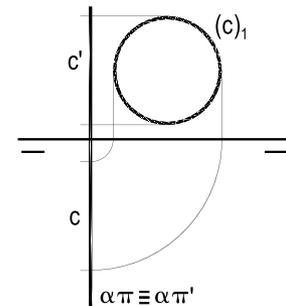


Figura 99

### 37 – Plano paralelo à linha de terra

É o plano paralelo à linha de terra e oblíquo a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$  (Figura 100).

- É perpendicular aos planos de perfil.
- Tem os dois traços paralelos à linha de terra (Figuras 101 e 102).
- Mediante o rebatimento de um corte  $(\theta)$  de perfil, apresenta, em verdadeira grandeza, os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  que o plano forma com os de projeção, bem como a distância  $D$  entre seus traços (Figuras 100 e 102).
- Atravessa três diedros.

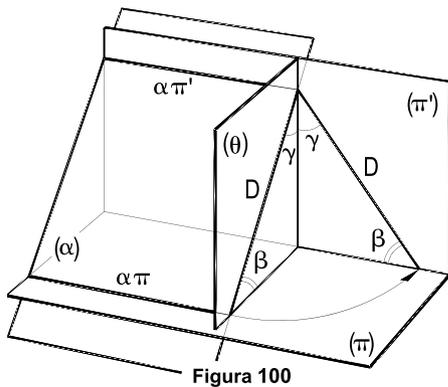


Figura 100

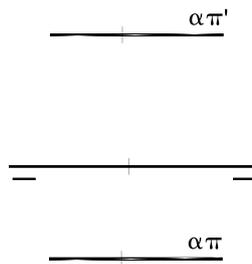


Figura 101

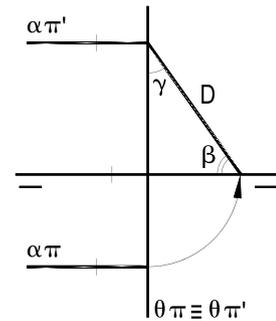


Figura 102

### 38 – Plano pertencente à linha de terra

É o plano que contém a linha de terra, sendo oblíquo a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$  (Figura 103).

- É perpendicular aos planos de perfil.
- Tem os dois traços coincidentes com a linha de terra.
- Mediante o rebatimento de um corte de perfil  $(\theta)$ , apresenta, em verdadeira grandeza, os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  que o plano faz, respectivamente, com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$  (Figura 104).
- É usualmente identificado por um de seus pontos,  $(M)$ , e, por isso, também denominado plano  $(\pi'\pi) - (M)$  (Figuras 103 e 104).
- Atravessa apenas dois diedros: os pares ou os ímpares.

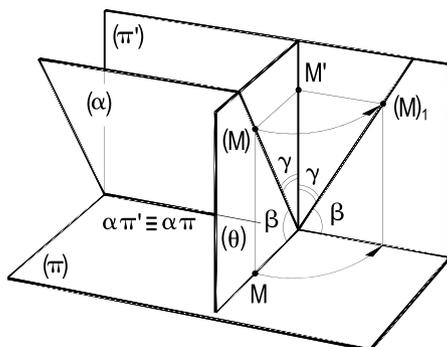


Figura 103

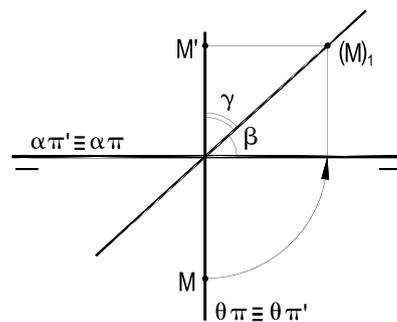


Figura 104

### 39 – Plano qualquer

É o plano que é oblíquo aos dois planos de projeção e à linha de terra (Figura 105).

- Tem os dois traços oblíquos à linha de terra (Figuras 105 e 106).
- Não oferece V.G. em nenhuma projeção.
- Atravessa os quatro diedros.

Embora, evidentemente, os dois traços sejam retas, o habitual é optar por sua representação no primeiro diedro, indicando-os, então, em épura, por duas semirretas (Figura 107).

É também interessante observar que, conforme seja agudo, ou obtuso, o ângulo formado, no espaço, entre os dois traços de um plano qualquer ( $\alpha$ ), em épura, esses dois traços  $\alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$ , para representações no primeiro diedro, apresentam-se, respectivamente, voltados para um mesmo sentido (Figura 107), ou para sentidos contrários (Figura 109). Diz-se, então, respectivamente, que o plano qualquer apresenta traços de mesmos sentidos ou de sentidos diretos, ou, caso contrário, de sentidos opostos ou de sentidos inversos. Em situação muito particular, quando um plano qualquer ( $\alpha$ ), com traços de sentidos contrários, os apresenta, em épura, coincidentes (Figura 110), o plano é perpendicular a ( $\beta_{24}$ ), como adiante (número 77) detalharemos.

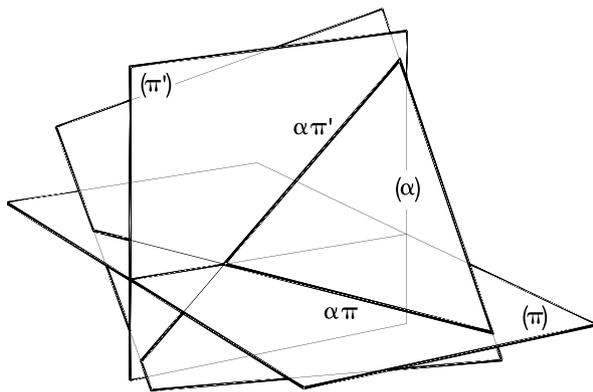


Figura 105

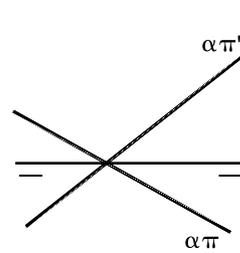


Figura 106

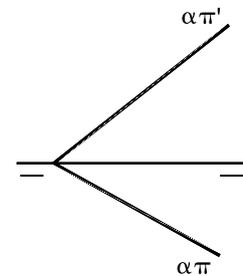


Figura 107

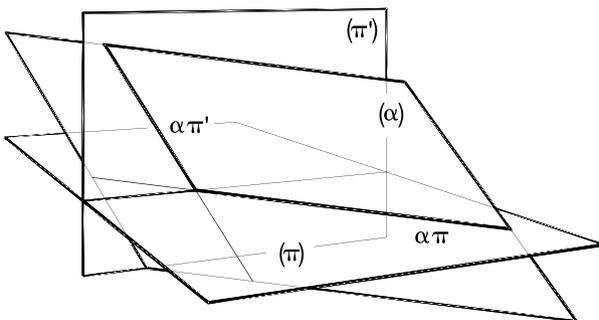


Figura 108

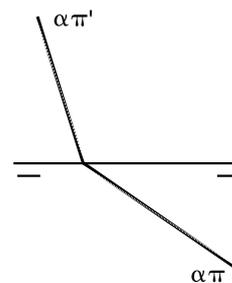


Figura 109

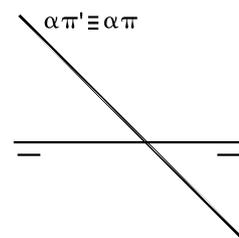


Figura 110

## 40 – Retas dos planos

Naturalmente, não são todas as naturezas de retas que podem pertencer a cada um dos tipos de planos.

Listamos, a seguir, as retas que podem pertencer a cada plano:

- plano horizontal (Figura 111) – retas horizontal, de topo e paralela à linha de terra;
- plano frontal (Figura 112) – retas frontal, vertical e paralela à linha de terra;
- plano vertical (Figura 113) – retas horizontal, vertical e qualquer;
- plano de topo (Figura 114) – retas frontal, de topo e qualquer;

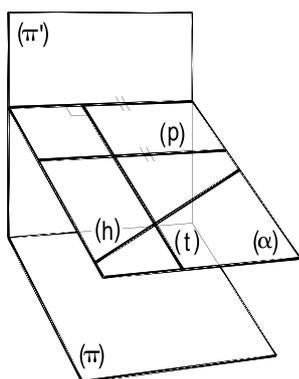


Figura 111

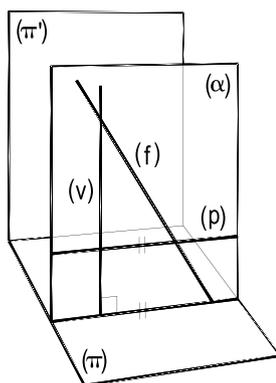


Figura 112

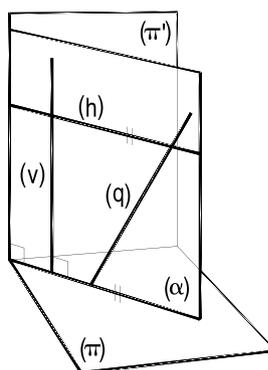


Figura 113

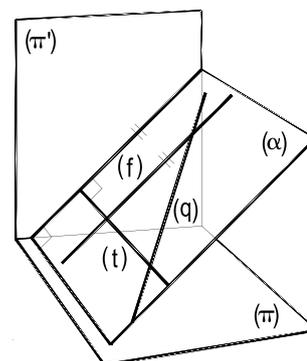


Figura 114

- plano de perfil (Figura 115) – retas vertical, de topo e de perfil;
- plano paralelo à linha de terra (Figura 116) – retas fronto-horizontal, de perfil e qualquer;
- plano pertencente à linha de terra (Figura 117) – retas fronto-horizontal, de perfil e qualquer;
- plano qualquer (Figura 118) – retas horizontal, frontal, de perfil e qualquer.

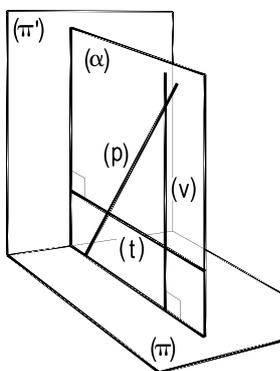


Figura 115

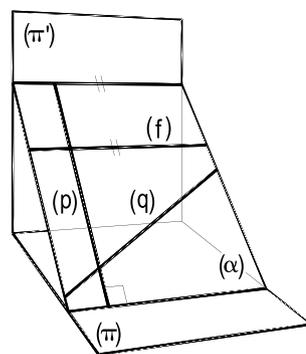


Figura 116

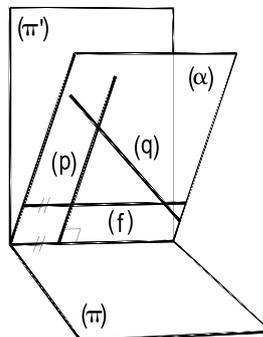


Figura 117

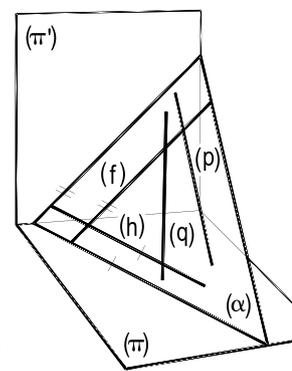


Figura 118

#### 41 – Pertinência de uma reta a um plano horizontal

Por ser projetante em relação a  $(\pi')$ , é condição para que uma reta horizontal (h), uma paralela à linha de terra (p) e uma de topo (t) pertençam a um plano horizontal ( $\alpha$ ) que suas projeções verticais pertençam ao traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano (Figura 119).

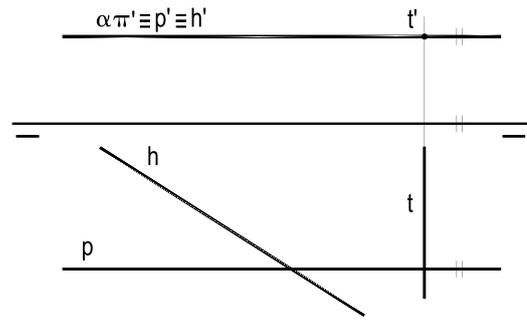


Figura 119

#### 42 – Pertinência de uma reta a um plano frontal

Por ser projetante em relação a  $(\pi)$ , é condição bastante para que uma reta frontal (f), uma paralela à linha de terra (p) e uma vertical (v) pertençam a um plano frontal ( $\alpha$ ) que suas projeções horizontais pertençam ao traço horizontal  $\alpha\pi$  do plano (Figura 120).

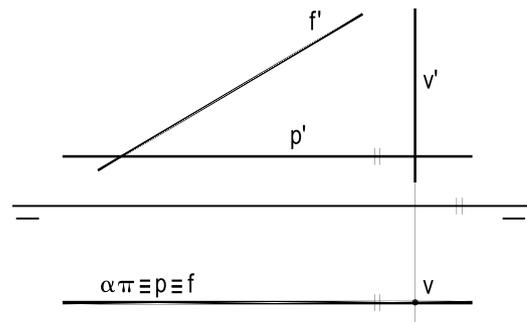


Figura 120

#### 43 – Pertinência de uma reta a um plano vertical

Por ser projetante em relação a  $(\pi)$ , é condição suficiente para que uma reta vertical (v), uma horizontal (h) ou uma qualquer (q) pertença a um plano vertical ( $\alpha$ ) que suas projeções horizontais pertençam ao traço horizontal  $\alpha\pi$  do plano (Figura 121).

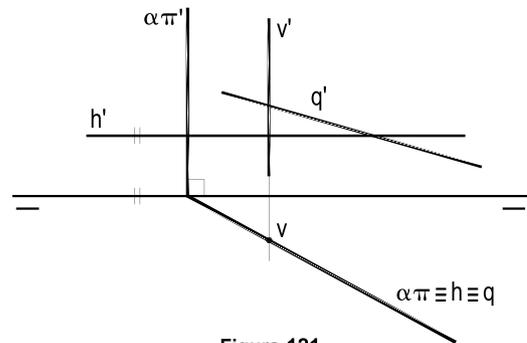


Figura 121

#### 44 – Pertinência de uma reta a um plano de topo

Por ser projetante em relação a  $(\pi')$ , é condição suficiente para que uma reta de topo (t), uma frontal (f) ou uma qualquer (q) pertença a um plano de topo ( $\alpha$ ) que suas projeções verticais pertençam ao traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano (Figura 122).

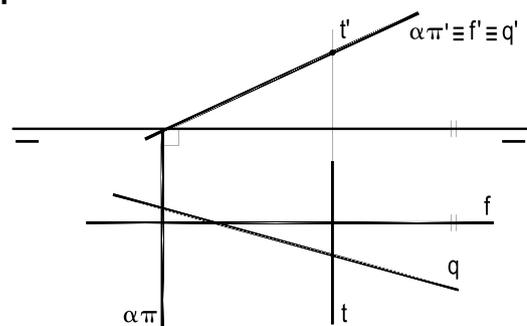


Figura 122

#### 45 – Pertinência de uma reta a um plano de perfil

Por ser projetante, tanto em relação a  $(\pi)$  quanto a  $(\pi')$ , é condição bastante para que uma reta vertical ( $v$ ), uma reta de topo ( $t$ ) ou uma reta de perfil ( $A$ ) ( $B$ ) pertença a um plano de perfil ( $\alpha$ ) que suas projeções pertençam aos traços, coincidentes, do plano (Figura 123).

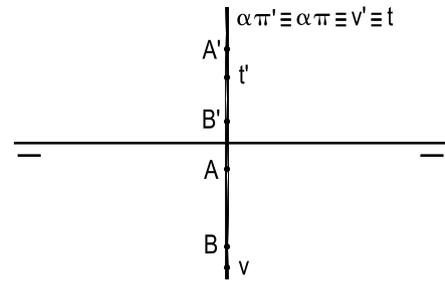


Figura 123

#### 46 – Pertinência de uma reta a um plano paralelo à linha de terra

Sabe-se que, para que uma reta pertença a um plano, basta que ela tenha dois pontos nesse plano.

Assim, para que uma reta qualquer ( $q$ ) ou uma reta de perfil ( $A$ )( $B$ ) pertença a um plano ( $\alpha$ ) paralelo à linha de terra, é suficiente que seus traços horizontal ( $H$ ) e vertical ( $V$ ) pertençam aos traços de mesmo nome de  $(\alpha)$  (Figura 124). E, para que uma fronto-horizontal ( $f$ ) pertença a  $(\alpha)$ , basta que ela seja concorrente com  $(q)$ , ou com  $(A)$ ( $B$ ), já que o segundo ponto em comum com  $(\alpha)$  é seu ponto impróprio.

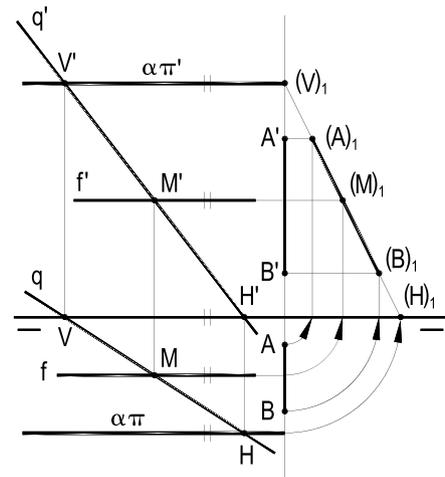


Figura 124

O rebatimento de um corte de perfil pode contribuir para garantir tais pertinências (Figura 124).

#### 47 – Pertinência de uma reta a um plano pertencente à linha de terra

Habitualmente, todo plano pertencente à linha de terra é dado por essa reta e por um ponto ( $M$ ) a ele pertencente.

Naturalmente, a reta fronto-horizontal ( $f$ ) que passa por  $(M)$  pertence a esse plano (Figura 125). E, para que possam pertencer a esse plano, as retas quaisquer e de perfil, além de concorrerem com a linha de terra, devem, também, concorrer com uma reta fronto-horizontal do plano. É usual a utilização do rebatimento de um corte de perfil (Figura 125), para assegurar tais pertinências. Para que outras fronto-horizontais ( $t$ ) pertençam ao plano, basta que concorram com uma reta ( $r$ ), qualquer, do plano.

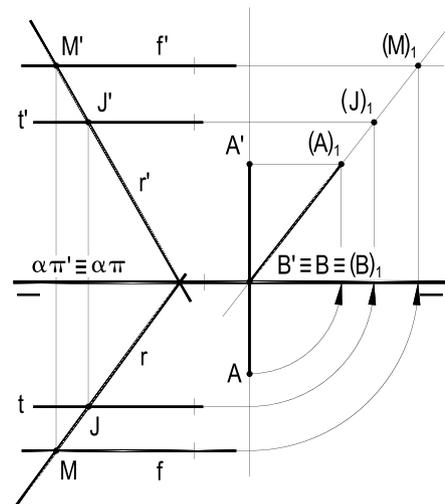


Figura 125

## 48 – Pertinência de uma reta a um plano qualquer

O plano qualquer, por não posuir posição especial nem em relação aos planos de projeção nem à linha de terra, é o único a admitir quatro tipos diferentes de retas (número 40), cujas condições de pertinência passamos a analisar.

Para que uma reta de perfil (A)(B) ou uma reta qualquer (q) pertença a um plano qualquer ( $\alpha$ ), é suficiente que tenha seus traços, distintos, sobre os traços de mesmo nome do plano (Figura 126).

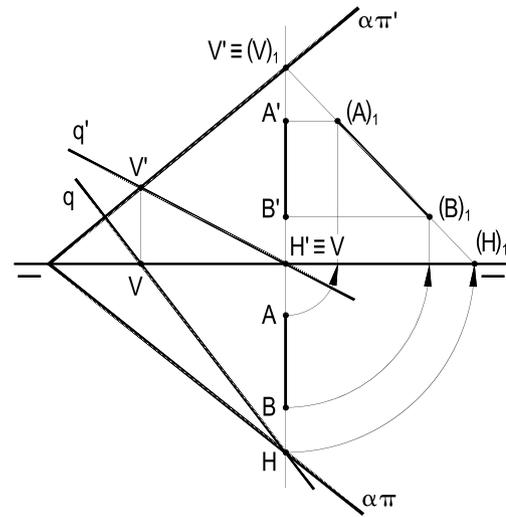


Figura 126

Cabe destacar um tipo especial de reta qualquer (s), aquela que passa pelo ponto comum ao plano ( $\alpha$ ), em estudo, e à linha terra. Para que tal reta (s) pertença a ( $\alpha$ ), basta que ela concorra com outra reta (r) de ( $\alpha$ ) (Figura 127), já que o segundo ponto comum a ela e a ( $\alpha$ ) é aquele traço (J) com a linha de terra.

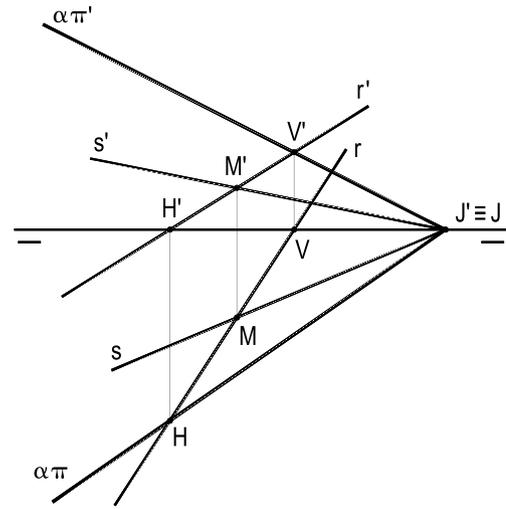


Figura 127

Por último, para as retas horizontais (h) e as frontais (f), as condições de pertinência a um plano qualquer ( $\alpha$ ) são que tenham seu traço sobre o traço de mesmo nome do plano e que suas projeções oblíquas à linha de terra sejam paralelas aos traços de mesmo nome do plano (Figura 128), pois, assim, estará garantida a pertinência de um segundo ponto seu ao plano – o ponto impróprio da reta com o traço de mesmo nome do plano.

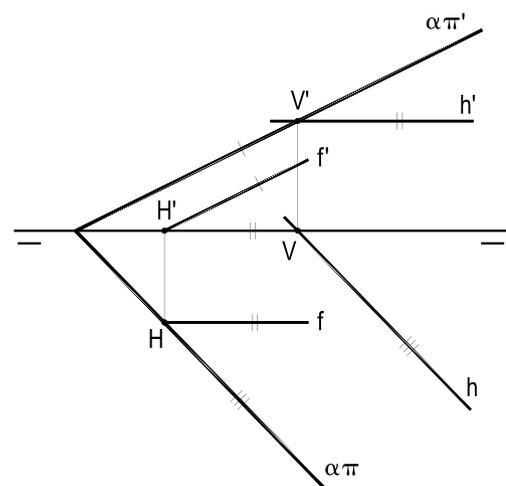


Figura 128

## 49 – Plano não dado por seus traços

Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 3) que um plano fica precisamente determinado por:

- três pontos não colineares (Figura 129);
- uma reta e um ponto a ela exterior (Figura 130);
- duas retas concorrentes (Figura 131);
- duas retas paralelas (Figura 132).

E que todas essas condições são mutuamente transformáveis com operações simples.

Desta forma, podemos ter de operar com planos não dados por seus traços, mas sim por uma das combinações acima.

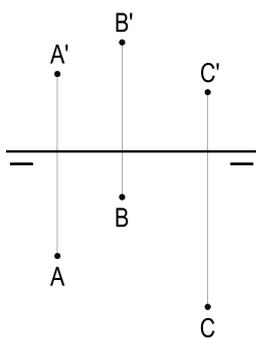


Figura 129

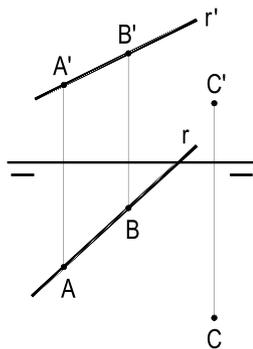


Figura 130

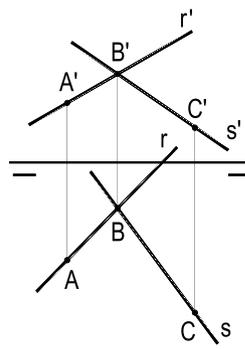


Figura 131

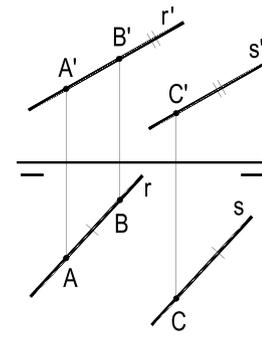


Figura 132

## 50 – Pertinência de uma reta a um plano não dado por seus traços

Para pertencer a um plano dado por duas retas ( $r$ ) e ( $s$ ), uma terceira reta ( $t$ ) tem de ter dois pontos assegurados no plano. Assim, tal reta ( $t$ ) pode ser concorrente com as dadas ( $r$ ) e ( $s$ ) (Figura 133), ou concorrente com uma delas e paralela à outra (Figura 134).

Naturalmente, como antes se viu, se o plano dado por duas retas ( $a$ ) e ( $b$ ) for projetante, para que uma terceira reta ( $c$ ) pertença a ele, bastará que sua projeção (de mesmo nome) coincida com as projeções coincidentes de ( $a$ ) e ( $b$ ), que asseguram ser tal plano projetante (Figura 135).

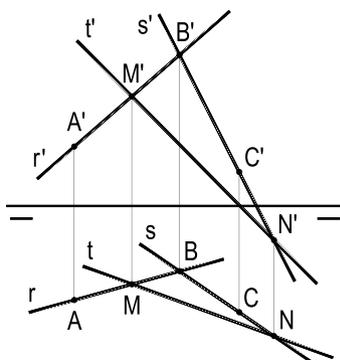


Figura 133

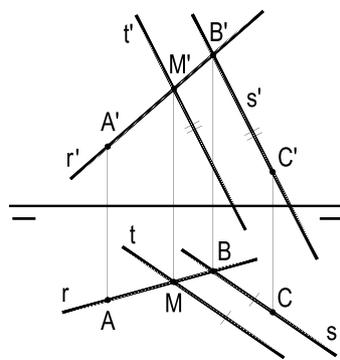


Figura 134

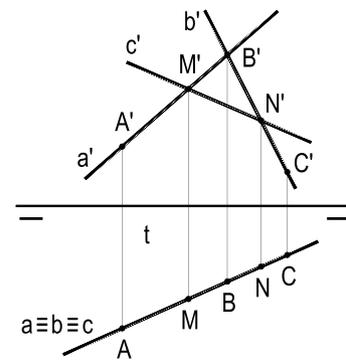


Figura 135

## 51 – Determinação dos traços de um plano

Estudemos inicialmente o caso mais comum de um plano qualquer, dado por duas retas concorrentes ou paralelas, e vejamos como obter os traços do plano, para diversas hipóteses possíveis.

É claro que, se o plano houver sido dado por uma reta e um ponto exterior, basta traçar, por este, uma segunda reta concorrente ou paralela à reta dada, para retornarmos às condições em estudo.

Para obter os traços do plano ( $\alpha$ ) que as contém, basta obter os traços das duas retas e unir os de mesmo nome (Figura 136). Naturalmente, quando o corte (J) do primeiro traço de ( $\alpha$ ) com a linha de terra for acessível (Figura 137), bastará obter três traços das retas dadas.

Se uma das retas dadas for uma principal do plano (Figura 138), ou se ambas forem principais (Figuras 139 e 140), o conhecimento da(s) direção(ões) do(s) traço(s) facilitará a resolução da questão.

Se uma das duas retas dadas (A)(B) for de perfil, a utilização de uma outra reta qualquer (t) do plano (Figura 141) fará retornar o conjunto àquele que inicialmente, aqui, abordamos, embora se possa, também, utilizar o rebatimento do plano de perfil que contém a reta de perfil dada (Figura 142).

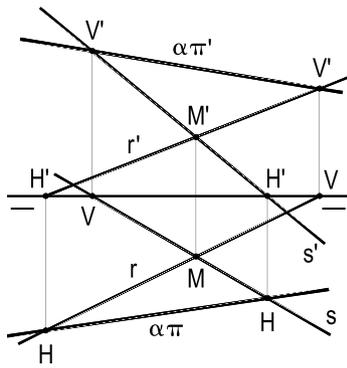


Figura 136

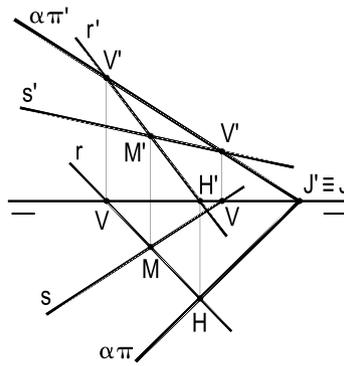


Figura 137

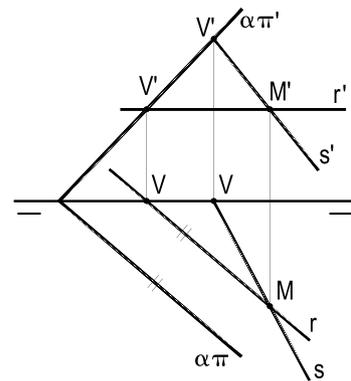


Figura 138

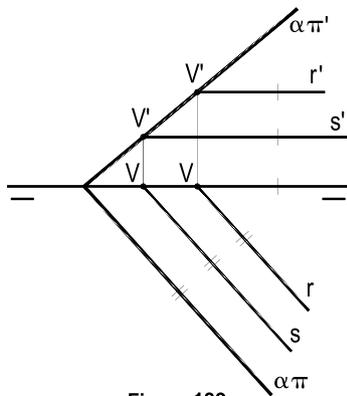


Figura 139

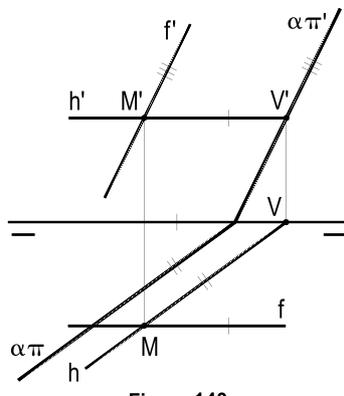


Figura 140

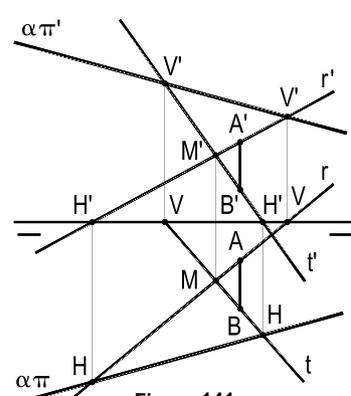


Figura 141

No caso particular em que uma ou as duas retas dadas concorram sobre a linha de terra (Figuras 143 e 144), a utilização de uma terceira reta do plano, arbitrada, dará, prontamente, solução ao problema.

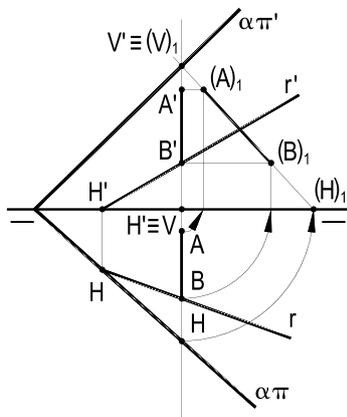


Figura 142

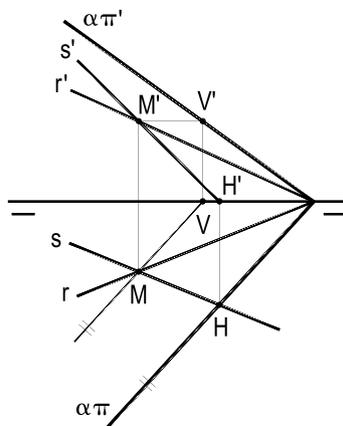


Figura 143

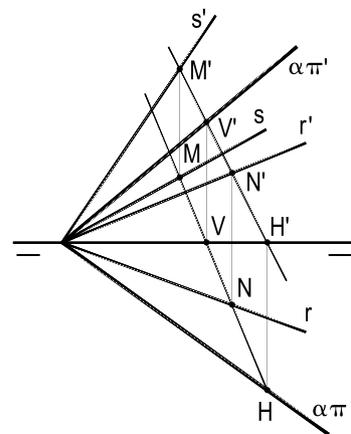


Figura 144

Passemos, agora, a analisar a situação de um plano ( $\alpha$ ) dado por duas de suas retas ( $r$ ) e ( $s$ ), primeiramente (Figura 145) sendo uma delas fronto-horizontal e, em seguida (Figura 146) sendo ambas quaisquer, mas de tal modo dispostas que o plano por elas formado seja paralelo à linha da terra. No primeiro caso, sabendo, pela existência da fronto-horizontal, tratar-se de um plano paralelo à linha de terra, basta obter os dois traços da qualquer, para solucionar a questão; no segundo, tais as retas escolhidas, aconteceu que as cotas dos dois traços verticais viessem a ser iguais, o que definiu a natureza do plano, bastando, por isso, obter um único traço horizontal.

Por último (Figura 147), quando as duas retas dadas são tais que coincidam suas projeções horizontais (ou verticais), fica claro tratar-se de um plano projetante e que aquelas projeções coincidentes são um dos traços do plano em estudo e que o segundo, em existindo, tem de ser perpendicular à linha da terra.

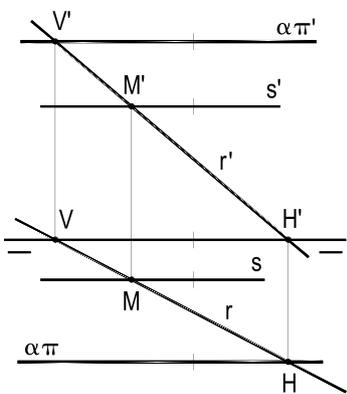


Figura 145

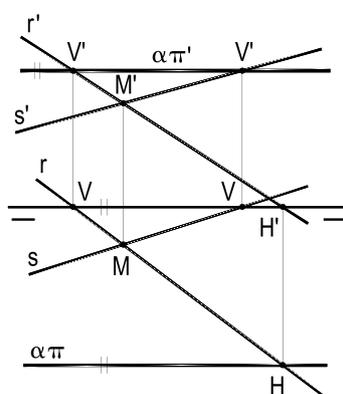


Figura 146

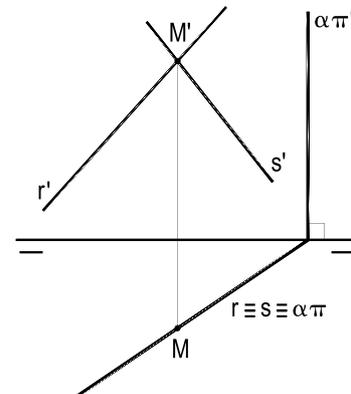


Figura 147

## 52 – Marcação de ponto em plano

Marcar um ponto num plano é, atendendo a determinadas condições conhecidas, fazer com que ele venha a pertencer ao plano.

Sabe-se (número 3) que todo ponto é precisamente definido no espaço, para o sistema biprojetivo da Geometria Descritiva e definida uma origem para as abscissas, por suas três coordenadas, sempre apresentadas na ordem alfabética: abscissa, afastamento e cota ( $x, y, z$ ).

Para marcar um ponto num plano, é claro que não se pode conhecer previamente suas três coordenadas, mas apenas duas delas, ou condições que impliquem nisso.

Vejamos alguns exemplos.

### 52.1 – Marcação de pontos em um plano horizontal ( $\alpha$ ).

Naturalmente, não se pode estabelecer cotas para os pontos, já que, para que venham a pertencer ao plano horizontal dado ( $\alpha$ ), têm de ter cotas iguais à deste plano.

Seja, então, marcar, no plano horizontal dado ( $\alpha$ ), os pontos (A), (B), (C), (D) e (E), tais que:

(A) (2, 3, ?).

(C) (3, -1, ?).

(A)(B)(C)(D) seja um quadrado, (B) com abscissa menor que (D).

(E) (6, ?, ?) ( $\in$ ) ( $\beta_{13}$ ).

Coordenadas conforme escala dada.

Solução: A construção do quadrado (A)(B)(C)(D) se faz em V.G. na projeção horizontal ABCD, a partir do conhecimento de sua diagonal AC (Figura 148).

As projeções de (E) são simétricas em relação à linha de terra (número 10).

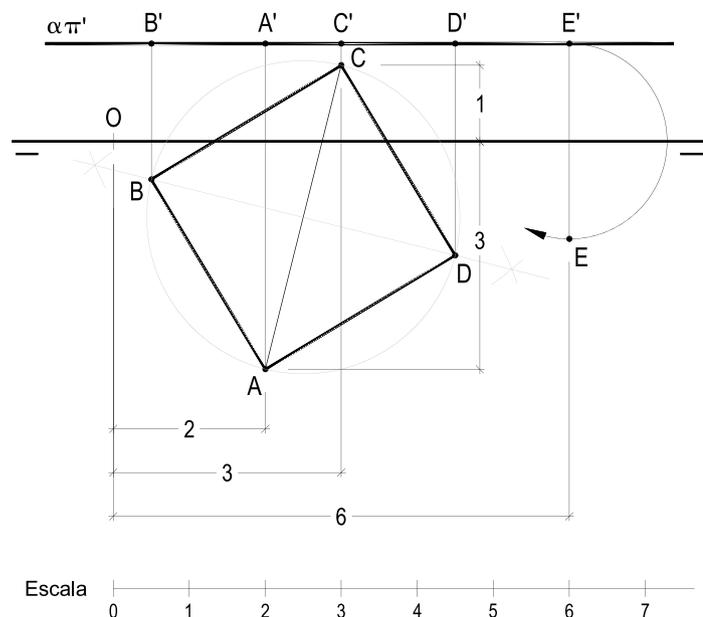


Figura 148

52.2 – Marcação de pontos em um plano frontal ( $\alpha$ ).

Agora são os afastamentos dos pontos a marcar em ( $\alpha$ ) que não podem ser fixados, por terem de ser iguais aos de ( $\alpha$ ).

Seja, então, marcar, num plano frontal ( $\alpha$ ), dado por seu traço  $\alpha\pi$ , os pontos (A), (B), (C), (D) e (E), tais que:

(A) (-1, ?, 4).

(B) (4, ?, 2).

(A)(B)(C) seja um triângulo equilátero, (C) no 4º diedro.

(B)(D) seja frontal, com 3 unidades de comprimento, (D) em ( $\pi$ ), com abscissa maior que (B).

(B)(E) seja vertical, (E) em ( $\beta_{24}$ ).

Coordenadas conforme escala dada.

Solução: As construções do triângulo equilátero (A)(B)(C) e do segmento (B)(D) se fazem em V.G. na projeção vertical (Figura 149).

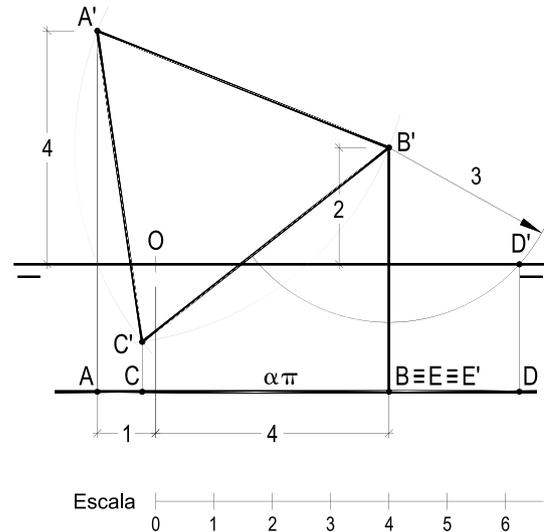


Figura 149

52.3 – Marcação de pontos em um plano vertical ( $\alpha$ ).

A limitação, neste caso, é a obrigatória pertinência das projeções horizontais dos pontos de ( $\alpha$ ) a seu traço horizontal  $\alpha\pi$ .

Seja, então, marcar em um plano vertical ( $\alpha$ ), dado por seus traços, os pontos (A), (B), (C), (D) e (E), tais que:

(A) (1, ?, 3).

(A)(B), com 4 unidades de comprimento, seja horizontal. (B) tenha abscissa positiva.

(C) (6, ?, ?) pertença a ( $\beta_{13}$ ).

(C)(D), com 3 unidades de comprimento, seja vertical, localizado num único diedro.

Coordenadas conforme escala dada.

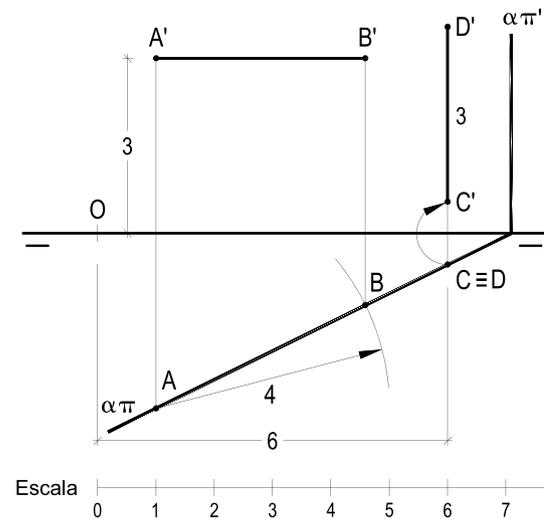


Figura 150

Solução: Apenas uma solução para o segmento (C)(D), vertical, pela limitação imposta, que se situe num único diedro (Figura 150).

52.4 – Marcação de pontos em um plano de topo ( $\alpha$ ).

Agora são as projeções verticais dos pontos de ( $\alpha$ ) que ficam limitadas à pertinência ao traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano dado.

Seja, então, marcar, em um plano de topo ( $\alpha$ ), dado por seus traços, os pontos (A), (B), (C), (D) e (E), tais que:

(A) (5, 3, ?).

(A)(B), com 5 unidades, de topo, tem seus extremos em diedros diferentes.

(A)(C), com 4 unidades, é frontal, estando (C) no primeiro diedro.

(D) pertence à linha de terra.

(E) pertence a ( $\beta_{13}$ ) e tem as três coordenadas iguais e positivas.

Coordenadas conforme escala dada.

Solução: Apenas uma solução para (B), por ter de estar em diedro diferente de (A).

Apenas uma solução para (C), por ter de estar no primeiro diedro.

(E) tem de pertencer à reta ( $r$ ), comum a ( $\alpha$ ) e a ( $\beta_{13}$ ), para ter cota e afastamento iguais. E sua projeção horizontal  $E$  deve estar sobre a bissetriz  $s$  do ângulo reto formado, na origem  $O$ , entre a linha de terra e a linha de chamada, para garantir a igualdade entre a abscissa e o afastamento de (E).

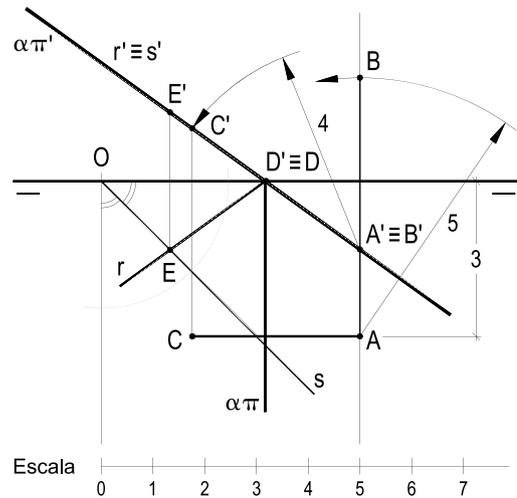


Figura 151

52.5 – Marcação de pontos em um plano de perfil ( $\alpha$ ).

A abscissa de todos os pontos tem de ser a de ( $\alpha$ ).

Seja marcar, sobre um plano de perfil dado ( $\alpha$ ), os pontos (A), (B), (C), (D) e (E), tais que:

(A) (?, 3, 1).

(B) (?, -2, -4).

(C) equidista de (A) e de (B) e  $\in (\pi)$ .

(D) equidista de (A) e de (B) e  $\in (\pi')$ .

(A)(E) é do topo, (E)  $\in (\pi')$ .

Coordenadas conforme escala dada.

Solução: Com o rebatimento do plano ( $\alpha$ ), opera-se em V.G. (Figura 152).

Dispensada a marcação da origem.

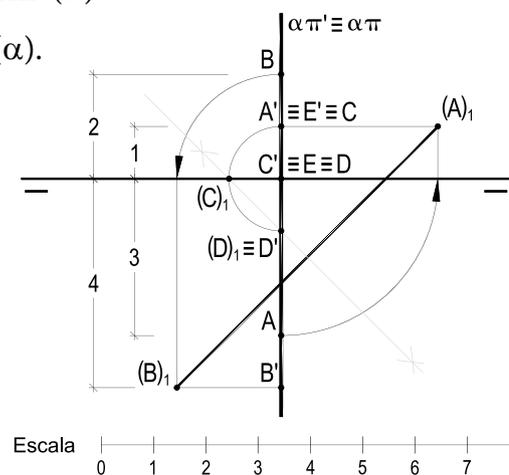


Figura 152

52.6 – Marcação de pontos em um plano ( $\alpha$ ), paralelo à linha da terra.

Para marcar pontos num plano paralelo à linha de terra, dado por seus traços, convém lançar mão de retas auxiliares, quaisquer, ou fronto-horizontais. O auxílio de um corte de perfil é, também, por vezes, útil.

Como exemplo, marquemos no plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, os pontos (A), (B), (C), (D) e (E), tais que:

(A) (-2, ?, 1).

(B) (1, 2, ?).

(C) e (D) têm abscissa igual a 3 unidades e distam 2 unidades da linha de terra. (C) é do primeiro diedro.

(B)(E) é de perfil. (E)  $\in$  ( $\beta_{13}$ ).

Coordenadas conforme escala dada.

Solução: A reta auxiliar (r) serve para marcar (A); (f) para (B) e o corte de perfil para determinar (C)<sub>1</sub>, (D)<sub>1</sub> e (E)<sub>1</sub>, que, alçados, fornecem as projeções de (C), (D) e (E) (Figura 153).

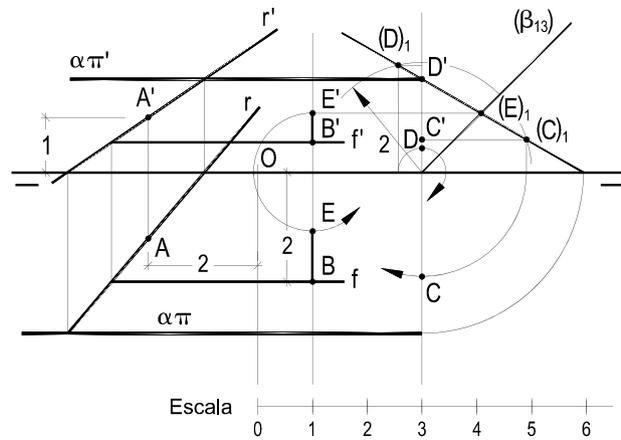


Figura 153

52.7 – Marcação de pontos em um plano ( $\pi'\pi$ ) – (M).

Tal como no caso anterior, dado um plano pertencente à linha de terra, por um ponto (M), para marcar pontos, nele, podem ser utilizadas retas quaisquer e fronto-horizontais do plano, ou o rebatimento de um corte de perfil.

Marquemos, então, no plano ( $\pi'\pi$ ) – (M), dado, os pontos (A), (B), (C), (D) e (E), tais que:

(A) (2, ?, 2).

(B) (0, ?, ?). (A)(B) é paralela a ( $\pi$ ).

(B)(C) é de perfil e (C)  $\in$  ( $\pi'$ ).

(D) dista 2 unidades da linha de terra e está no primeiro diedro.

(E) (5, 0, ?). (D)(E) é de perfil.

Coordenadas conforme escala dada.

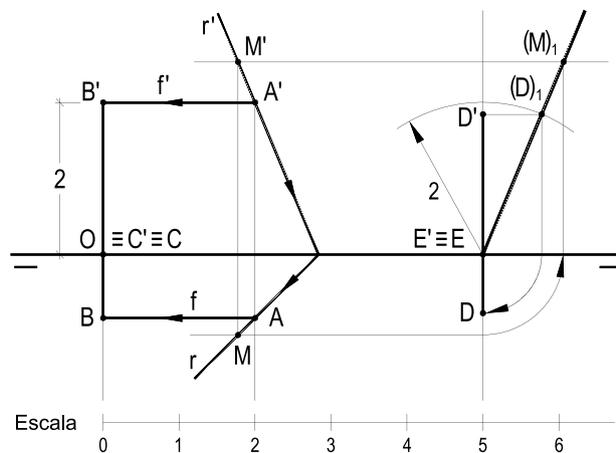


Figura 154

Solução: As retas (r) e (f), do plano, e o rebatimento do plano de perfil de abscissa 5 resolvem a questão (Figura 154).

52.8 – Marcação de pontos em um plano qualquer ( $\alpha$ ).

As retas principais do plano são as mais utilizadas.

Seja marcar, no plano qualquer ( $\alpha$ ), dado por seus traços, os pontos:

(A) (6, ?, 2, 5).

(B) (?, -2, 2, 5).

(C) (5, 1,5, ?).

(D) (?, 1,5, ?)  $\in (\beta_{24})$ .

(A)(E) é de perfil e (E)  $\in (\pi)$ .

Coordenadas conforme escala dada.

A horizontal (h) e a frontal (f) aproveitam as igualdades propostas de cotas para (A) e (B) e de afastamentos para (C) e (D) (Figura 155).

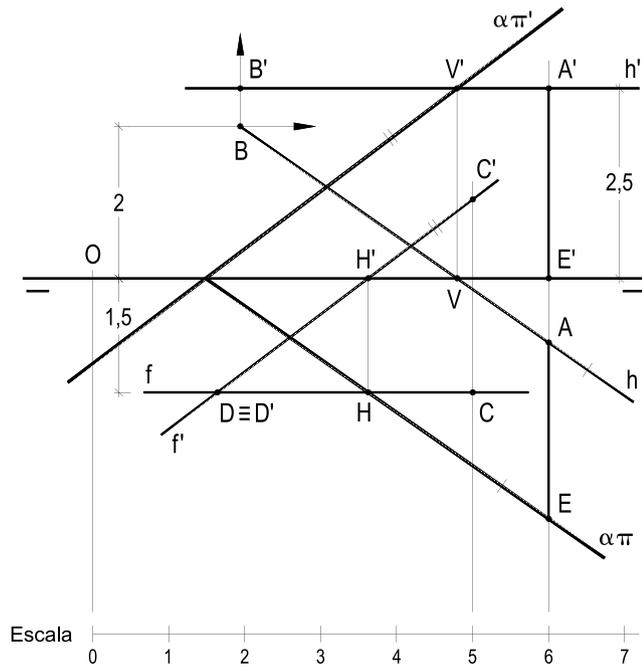


Figura 155

52.9 – Marcação de pontos em planos não dados por seus traços.

Para marcar um ponto em plano não dado por seus traços, convém, inicialmente, verificar se o plano é projetante (Figuras 156 e 157), o que torna imediata a questão, ou se não, quando, então, deve ser utilizada uma reta auxiliar, que contenha o ponto (Figuras 158 e 159).

São dadas a projeção vertical  $A'$ , nos exemplos das Figuras 156 e 158, e a projeção horizontal A, nos casos das Figuras 157 e 159.

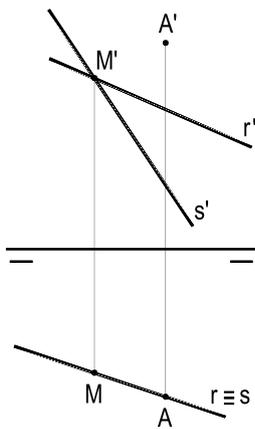


Figura 156

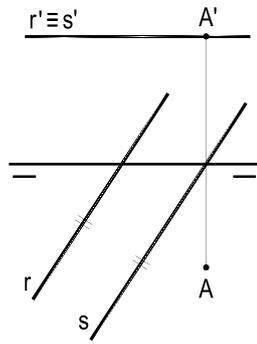


Figura 157

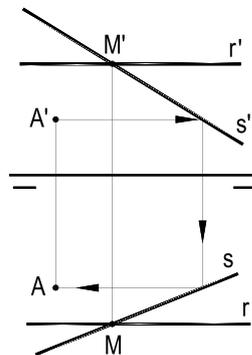


Figura 158

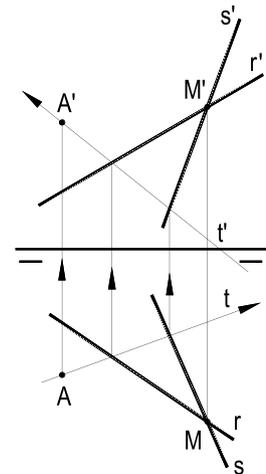


Figura 159

### 53 – Determinação dos traços de um plano com os bissetores

As obtenções dos traços (i) e (p) de um plano dado com cada um dos dois bissetores se faz, facilmente, pela obtenção de um ou dois, nos casos mais difíceis, ponto(s) desse plano pertencente(s) a cada um dos bissetores, como indicado nos exemplos abaixo, o último deles de um plano dado por duas retas (r) e (s).

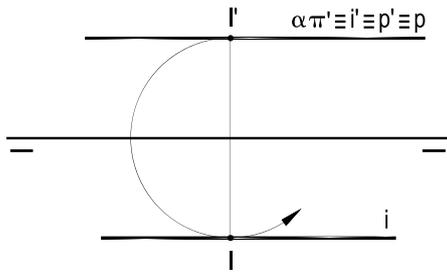


Figura 160

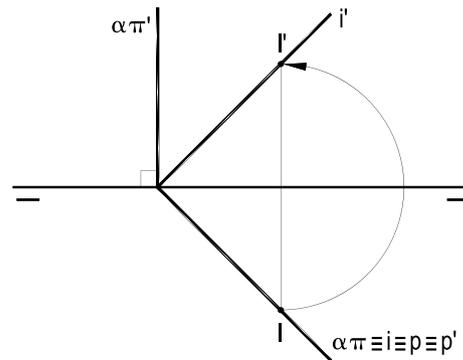


Figura 161

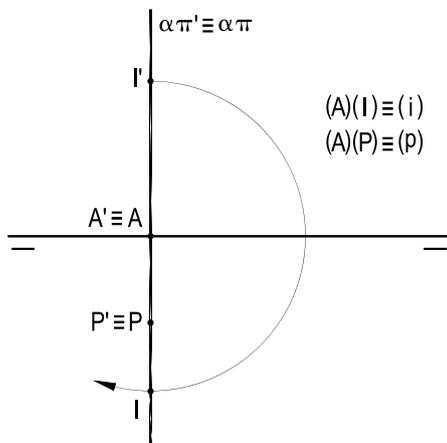


Figura 162

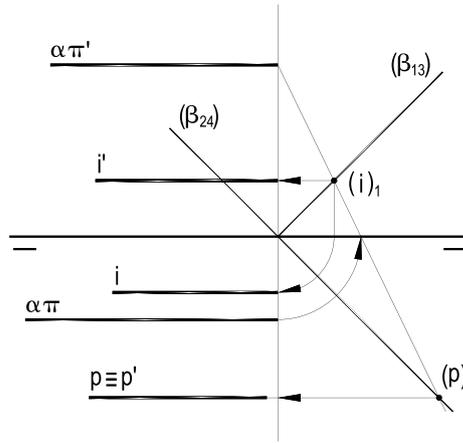


Figura 163

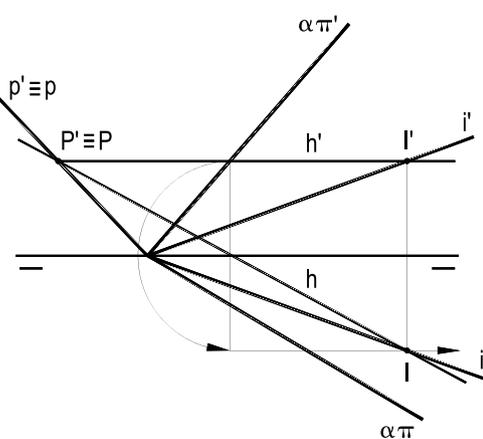


Figura 164

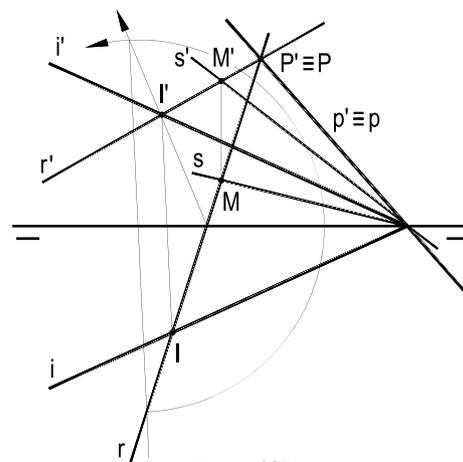


Figura 165

## 54 – Supressão da linha de terra

Embora não com frequência, acontecem ocasiões em que, em *épura*, a linha de terra é suprimida, permanecendo, no entanto, naturalmente, as linhas de chamada dos pontos envolvidos.

É claro que, nestas situações, deixam de existir, por falta de referências, os traços horizontais, verticais e com o bisetor ímpar das retas representadas.

Ao contrário, permanecem presentes os traços das retas em estudo com o bisetor par – os pontos em que, em *épura*, coincidem as projeções de cada uma delas.

Assim, tudo se passa como se, mantido presente o bisetor par ( $\beta_{24}$ ), os planos de projeção estivessem livres, movimentando-se, obedientes apenas a suas naturais direções (Figura 166).

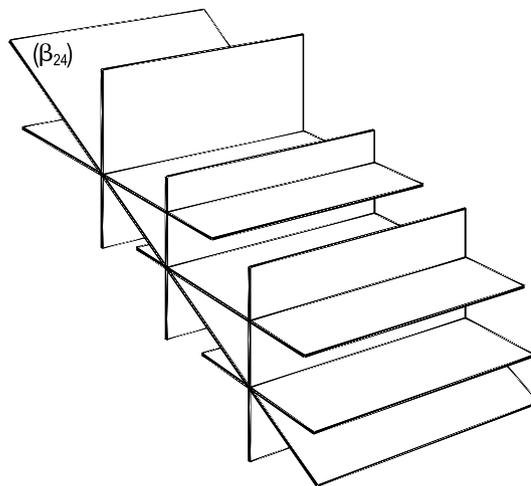


Figura 166

As resoluções dos problemas seguem os mesmos procedimentos anteriormente estudados, como apresentado nos exemplos abaixo, em que, dado um plano ( $\alpha$ ) por duas correntes ( $r$ ) e ( $s$ ), deseja-se marcar, nele, os pontos ( $A$ ) e ( $B$ ), dados por suas projeções  $A'$  e  $B$  (Figura 167), para o que são utilizadas as retas auxiliares ( $t$ ) e ( $u$ ), concorrentes com as dadas, ou determinar o traço ( $p$ ) do plano dado com o bisetor par (Figura 168), para o que se aproveita o ponto ( $A$ ), traço de ( $r$ ), com esse bisetor e, por impossibilidade, no espaço disponível, para repetir a ideia com a segunda reta dada ( $s$ ), lança-se mão de uma terceira reta ( $t$ ), concorrente com as dadas e em posição tal que seu traço ( $P$ ) com ( $\beta_{24}$ ) seja de fácil obtenção.

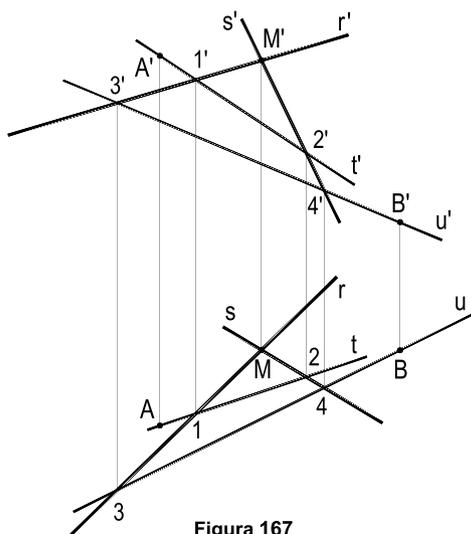


Figura 167

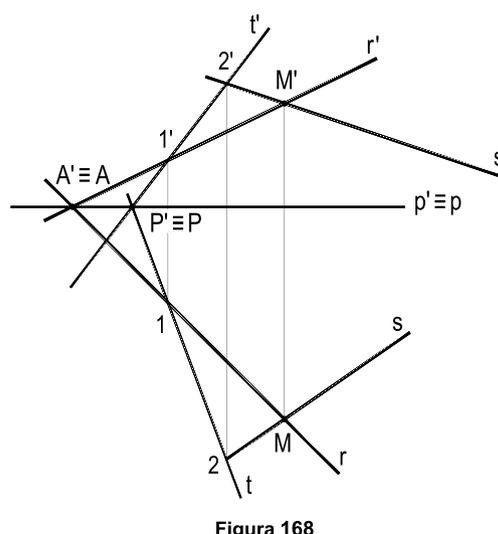


Figura 168

# CAPÍTULO IV

## RETA DE MAIOR DECLIVE

### 55 – Reta de maior declive

Reta de maior declive de um plano ( $\alpha$ ) em relação a outro plano ( $\beta$ ) é a reta de ( $\alpha$ ) que forma, com ( $\beta$ ), o maior ângulo possível. É também denominada reta de máximo declive de ( $\alpha$ ) em relação a ( $\beta$ ).

Sabe-se (*Geometria Espacial*, números 47, 48 e 49) que:

- a reta de maior declive de um plano ( $\alpha$ ) em relação a outro plano ( $\beta$ ) é perpendicular à interseção ( $\alpha\beta$ ) dos dois planos (Figura 169);
- quando ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) são oblíquos, a projeção ortogonal ( $s$ ) da reta ( $r$ ) de maior declive de ( $\alpha$ ) em relação a ( $\beta$ ), sobre ( $\beta$ ), é de maior declive, reciprocamente, de ( $\beta$ ) em relação a ( $\alpha$ ), sendo assim, também perpendicular a interseção ( $\alpha\beta$ ) dos dois planos (Figura 169);
- quando dois planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) são perpendiculares, a reta ( $r$ ) de maior declive de ( $\alpha$ ) em relação a ( $\beta$ ) é perpendicular à interseção ( $\alpha\beta$ ) dos dois planos (Figura 170), então, perpendicular a ( $\beta$ );
- reciprocamente, a reta ( $s$ ) de maior declive de ( $\beta$ ) em relação a ( $\alpha$ ) é também perpendicular à interseção ( $\alpha\beta$ ) dos dois planos (Figura 170);
- naturalmente, não existe a reta quando os planos são paralelos;

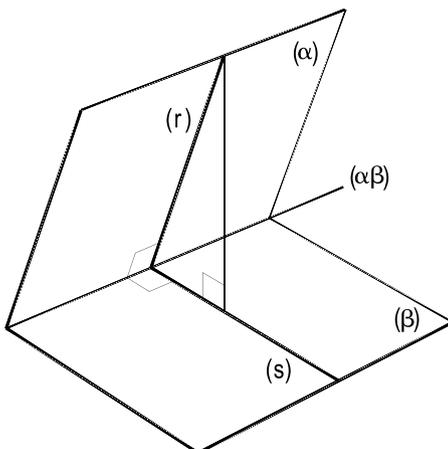


Figura 169

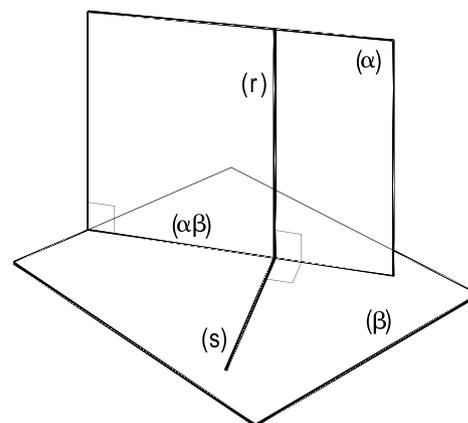


Figura 170

- quando dois planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  não são paralelos, há, em verdade, uma infinidade de retas de maior declive de  $(\alpha)$  em relação a  $(\beta)$ , todas perpendiculares à interseção  $(\alpha\beta)$  dos dois planos (Figuras 171 e 172) e, por isso mesmo, todas paralelas entre si;
- um plano  $(\alpha)$  fica precisamente determinado quando são dados um plano  $(\beta)$ , não paralelo a  $(\alpha)$ , e uma reta  $(r)$ , oblíqua a  $(\beta)$ , sabendo-se que  $(r)$  é de maior declive de  $(\alpha)$  em relação a  $(\beta)$  (*Geometria Espacial*, número 49).

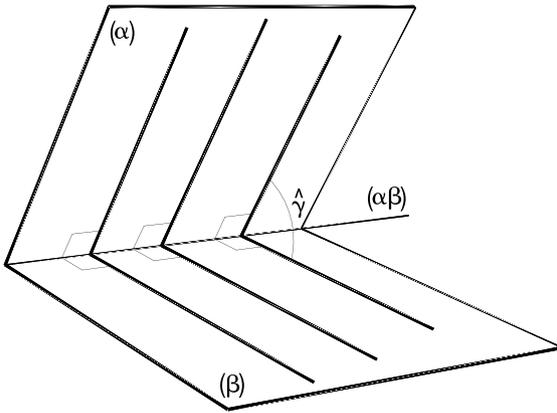


Figura 171

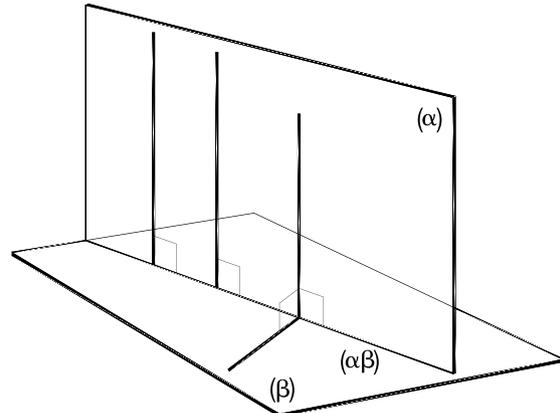


Figura 172

Por formar o ângulo plano do diedro agudo existente entre os planos oblíquos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , o ângulo  $\hat{\gamma}$  entre as retas de maior declive de cada um em relação ao outro é (Figura 171) o próprio ângulo formado entre os dois planos (*Geometria Espacial*, número 35).

Na Geometria Descritiva dá-se especial ênfase às retas de maior declive em relação aos planos de projeção, sobretudo para os planos quaisquer.

Denominam-se, respectivamente, de maior declive e de maior inclinação tais retas, em relação a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$ . Assim são  $(r)$  e  $(s)$ , do plano  $(\gamma)$ , na Figura 173.

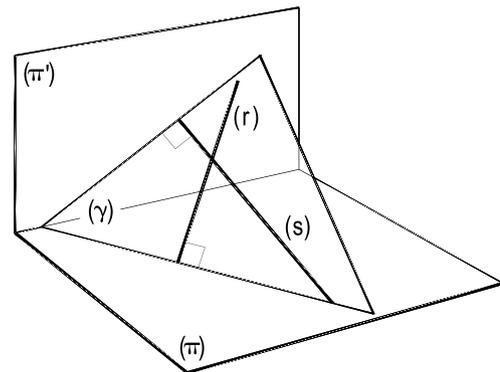


Figura 173

## 56 – Retas de maior declive e de maior inclinação

Naturalmente, por serem paralelos a  $(\pi)$ , ou a  $(\pi')$ , os planos horizontais não possuem retas de maior declive e os planos frontais não possuem as retas de maior inclinação.

Passemos a observar as retas de maior declive, que, aqui, serão, todas, anotadas como  $(r)$  e as de maior inclinação, todas  $(s)$ , neste capítulo, para todos os tipos de plano:

### 56.1 – Planos projetantes.

As retas ( $r$ ) de maior declive dos planos projetantes em relação a  $(\pi)$  são todas verticais (Figuras 175, 176 e 178) e as de maior inclinação ( $s$ ), dos planos projetantes em relação a  $(\pi')$ , são sempre de topo (Figuras 174, 177 e 178).

Completam este grupo retas horizontais e frontais (Figuras 176 e 177).

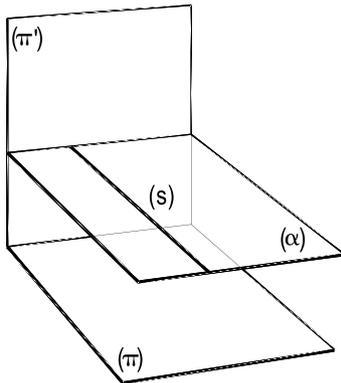


Figura 174

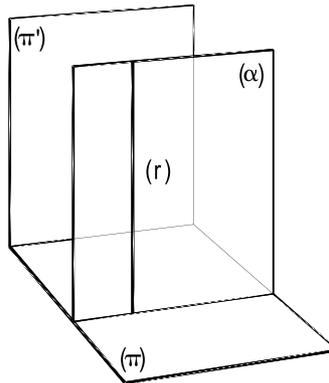


Figura 175

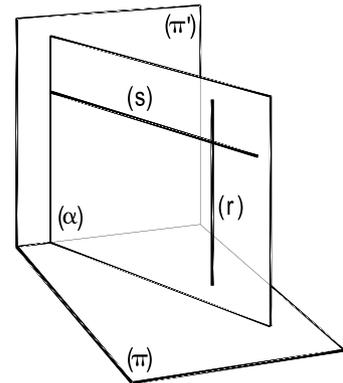


Figura 176

Observe-se que, para os planos projetantes que não os horizontais e os frontais, são sempre perpendiculares entre si as retas de maior declive e as de maior inclinação, porque os próprios traços desses planos são perpendiculares entre si.

E que, para os verticais e os de topo, tais perpendicularidades repetem-se em épura.

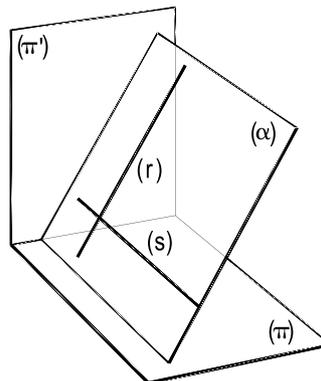


Figura 177

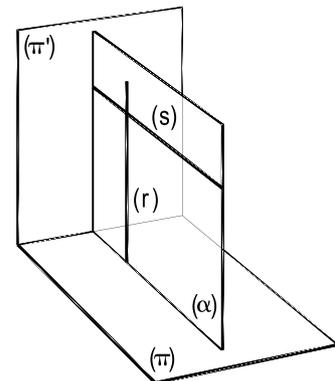


Figura 178

56.2 – Planos não projetantes.

As retas de maior declive, que também são de maior inclinação, para os planos paralelos ou pertencentes a  $(\pi'\pi)$ , são de perfil (Figuras 179 e 180), já que, nesses planos, os traços são sempre retas fronto-horizontais.

Para os planos quaisquer, são sempre quaisquer, embora diferentes uma da outra, visto que os traços dos planos quaisquer são, sempre, oblíquos um ao outro (Figura 181).

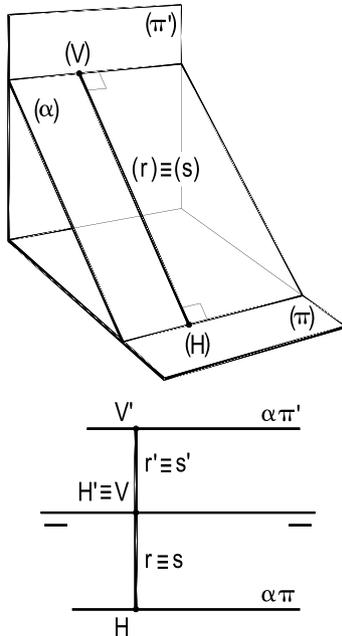


Figura 179

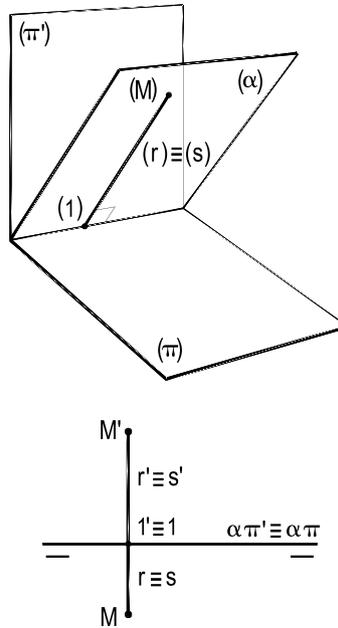


Figura 180

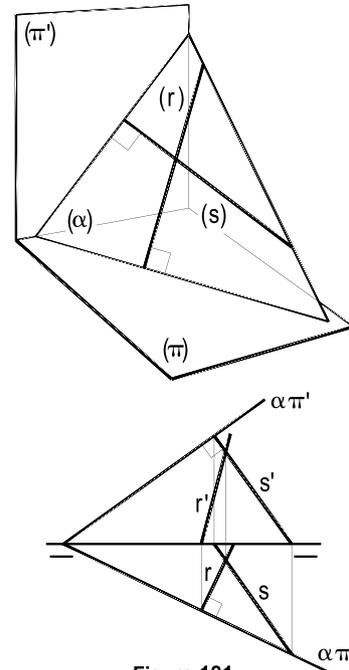


Figura 181

56.3 – Resumo.

Planos	Retas de maior declive	Retas de maior inclinação
horizontal	—	de topo
frontal	vertical	—
vertical	vertical	horizontal
de topo	frontal	de topo
de perfil	vertical	de topo
paralelo a $(\pi'\pi)$	de perfil	de perfil
$(\pi'\pi) - (M)$	de perfil	de perfil
qualquer	qualquer	qualquer

## 57 – Observações

57.1 – As retas de maior declive de um plano qualquer são perpendiculares às retas horizontais do plano (Figuras 182 e 183).

Assim, mesmo que um plano qualquer não seja dado por seus traços, mas, por exemplo, por duas concorrentes (a) e (b) (Figura 184), pode-se construir uma reta de maior declive (r), do plano, com o auxílio prévio de uma horizontal (h) a ele pertencente.

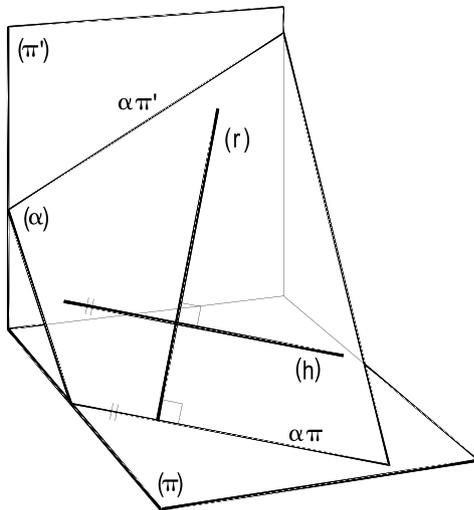


Figura 182

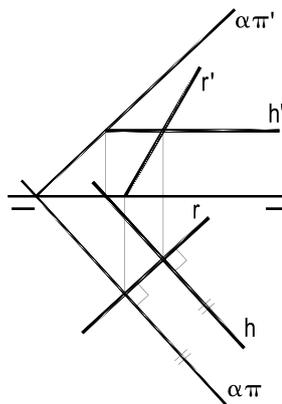


Figura 183

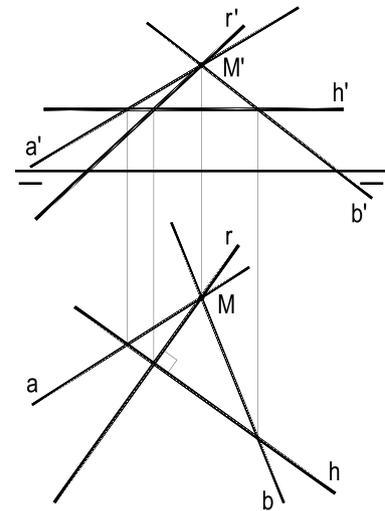


Figura 184

57.2 – Analogamente, as retas de maior inclinação (s) de um plano qualquer ( $\alpha$ ) são perpendiculares às suas frontais (Figuras 185 e 186). É com o auxílio de uma reta frontal (f) que se consegue construir uma reta (s) de maior inclinação de um plano dado por duas retas (a) e (b) (Figura 187).

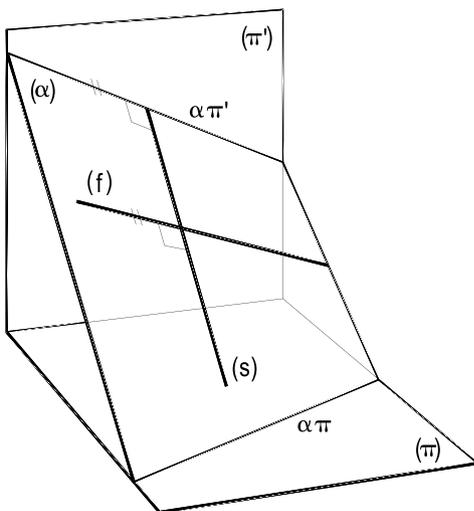


Figura 185

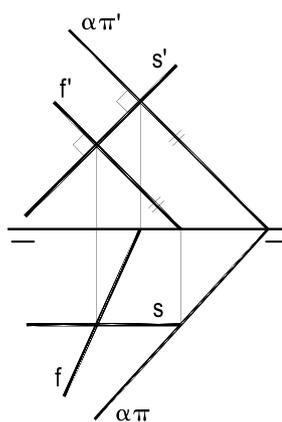


Figura 186

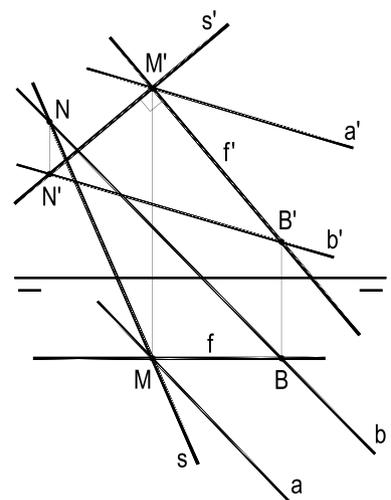


Figura 187

## 58 – Problema inverso

Inversamente à construção de retas de maior declive, ou de maior inclinação, de um plano dado, aqui propomos determinar um plano ( $\alpha$ ), a partir do conhecimento de uma sua reta ( $r$ ) de maior declive, ou de uma sua reta ( $s$ ) de maior inclinação.

Tal se consegue pela construção dos traços do plano ( $\alpha$ ) (Figuras 188 e 189), ou pela determinação de uma de suas retas principais (Figuras 190 e 191) concorrente com a dada.

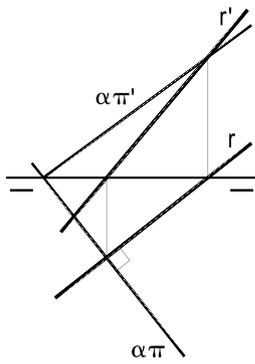


Figura 188

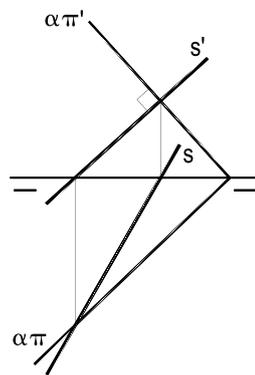


Figura 189

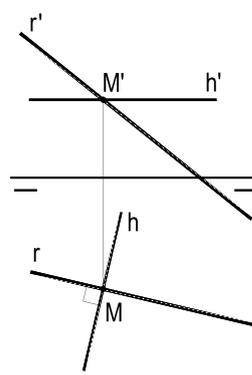


Figura 190

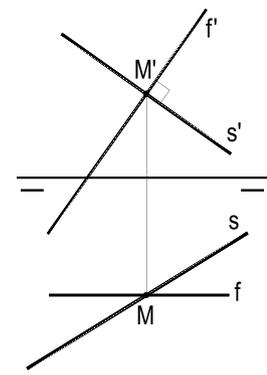


Figura 191

Naturalmente, esta questão simplifica-se sobremaneira quando a reta ( $r$ ) de maior declive, ou a de maior inclinação ( $s$ ), deixa de ser qualquer. De fato, observando o quadro resumo antes desenvolvido (número 56.3), nota-se que, quando as retas de maior declive ou de maior inclinação são de perfil, os planos que elas definem são paralelos ou pertencentes à linha de terra, e que, quando são verticais, de topo, horizontais ou frontais, tais planos são projetantes.

Assim são os exemplos dos planos ( $\alpha$ ), abaixo apresentados e definidos por uma reta ( $r$ ) de maior declive, ou ( $s$ ), de maior inclinação.

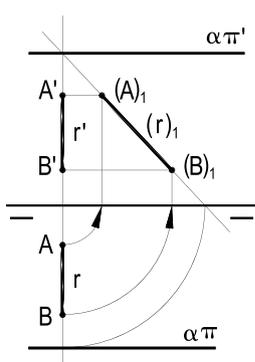


Figura 192

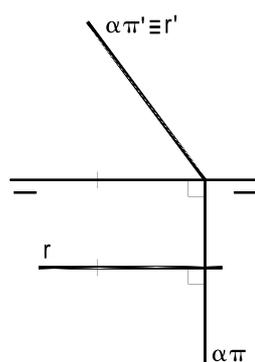


Figura 193

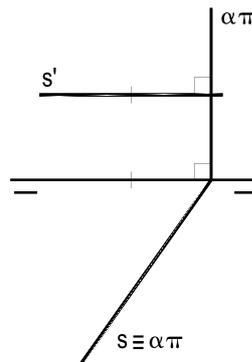


Figura 194

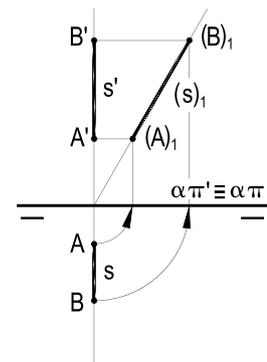


Figura 195

# CAPÍTULO V

## INTERSEÇÕES

### 59 – Interseção de dois planos

Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 7), que, se vários planos secantes são todos paralelos a uma determinada reta ou, eventualmente, pertencentes a ela, os que são secantes se cortam, aos pares, segundo retas paralelas àquela, isto é, com a mesma direção dela. Assim são as retas (r), (s) e (t) da Figura 196, interseções de pares de planos do conjunto  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ , todos paralelos à reta (d).

Isto se aplica, naturalmente, na Geometria Descritiva, ao conjunto de planos horizontais, frontais, paralelos e pertencentes à linha de terra, todos paralelos a fronto-horizontais, tendo, portanto, retas dessa natureza como suas interseções, quando tomados aos pares (Figuras 197 e 198).

A Figura 197 apresenta espacialmente e a Figura 198 mostra, mediante um corte de perfil genérico, as interseções desses quatro tipos de planos, aos pares, todas retas fronto-horizontais.

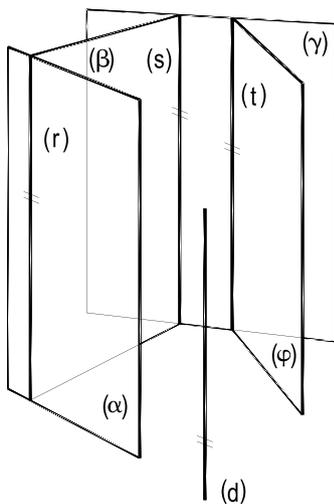


Figura 196

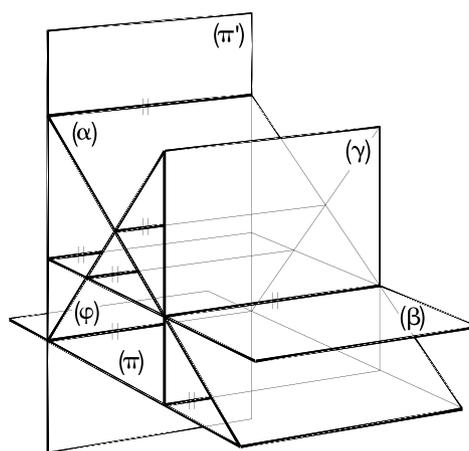


Figura 197

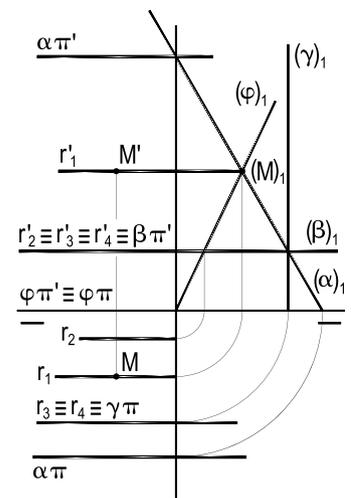


Figura 198

Outros conjuntos possuem a mesma propriedade. São os casos dos planos frontal, vertical e de perfil, todos perpendiculares a  $(\pi)$  (Figuras 199 e 200) e dos planos horizontal, de topo e de perfil, todos perpendiculares a  $(\pi')$  (Figuras 201 e 202), que se interceptam, em cada grupo, respectivamente segundo retas verticais ou de topo.

Em verdade, qualquer destes dois últimos conjuntos, por ser perpendicular, respectivamente, a  $(\pi)$  ou a  $(\pi')$ , deve ser paralelo a uma reta perpendicular a tal plano de projeção (*Geometria Espacial*, número 4).

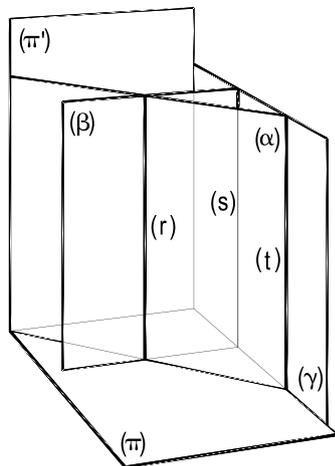


Figura 199

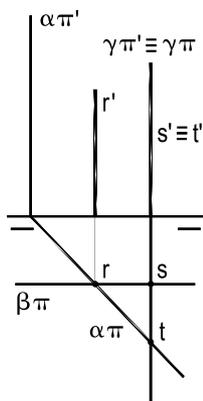


Figura 200

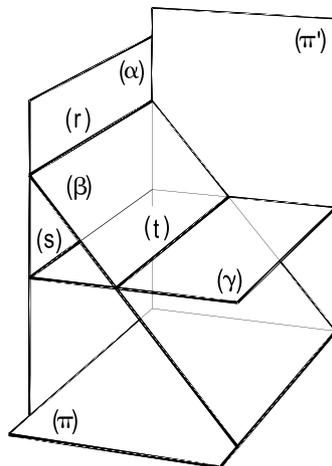


Figura 201

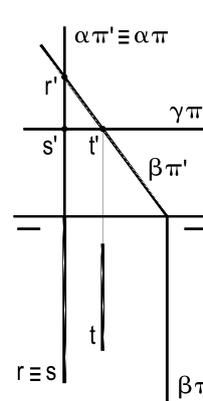


Figura 202

Situações semelhantes são as de pares de planos quaisquer que se interceptam, tendo seus traços horizontais paralelos (Figuras 203 e 204), ou traços verticais paralelos (Figuras 205 e 206). As interseções são, respectivamente, então, uma horizontal, ou uma frontal, paralela aos traços paralelos, de mesmo nome, dos planos secantes.

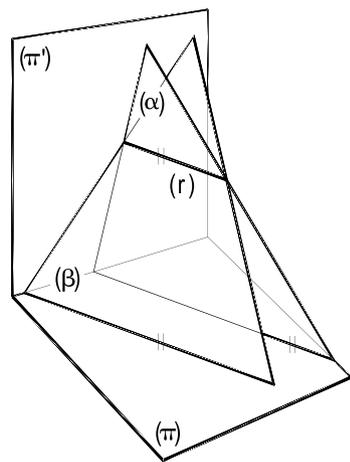


Figura 203

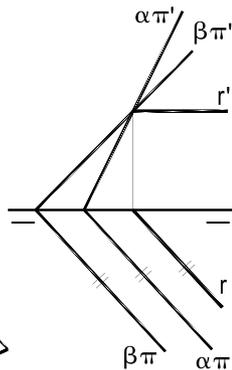


Figura 204

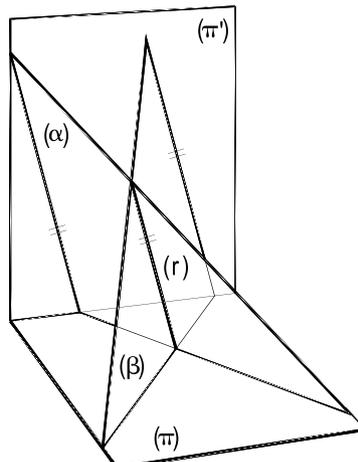


Figura 205

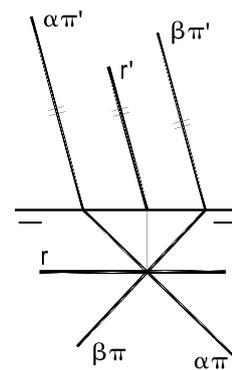


Figura 206

Muito simples, também, é determinar as interseções de dois planos quando ao menos um deles é projetante, visto que (números 41, 42, 43, 44 e 45) já será conhecida ao menos uma de suas projeções – aquela de mesmo nome do traço do plano projetante com o plano da projeção ao qual é perpendicular (Figuras 207, 208, 209 e 210).

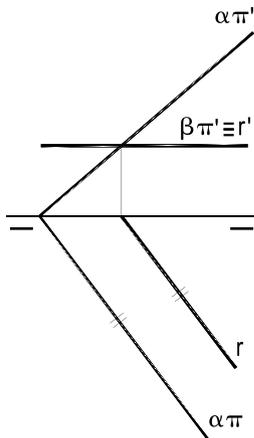


Figura 207

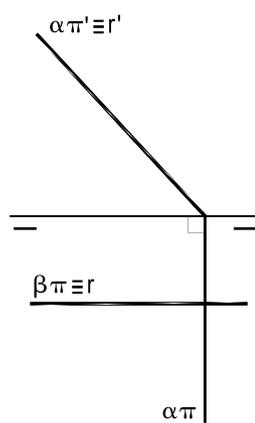


Figura 208

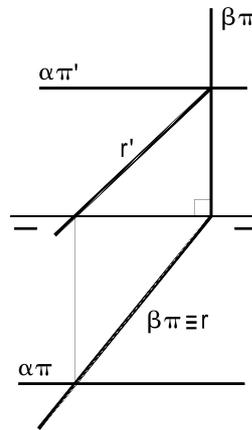


Figura 209

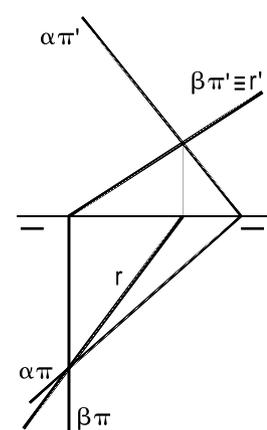


Figura 210

E, de um modo geral, quando os planos são dados por seus traços e os de mesmo nome se cortam dentro dos limites de trabalho, a interseção é imediatamente definida pelos pontos comuns aos pares de traços de mesmo nome, já que estes dois pontos pertencem simultaneamente aos dois planos dados.

Assim são as interseções dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) das Figuras 211, 212, 213 e 214, todas definidas pelos pontos (V) e (H), comuns, respectivamente, aos dois traços verticais  $\alpha\pi'$  e  $\beta\pi'$  e aos dois horizontais  $\alpha\pi$  e  $\beta\pi$ .

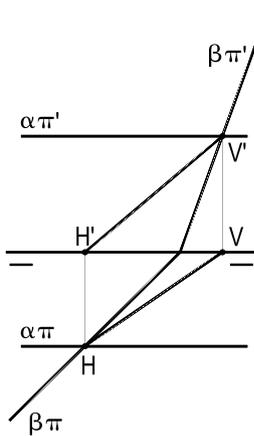


Figura 211

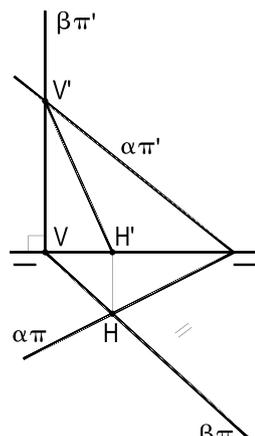


Figura 212

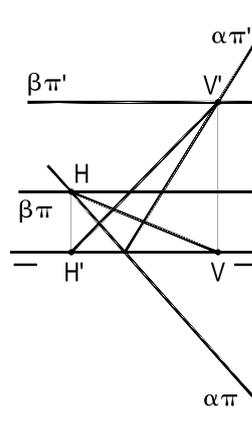


Figura 213

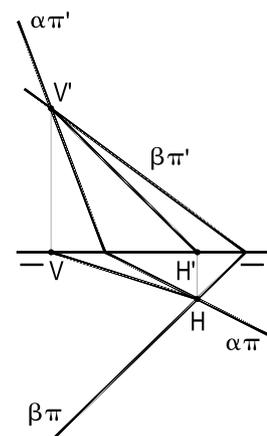


Figura 214

Para os casos mais complexos, em que os traços de mesmos nomes dos dois planos dados não se cortam acessivelmente, ou quando, ao menos, um dos dois planos não é dado por seus traços, é usual operar com um, ou dois, plano(s) auxiliar(es), preferencialmente, projetante(s).

De fato, sendo  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  os planos dados e  $(\gamma_1)$  e  $(\gamma_2)$ , os planos auxiliares utilizados, as retas  $(a_1)$  e  $(b_1)$ , traços de  $(\gamma_1)$  com os dados, hão de se encontrar num ponto  $(M)$  comum a  $(\alpha)$  e a  $(\beta)$  e, portanto, de sua interseção. Se necessário, o segundo plano auxiliar  $(\gamma_2)$ , habitualmente paralelo a  $(\gamma_1)$ , produzirá as retas  $(a_2)$  e  $(b_2)$  que se cortarão sobre o segundo ponto  $(N)$  da interseção de  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  procurada (Figuras 215 e 217).

Nos exemplos seguintes, os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , cuja interseção  $(i)$  se pede, são, respectivamente, dados por seus traços (Figuras 216 e 217) e um plano por duas de suas retas  $(r)$  e  $(s)$  e o outro por suas retas  $(t)$  e  $(u)$  (Figuras 218 e 219). Em todos os casos  $(i)$  é a interseção.

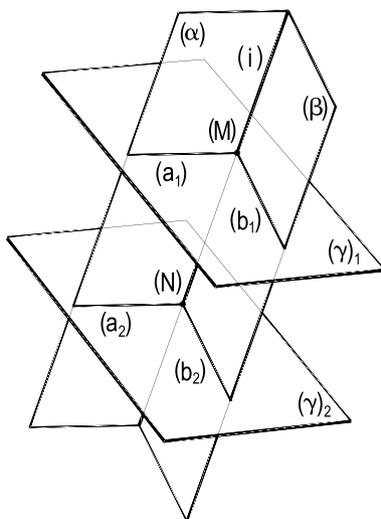


Figura 215

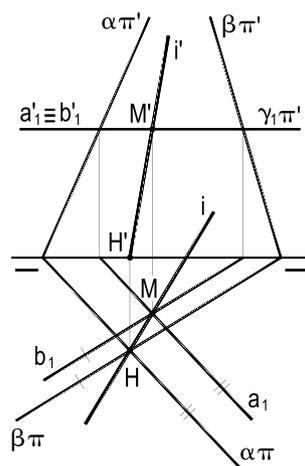


Figura 216

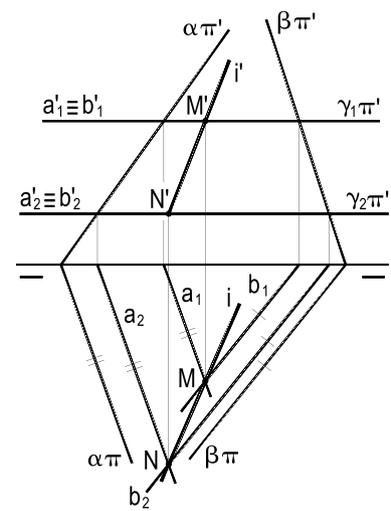


Figura 217

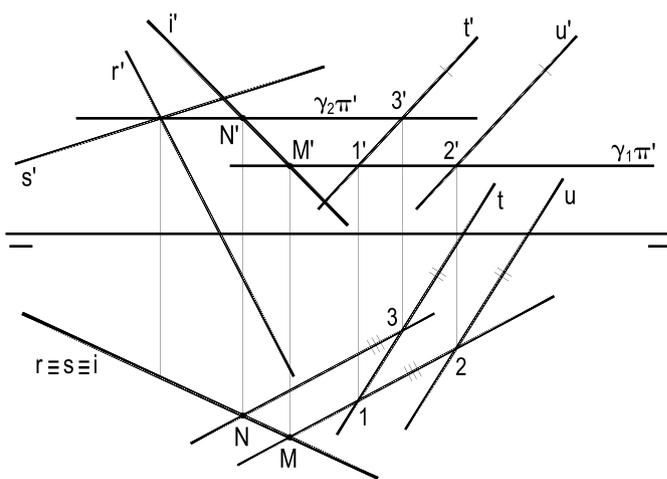


Figura 218

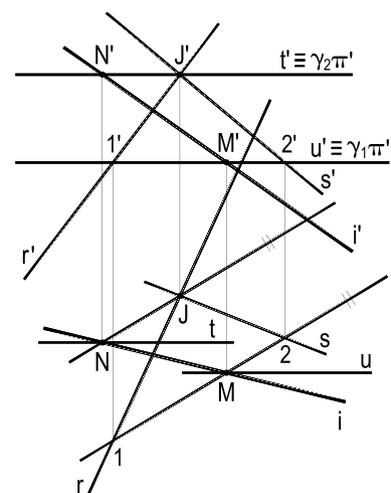


Figura 219

## 60 – Ponto comum a três planos

Três planos ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ) podem ser paralelos (Figura 220) ou secantes. Neste caso, podem ter apenas um ponto (J) em comum (Figura 221), uma reta (r) em comum (Figura 222), ou serem dois paralelos, ambos secantes ao terceiro (Figura 223).

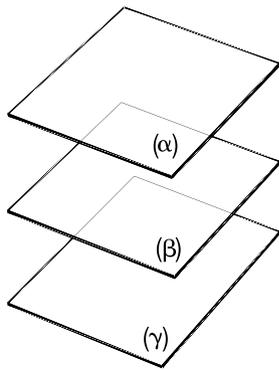


Figura 220

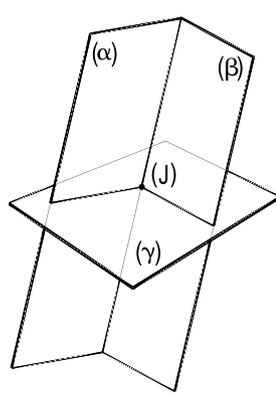


Figura 221

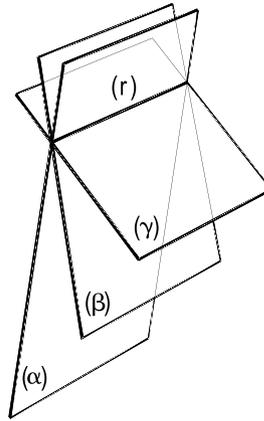


Figura 222

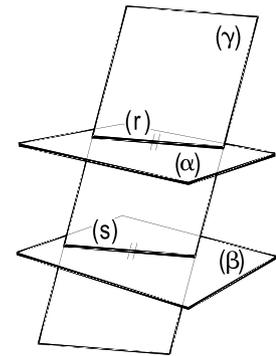


Figura 223

Para obter o ponto (J), comum a três planos secantes ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ), basta escolher um deles – ( $\beta$ ), nas Figuras 224 e 225 – e construir suas interseções (r) e (s) com cada um dos outros dois. O ponto (J), procurado, será o comum a essas duas retas.

No exemplo da Figura 224, ( $\beta$ ) foi escolhido por ser projetante e o mais particular dos três planos em jogo, o que simplificou, em muito, a *épura*.

Como alternativa, poder-se-ia ter iniciado construindo a interseção (i) de dois dos três planos – ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), na Figura 225 – e, então, obtendo sua interseção com ( $\gamma$ ), o ponto (J) procurado.

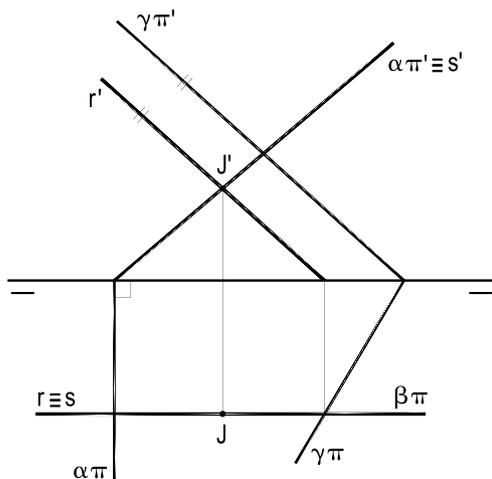


Figura 224

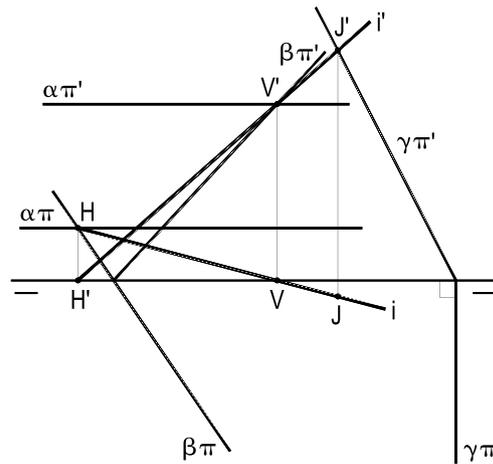


Figura 225

## 61 – Interseção de reta e plano

Para determinar o ponto (J) em que uma reta (r), dada, corta um plano dado ( $\alpha$ ), basta utilizar um plano auxiliar ( $\gamma$ ), pertencente a (r), e determinar sua interseção (s) com ( $\alpha$ ). O ponto procurado (J) é o comum a esta reta (s) e à dada (r) (Figura 226).

Naturalmente, quanto melhor a escolha do plano auxiliar ( $\gamma$ ), que contenha a reta dada (r), tanto mais simples será a resolução da questão (Figuras 227, 228 e 229).

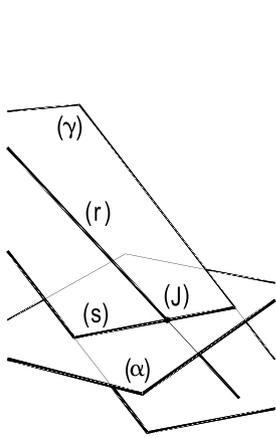


Figura 226

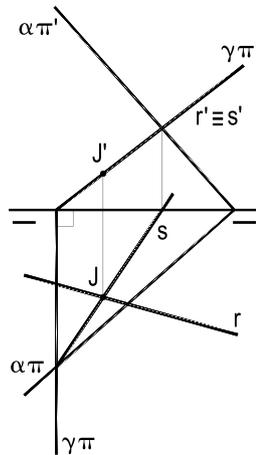


Figura 227

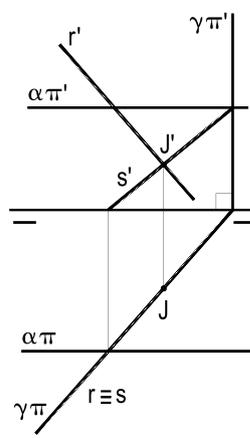


Figura 228

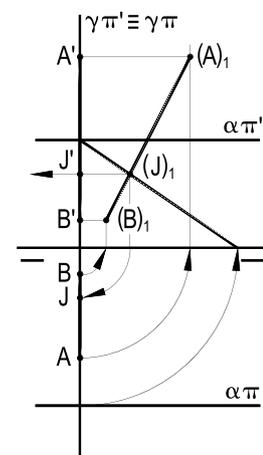


Figura 229

É claro que o processo acima descrito e graficamente apresentado pode ser dispensado nos casos muito simples em que o plano dado ( $\alpha$ ) é projetante, conforme indicado abaixo (Figuras 230, 231, 232 e 233).

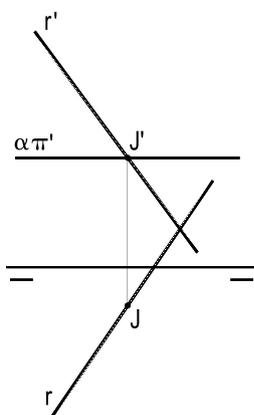


Figura 230

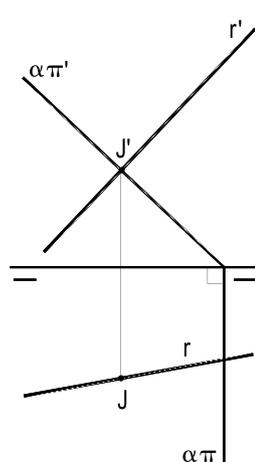


Figura 231

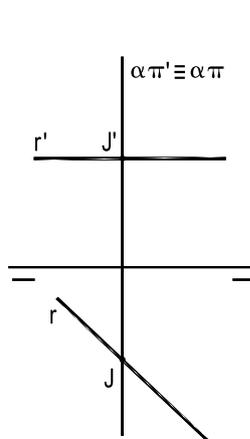


Figura 232

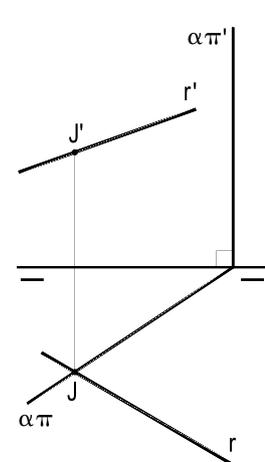


Figura 233

# CAPÍTULO VI

## PARALELISMO

### 62 – Retas paralelas a planos

Sabe-se (*Geometria Espacial*, números 6, 8, 10 e 12) que:

- a condição necessária e suficiente para que uma reta ( $r$ ) seja paralela a um plano ( $\alpha$ ) é que ( $r$ ), pertencendo a um ponto ( $A$ ) exterior a ( $\alpha$ ), seja paralela a uma reta ( $s$ ) de ( $\alpha$ ) (Figura 234);
- reciprocamente, para que um plano ( $\alpha$ ), pertencente a um ponto ( $J$ ), seja paralelo a uma reta ( $r$ ), exterior a ( $J$ ), basta que ele contenha uma reta ( $s$ ), paralela a ( $r$ ) (Figura 234);
- a condição necessária e suficiente para que uma reta ( $r$ ) seja paralela a dois planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) é que, pertencendo a um ponto ( $A$ ) exterior a esses dois planos, seja paralela à interseção ( $\alpha\beta$ ) desses dois planos (Figura 235);
- a condição necessária e suficiente para que um plano ( $\alpha$ ) corte outros dois secantes ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ) segundo retas paralelas é que, pertencendo a um ponto ( $A$ ) exterior àqueles dois, seja paralelo à interseção ( $\beta\gamma$ ) desses dois planos (Figura 236);
- o lugar geométrico das retas ( $r$ ) que, pertencendo a um ponto ( $A$ ), exterior a um plano ( $\alpha$ ), são paralelas a ( $\alpha$ ) é o plano ( $\beta$ ) pertencente a ( $A$ ) e paralelo a ( $\alpha$ ) (Figura 237).

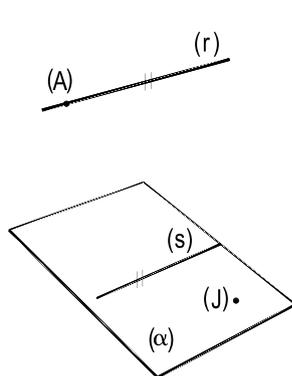


Figura 234

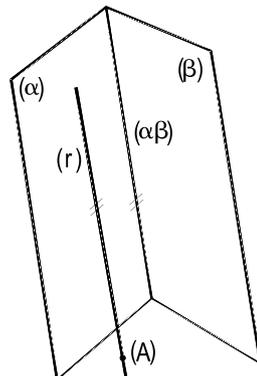


Figura 235

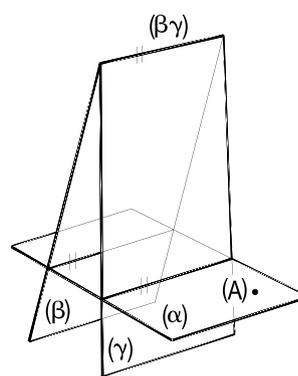


Figura 236

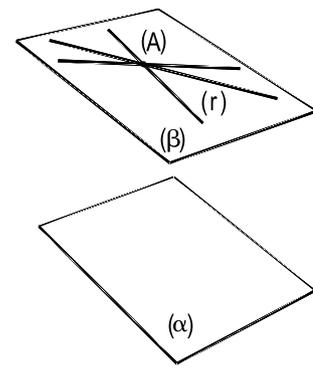


Figura 237

### 63 – Construção de uma reta paralela a um plano

O problema direto consiste em obter a segunda projeção de uma reta pertencente a um ponto dado, que seja paralela a um plano dado.

Assim é, por exemplo, construir a segunda projeção  $r'$  de uma reta ( $r$ ), da qual se dá a projeção horizontal  $r$ , sabendo que a reta pertence a um ponto dado ( $A$ ) e que é paralela a um plano dado ( $\alpha$ ).

A solução, muito simples, consiste em marcar em ( $\alpha$ ) uma reta ( $s$ ), com projeção, horizontal  $s$  paralela (ou, até mesmo, coincidente) com  $r$  e traçar, por  $A'$ ,  $r'$  paralela a  $s'$  (Figuras 238, 239 e 240).

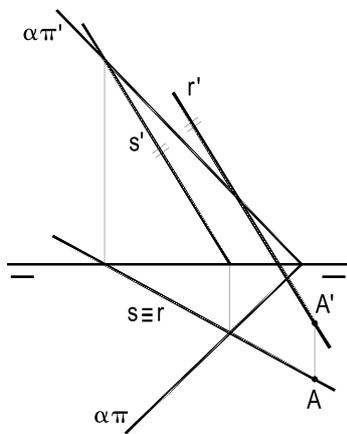


Figura 238

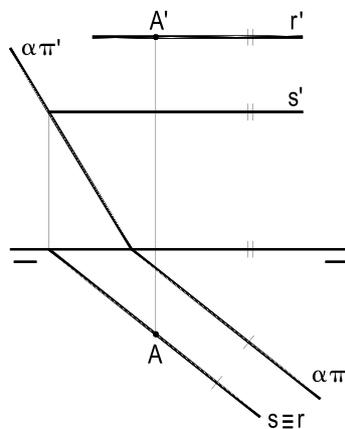


Figura 239

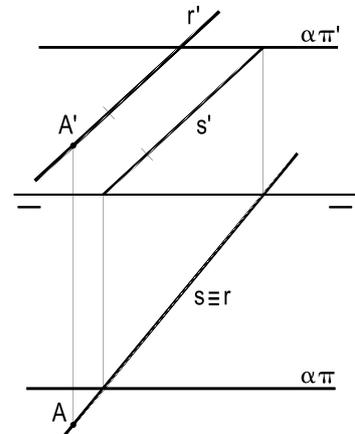


Figura 240

O procedimento é equivalente, naturalmente, quando é dada a projeção vertical  $r'$  da reta pedida e mesmo quando o plano não é dado por seus traços, mas sim, por exemplo, por duas retas ( $a$ ) e ( $b$ ) (Figuras 241 e 242).

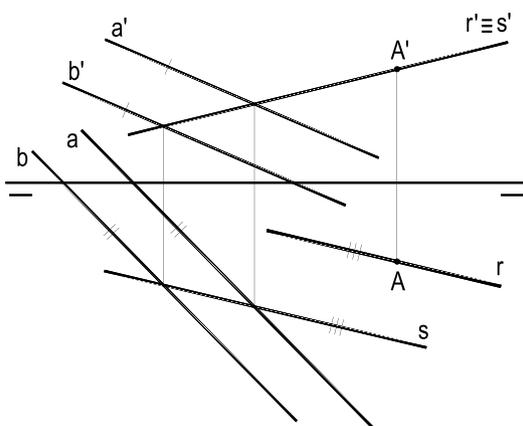


Figura 241

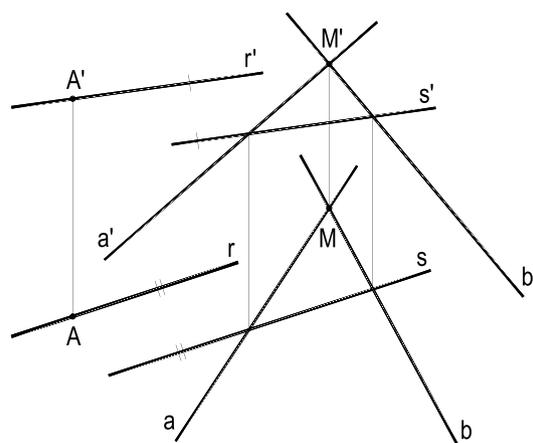


Figura 242

Bem mais simples é, naturalmente, a construção de uma reta ( $r$ ) paralela a um plano projetante dado ( $\alpha$ ), sabendo que ela passa por um ponto dado ( $A$ ), conhecida uma projeção de ( $r$ ) – aquela correspondente ao plano de projeção para o qual ( $\alpha$ ) não é projetante –, como apresentado nas Figuras 243, 244 e 245, abaixo. Nos dois primeiros exemplos, é dada a projeção horizontal  $r$  e no terceiro, a projeção vertical  $r'$  da reta ( $r$ ).

Isto, porque a projeção procurada tem de ser, nestes casos, paralela ao traço de mesmo nome do plano projetante dado.

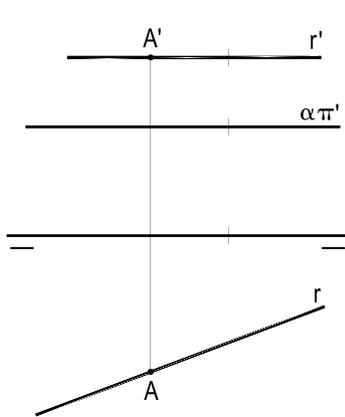


Figura 243

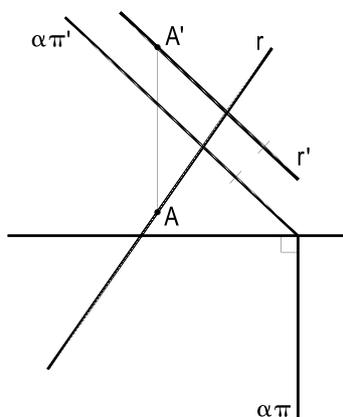


Figura 244

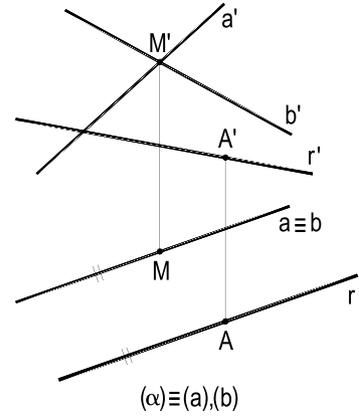


Figura 245

Algo mais complexa é a construção de uma reta ( $r$ ) que, passando por um ponto ( $A$ ), seja paralela a um plano ( $\alpha$ ), dados ( $\alpha$ ) e ( $A$ ) sob alguma condição a que ( $r$ ) deva atender.

Nesta hipótese, se ( $\alpha$ ) é projetante, o paralelismo de uma de suas projeções ao traço de mesmo nome de ( $\alpha$ ), referente ao plano de projeção ao qual ele é perpendicular, facilita sobremodo a solução da questão, como mostram as Figuras 246, 247 e 248 seguintes.

Para esses três exemplos, foi respectivamente condicionado que a reta ( $r$ ) seja paralela a ( $\beta_{24}$ ), inclinada de  $45^\circ$  em relação a ( $\pi$ ) e concorrente com ( $\pi'\pi$ ).

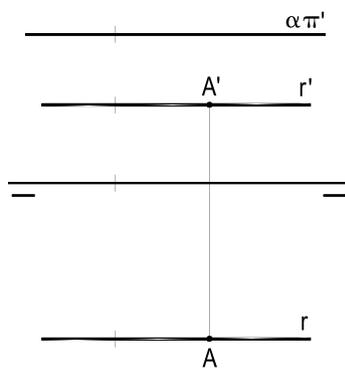


Figura 246

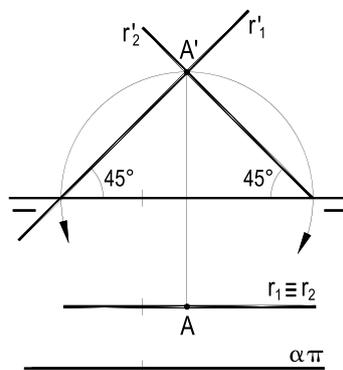


Figura 247

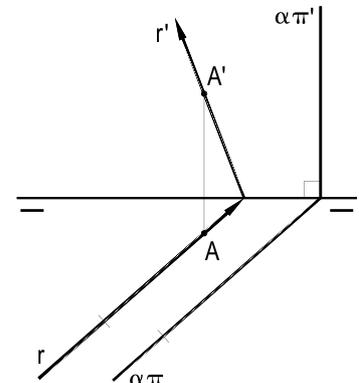


Figura 248

Quando o plano dado ( $\alpha$ ) é não projetante, a construção de ( $r$ ) pode ser mais longa, dependendo da utilização de conhecimentos geométricos, como apresentado nos exemplos das Figuras 249 e 250, em que são dados o ponto ( $A$ ) e o plano ( $\alpha$ ).

Para o caso da Figura 249 condicionou-se que a abscissa do traço horizontal de ( $r$ ) seja igual à cota de ( $A$ ); para a seguinte, que ( $r$ ) deva ter projeções paralelas.

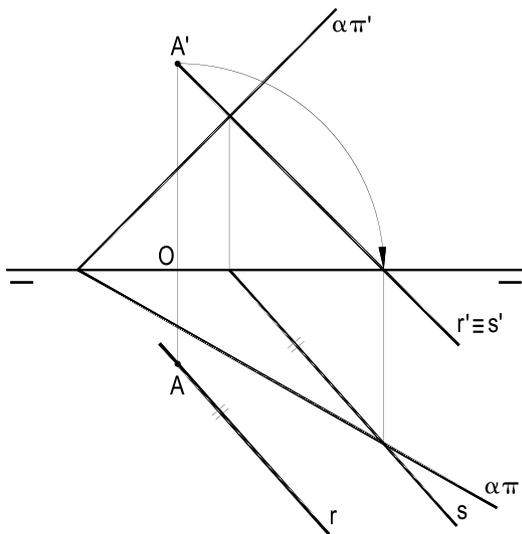


Figura 249

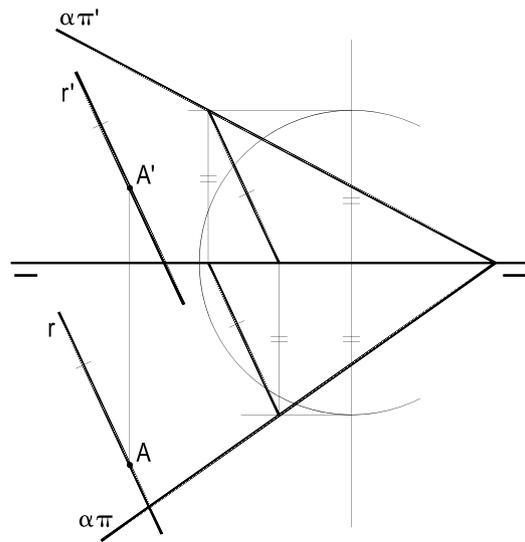


Figura 250

## 64 – Construção de uma reta paralela a dois planos secantes

Dados dos planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), por seus traços (Figuras 251 e 252), ou por pares de retas ( $a$ ) e ( $b$ ), um, e ( $c$ ) e ( $d$ ) o outro, (Figura 253), para construir, por um ponto dado ( $A$ ) a reta ( $r$ ) a eles paralela, basta construir a interseção ( $s$ ) desses dois planos, pois ( $r$ ) será a paralela a ( $s$ ) conduzida por ( $A$ ) (número 62).

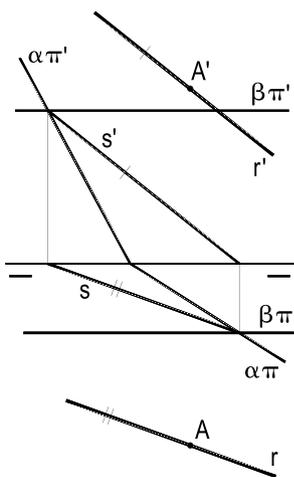


Figura 251

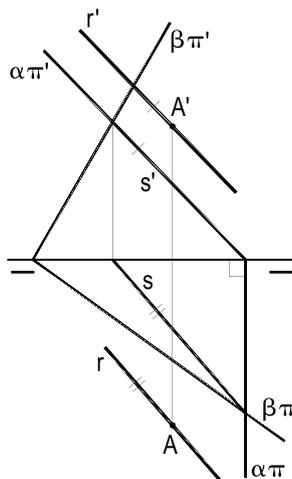


Figura 252

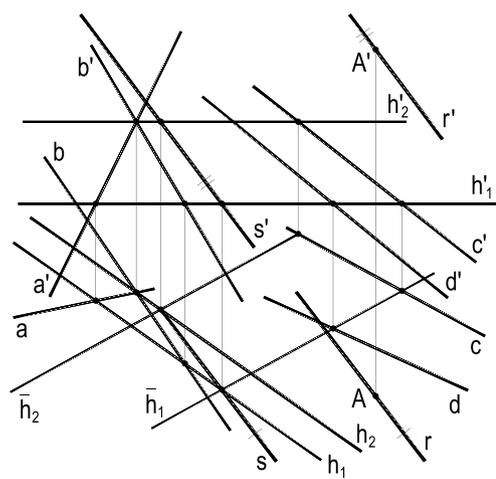


Figura 253

## 65 – Construção de um plano paralelo a uma reta

Vimos que é condição para que um plano seja paralelo a uma reta que ele contenha uma outra reta paralela àquela (número 62).

Assim, o problema direto consiste em, dados uma reta ( $r$ ) e um ponto ( $A$ ), exteriores, construir, por ( $A$ ), um plano ( $\alpha$ ) que seja paralelo a ( $r$ ), atendendo a alguma condição imposta.

Nos casos mais simples, além das duas projeções de ( $r$ ) e de ( $A$ ), é fornecida a direção de um dos traços de ( $\alpha$ ) (Figuras 254 e 255), ou é informado que ( $\alpha$ ) atende a alguma particularidade, como no caso da Figura 256, em que é estabelecido que ( $\alpha$ ) seja perpendicular a ( $\pi$ ).

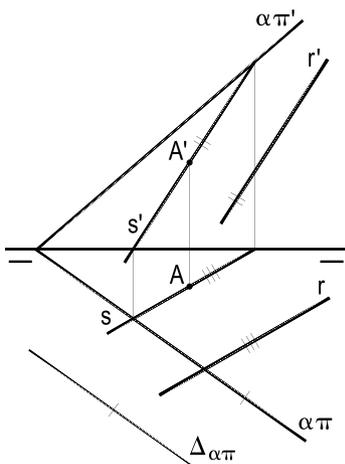


Figura 254

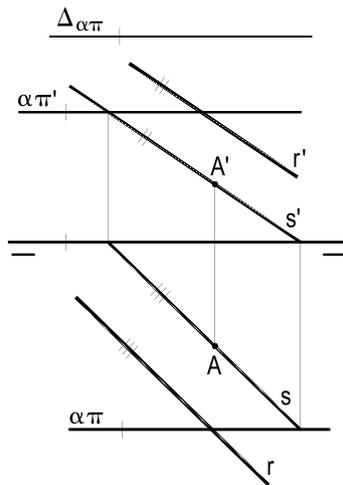


Figura 255

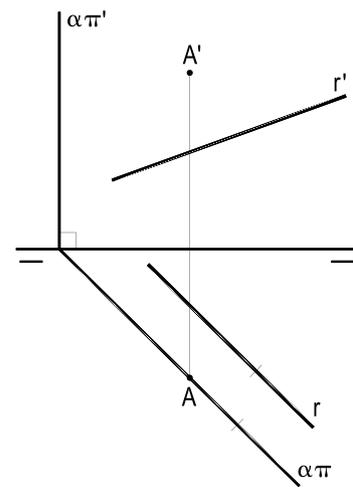


Figura 256

Em casos algo mais complexos, os dados são menos completos, seja com relação às projeções da reta ( $r$ ), ou do ponto ( $A$ ), seja quanto a informações sobre o plano ( $\alpha$ ) pedido. São assim os exemplos das Figuras 257, 258 e 259, em que, respectivamente, são dados  $r'$ ,  $r$ ,  $A'$  e  $\alpha\pi'$  (Figura 257),  $A'$ ,  $A$ ,  $r$  e  $\alpha\pi$  (Figura 258) e  $A'$ ,  $A$ ,  $r$  e  $\alpha\pi$  (Figura 259).

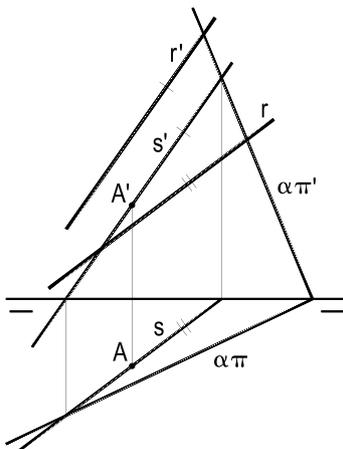


Figura 257

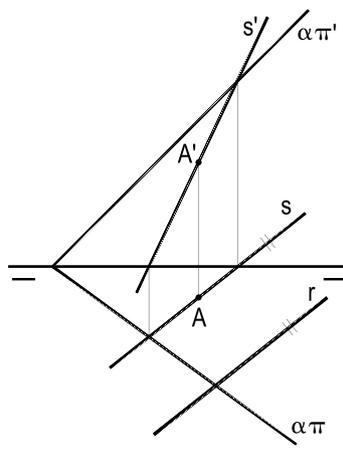


Figura 258

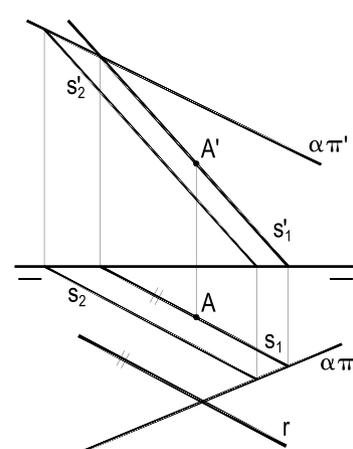


Figura 259

## 66 – Planos paralelos

É necessário, para que dois planos sejam paralelos, que um deles possua duas retas concorrentes paralelas a retas do outro (*Geometria Espacial*, número 11.4).

Assim, a condição natural para que dois planos quaisquer sejam paralelos é que seus traços de mesmo nome também o sejam (Figura 260), condição que, aliás, se repete para planos verticais (Figura 261) ou de topo. Para planos paralelos e pertencentes à linha de terra, o paralelismo fica assegurado pela existência, em cada um deles, de um par de retas quaisquer paralelas (Figura 262), ou pelo rebatimento de um corte de perfil (Figura 263), visto que todos possuem uma segunda direção comum – a fronto-horizontal.

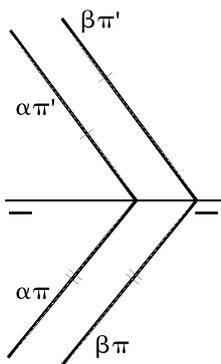


Figura 260

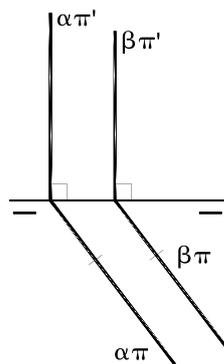


Figura 261

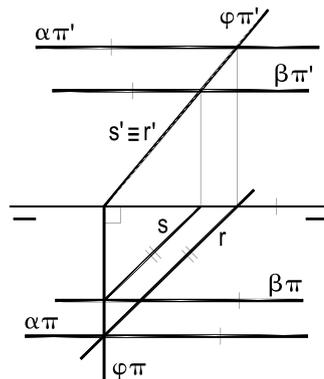


Figura 262

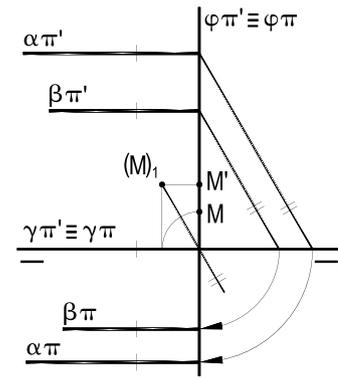


Figura 263

É claro que são sempre paralelos os planos horizontais, assim como os frontais e, igualmente, os de perfil.

## 67 – Construção de um plano paralelo a outro, pertencente a um ponto dado

O problema direto, qual seja traçar, por um ponto dado (A), um plano ( $\alpha$ ) paralelo a outro dado ( $\beta$ ), é bastante simples, especialmente quando o plano dado ( $\beta$ ) é projetante (Figuras 264, 265, 266 e 267).

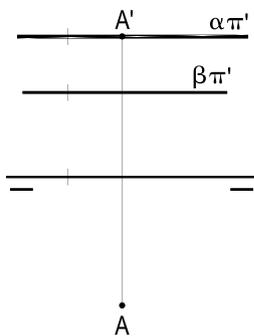


Figura 264

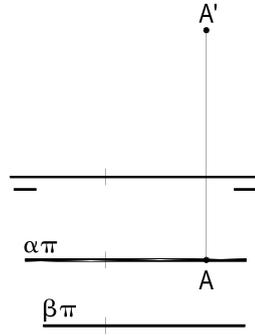


Figura 265

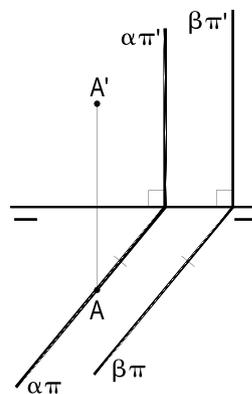


Figura 266

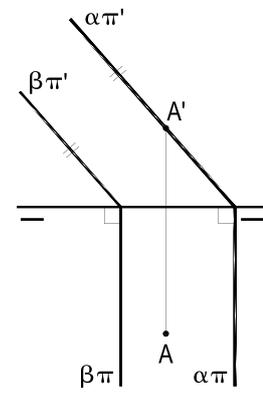


Figura 267

Para planos paralelos ou pertencentes à linha de terra, pode-se utilizar uma reta qualquer (Figuras 268 e 269), ou o rebatimento de um corte de perfil (Figura 270), para a obtenção dos traços do plano ( $\alpha$ ) procurado.

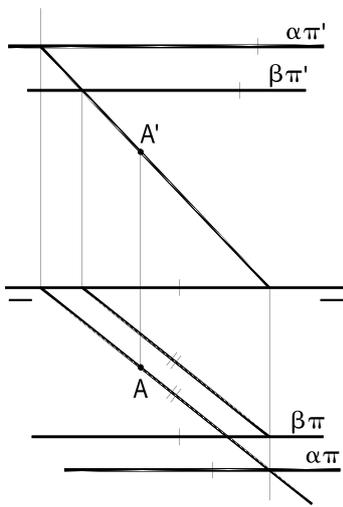


Figura 268

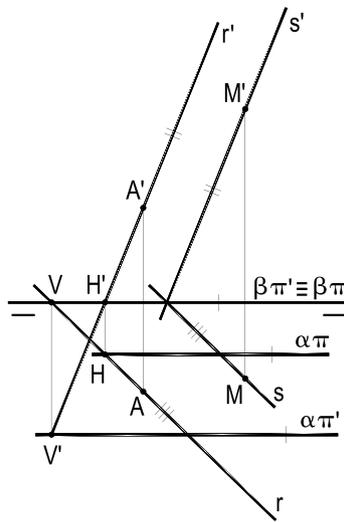


Figura 269

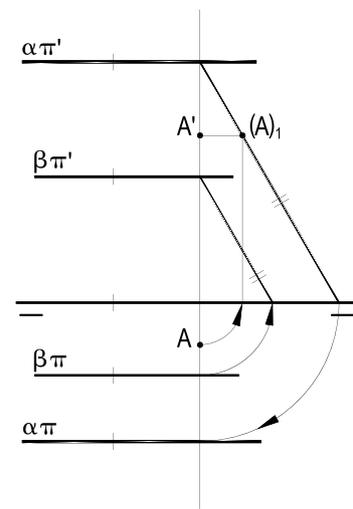


Figura 270

Para planos quaisquer, dados por duas retas paralelas (a) e (b) (Figura 271), ou por duas concorrentes (c) e (d) (Figura 272), preferencialmente deve-se trabalhar com as principais do plano dado ( $\beta$ ), para obter os traços de ( $\alpha$ ). No exemplo da Figura 271, foi utilizada a horizontal ( $h_2$ ), pertencente a (A) e paralela a ( $h_1$ ), do plano dado; no caso apresentado na Figura 272, estas duas horizontais têm cotas iguais.

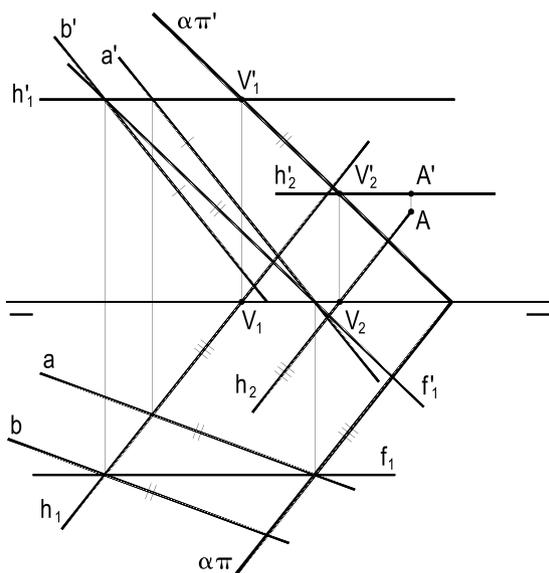


Figura 271

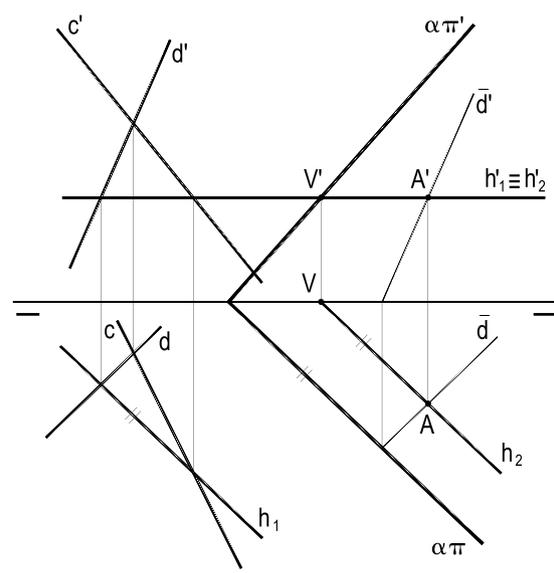


Figura 272

## 68 – Planos paralelos aos bissetores

Todos os planos paralelos a qualquer dos dois bissetores são, naturalmente, paralelos à linha de terra e, por se inclinarem igualmente em relação aos dois planos de projeções, oferecem diversas peculiaridades, como passamos a detalhar.

### 68.1 – Planos paralelos a $(\beta_{24})$ .

Analisando o corte de perfil (Figura 273), visto que o triângulo  $(V)_1J(H)_1$  é retângulo e isósceles, fica fácil concluir, para todo plano paralelo ao bissetor par, que:

- em écura, seus traços são simétricos em relação à linha de terra (Figura 273);
- todos os seus pontos possuem a mesma soma entre cota e afastamento. De fato, no triângulo retângulo e isósceles  $J(V)_1(H)_1$ , para um ponto  $(A)$  qualquer do plano, temos  $m = y$  e  $n = z$  (Figura 273) e, então,  $z + y = n + m$  constante;
- O valor constante, para todos os pontos do plano, da soma de cota e afastamento é, naturalmente, igual à cota do traço vertical do plano e ao afastamento de seu traço horizontal (Figuras 273 e 274);
- por isso, para obter os traços de um plano  $(\alpha)$  paralelo a  $(\beta_{24})$  e pertencente a um ponto dado  $(A)$ , nem é preciso recorrer ao corte de perfil, bastando utilizar, apenas, a distância entre as projeções desse ponto  $(A)$  (Figuras 275 e 276).

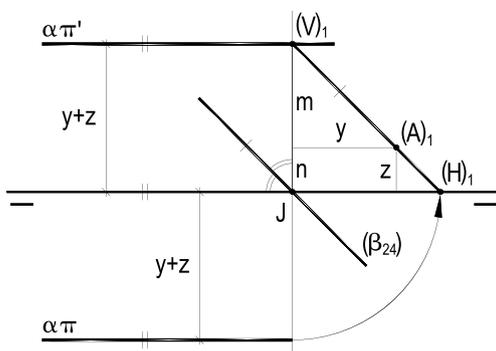


Figura 273

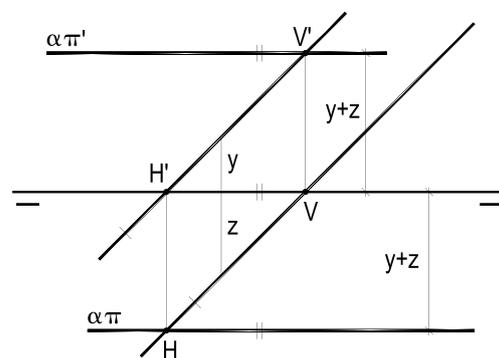


Figura 274

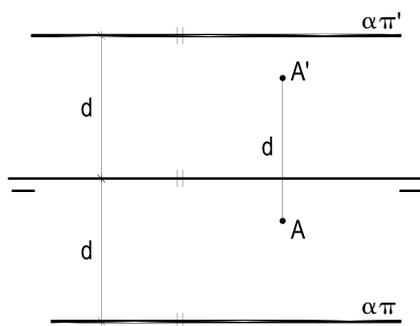


Figura 275

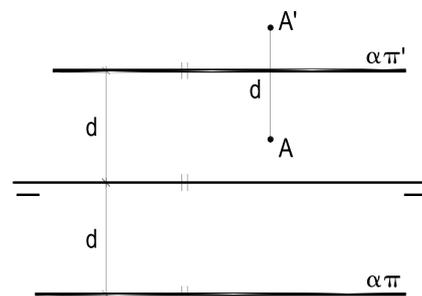


Figura 276

68.2 – Planos paralelos a  $(\beta_{13})$ .

Apreciando o corte de perfil (Figura 277) e observando que o triângulo retângulo  $(V)_1J(H)_1$  é isósceles, conclui-se que para todo ponto (A) do plano  $(\alpha)$ , paralelo a  $(\beta_{13})$ , operando com valores absolutos,  $z + y = m + n$ . E como essas duas coordenadas têm sinais opostos, agora é a diferença entre elas que se mantém constante para todos os pontos do plano.

Assim, todo plano  $(\alpha)$  paralelo ao bisetor ímpar:

- tem, em épura, traços coincidentes (Figura 277);
- tem constante, para todos os seus pontos, a diferença entre cota e afastamento (Figuras 277 e 278);
- tem, para todos os seus pontos, em épura, iguais as distâncias de uma projeção aos traços coincidentes e da outra à linha de terra (Figura 278).

Esta propriedade, exclusiva para os pontos pertencentes a planos paralelos a  $(\beta_{13})$ , permite, rapidamente, construir os traços de um plano paralelo ao bisetor ímpar e pertencente a um ponto dado por suas projeções, como exemplificado, na Figura 279, para os planos  $(\alpha)$ ,  $(\gamma)$  e  $(\varphi)$ , todos paralelos a  $(\beta_{13})$ , respectivamente pertencentes aos pontos (A), (B) e (C).

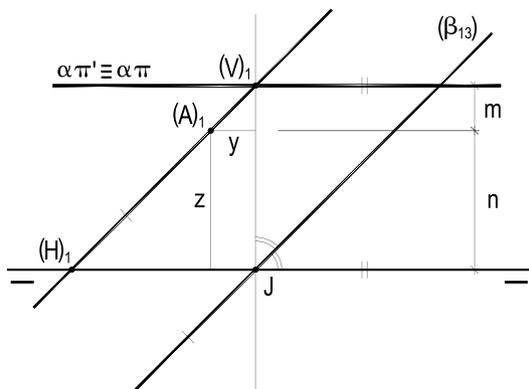


Figura 277

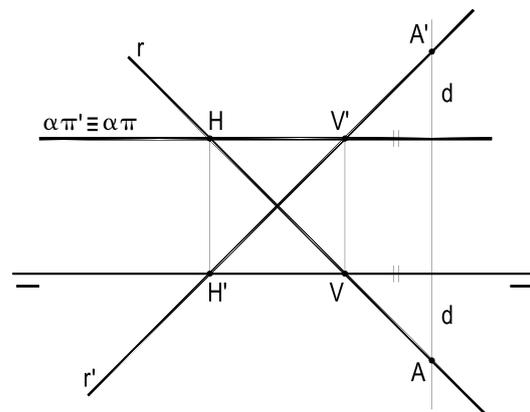


Figura 278

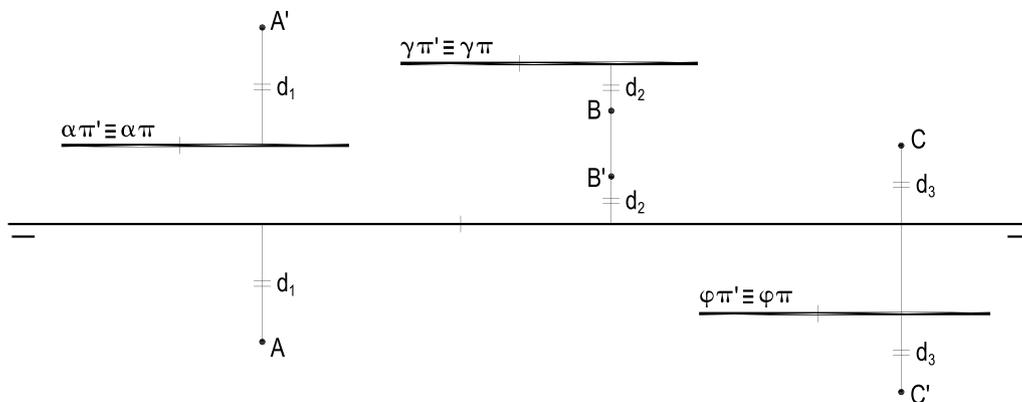


Figura 279

## 69 – Retas reversas

Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 5) que duas retas podem não admitir qualquer plano que as contenha simultaneamente, por não serem nem paralelas nem concorrentes. São, então, ditas não coplanares, reversas ou revesas.

Sabe-se também (*Geometria Espacial*, número 15.2) que existe, sempre, um plano ( $\alpha$ ), pertencente a um ponto ( $A$ ) e paralelo simultaneamente a duas retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), que não pertençam a ( $A$ ) (Figura 280). É aquele que, passando por ( $A$ ), contém as retas ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ), respectivamente, paralelas a ( $r$ ) e a ( $s$ ) (Figura 280).

Sabe-se também (*Geometria Espacial*, número 14) que, dadas duas retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), é, sempre, possível conduzir por elas um par de planos paralelos ( $\beta$ ) e ( $\gamma$ ), contendo cada uma delas e uma paralela à outra, por um ponto qualquer de cada uma das reversas (Figura 282).

As épuras das Figuras 281 e 283 retratam, respectivamente, a construção de um plano ( $\alpha$ ) paralelo a duas reversas dadas ( $r$ ) e ( $s$ ), por um ponto exterior ( $A$ ), também dado, e as obtenções de dois planos paralelos, contendo cada um, uma de duas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), dadas.

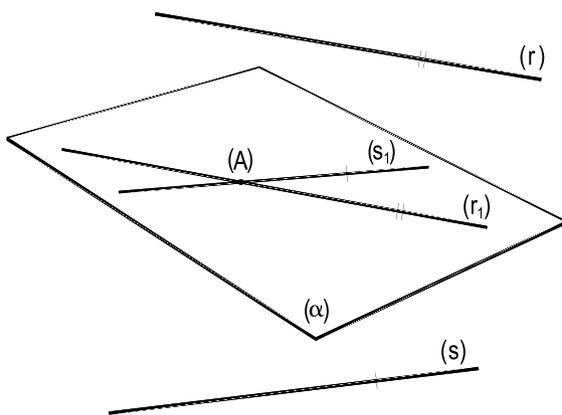


Figura 280

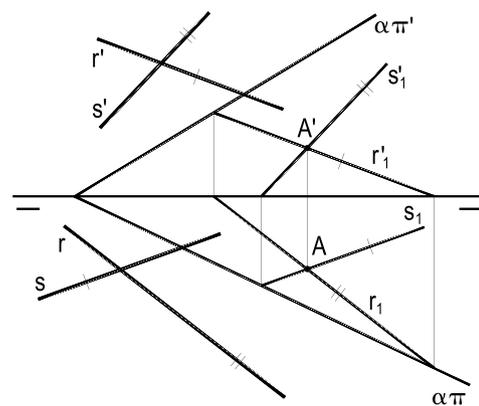


Figura 281

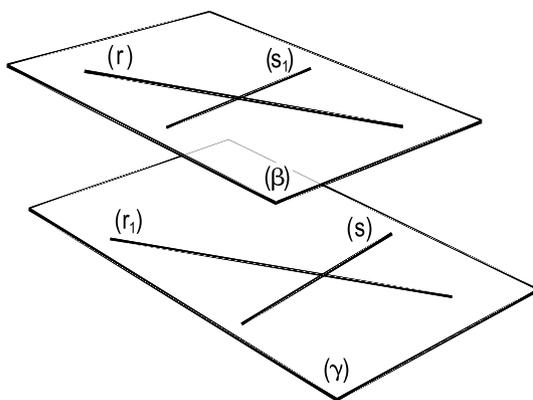


Figura 282

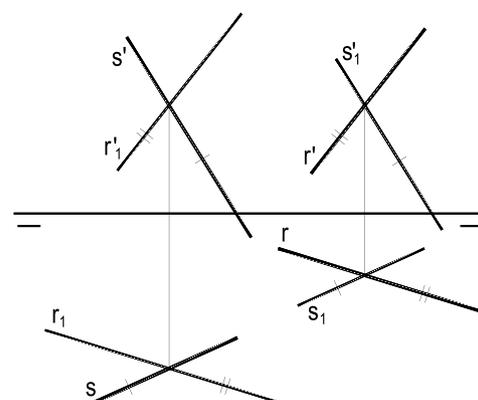


Figura 283

## 70 – Construção de uma reta concorrente com duas reversas

Um problema de grande assiduidade, na Geometria Descritiva, consiste em, dadas duas retas reversas, apoiar, nelas, uma terceira, que atenda a determinadas condições.

Trata-se, assim, de construir uma terceira reta, concorrente com cada uma das duas reversas dadas, de modo tal que ela obedeça às condições impostas.

O procedimento usual para resolver tais questões consiste em construir a superfície, habitualmente plana, mas nem sempre, como logo veremos, lugar geométrico das retas que, apoiando-se numa das reversas dadas, atenda às condições estabelecidas para a reta procurada e, determinada tal superfície, buscar o(s) ponto(s) de interseção da segunda reversa dada com esta superfície, que será um primeiro ponto da reta solução. A construção desta reta será, então, imediata.

Passemos a exemplificar este procedimento, com as proposições seguintes:

70.1 – Apoiar em duas retas reversas dadas ( $r$ ) e ( $s$ ) uma reta ( $t$ ), que passe por um ponto dado ( $A$ ) exterior a ( $r$ ) e a ( $s$ ).

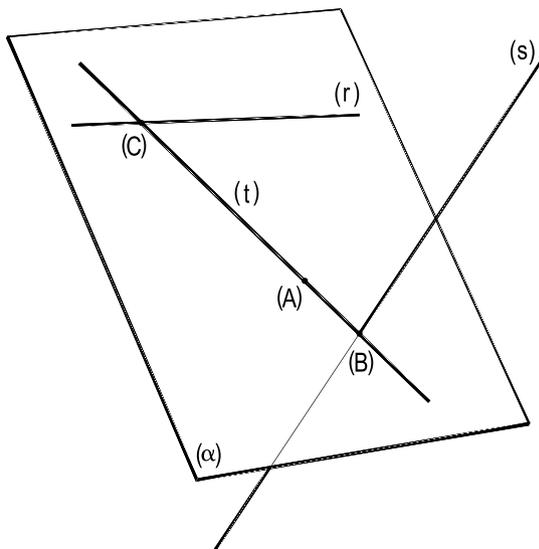


Figura 284

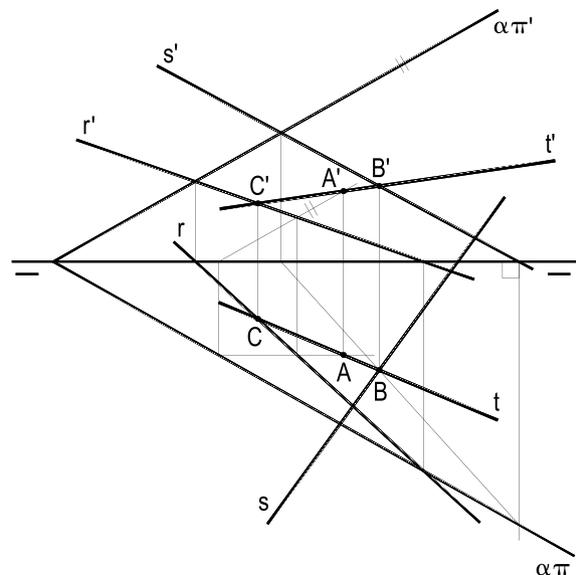


Figura 285

Atendendo aos procedimentos genéricos acima descritos, definamos, inicialmente, o lugar geométrico das retas que passam pelo ponto dado ( $A$ ) e que se apoiam na reversa dada ( $r$ ), que é o plano ( $\alpha$ ) (Figuras 284 e 285) e, em seguida, determinemos o traço ( $B$ ) da outra reversa ( $s$ ) com este plano ( $\alpha$ ).

A união de ( $B$ ) a ( $A$ ) define a reta ( $t$ ) procurada, que, pertencendo ao plano ( $\alpha$ ), tem de concorrer com ( $r$ ), tal como proposto.

70.2 – Apoiar em duas retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ) uma reta ( $t$ ), paralela a uma terceira reversa ( $d$ ).

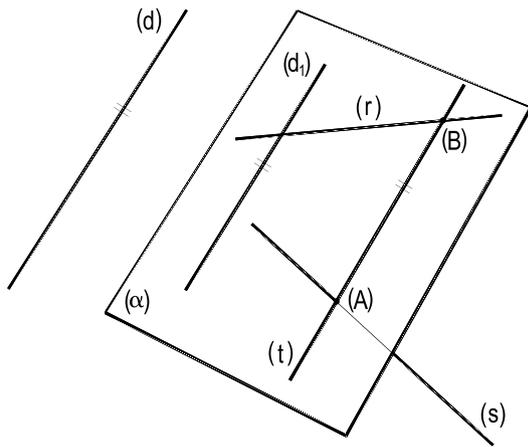


Figura 286

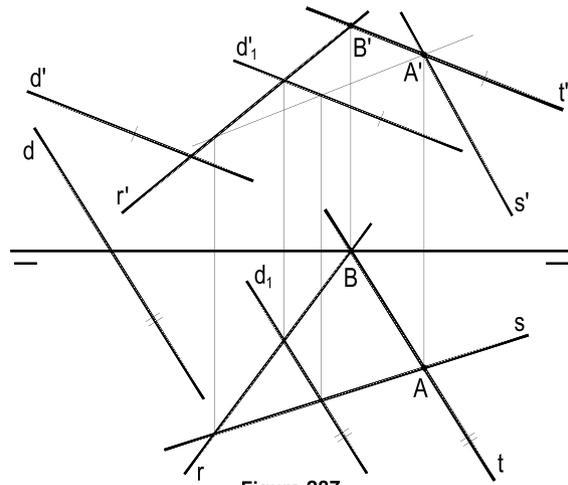


Figura 287

Constrói-se o plano ( $\alpha$ ) com uma das reversas ( $r$ ) e uma paralela ( $d_1$ ) à terceira reversa dada ( $d$ ) (Figuras 286 e 287).

O traço ( $A$ ) de ( $s$ ) em ( $\alpha$ ) é um primeiro ponto da reta ( $t$ ) procurada, que será, então, facilmente construída, por ser paralela a ( $d$ ).

70.3 – Dadas três retas reversas ( $r$ ), ( $s$ ) e ( $t$ ), pede-se construir o segmento ( $A$ )( $B$ ), tal que ( $A$ ) e ( $B$ ) pertençam, respectivamente, a ( $r$ ) e a ( $s$ ) e que seu ponto médio pertença a ( $t$ ).

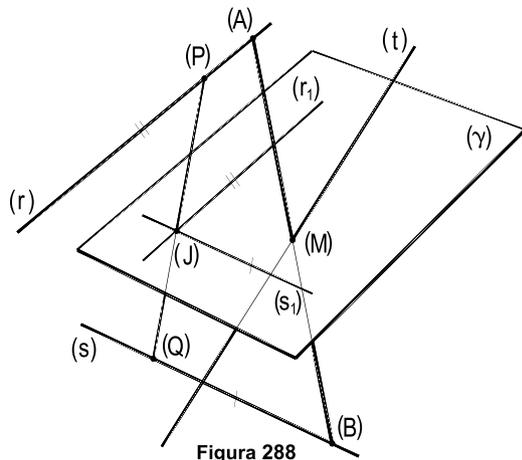


Figura 288

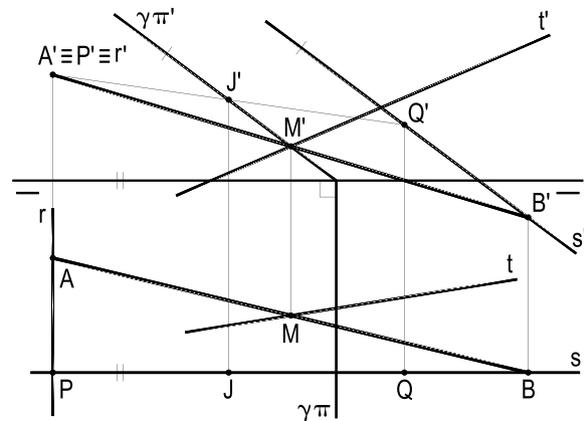


Figura 289

Constrói-se, inicialmente, o plano ( $\gamma$ ), paralelo a ( $r$ ) e a ( $s$ ), pelo ponto ( $J$ ), médio de um segmento qualquer ( $P$ )( $Q$ ) apoiado em ( $r$ ) e ( $s$ ) (Figuras 288 e 289).

Determina-se, então, o traço ( $M$ ) de ( $t$ ) em ( $\gamma$ ), recaindo-se, então, no primeiro exemplo anterior (número 70.1).

# CAPÍTULO VII

## ORTOGONALIDADE

### 71 – Reta perpendicular a um plano

O teorema do ângulo reto (*Geometria Espacial*, número 42) assegura que a projeção ortogonal de um ângulo reto sobre um plano se faz em verdadeira grandeza desde que pelo menos um de seus lados seja paralelo e o outro não seja perpendicular àquele plano (Figura 290).

Assim, uma reta ( $r$ ) perpendicular a um plano qualquer ( $\alpha$ ), por ser perpendicular, ou ortogonal, às horizontais de ( $\alpha$ ), apresenta tal ortogonalidade em projeção horizontal (Figuras 291 e 292), o que se repete, agora em projeção vertical, entre ( $r$ ) e as frontais de ( $\alpha$ ) (Figuras 293 e 294).

Em resumo, então, em geral, é condição necessária e suficiente para que uma reta ( $r$ ) seja perpendicular a um plano ( $\alpha$ ) que as projeções de ( $r$ ) sejam perpendiculares aos traços de mesmo nome do plano (Figura 295).

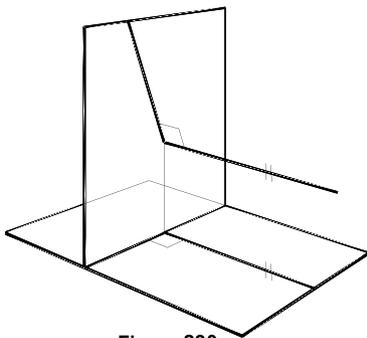


Figura 290

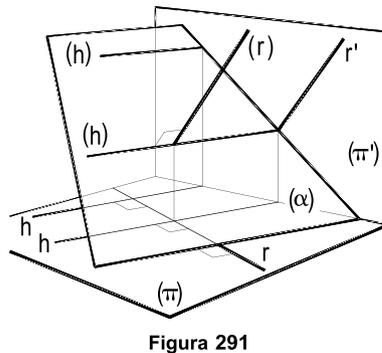


Figura 291

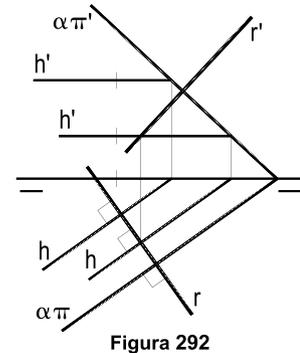


Figura 292

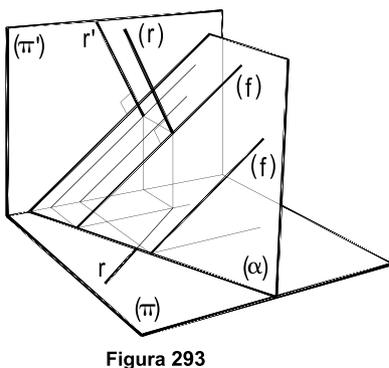


Figura 293

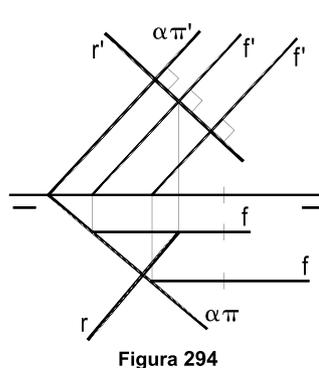


Figura 294

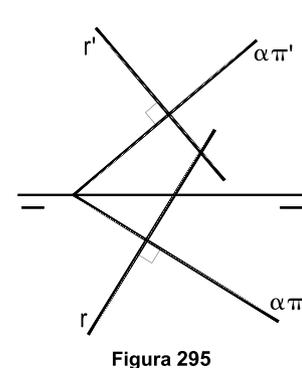


Figura 295

Tal condição, válida para os planos quaisquer, aplica-se, também, naturalmente, aos planos projetantes (Figuras 296, 297, 298, 299 e 300), mas, em relação aos planos paralelos (Figura 301) ou pertencentes (Figura 302) à linha de terra, a suficiência só é assegurada mediante o rebatimento de um corte de perfil.

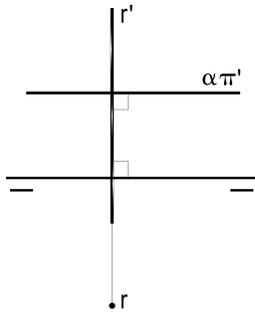


Figura 296

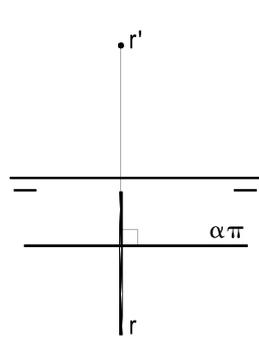


Figura 297

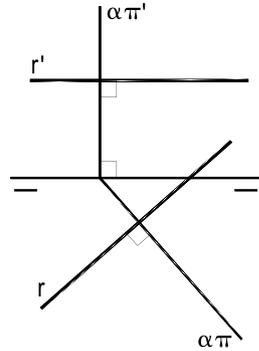


Figura 298

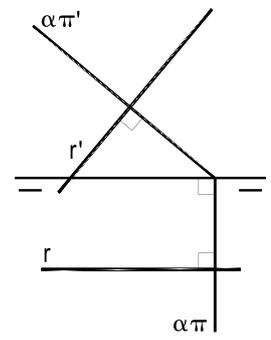


Figura 299

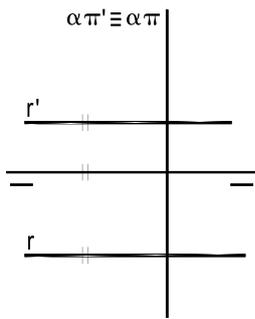


Figura 300

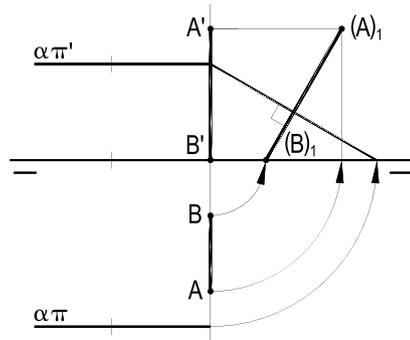


Figura 301

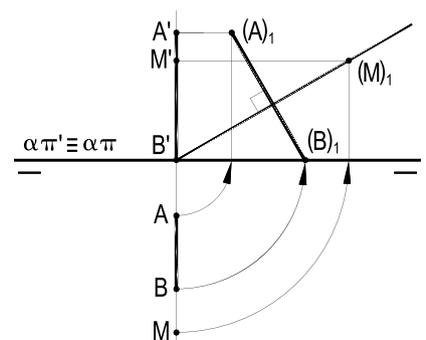


Figura 302

Assim, a construção da perpendicular a um plano dado é imediata, mesmo que com o auxílio de um corte de perfil.

E, para planos quaisquer não dados por seus traços, basta utilizar as principais do plano para tal construção (Figuras 303 e 304).

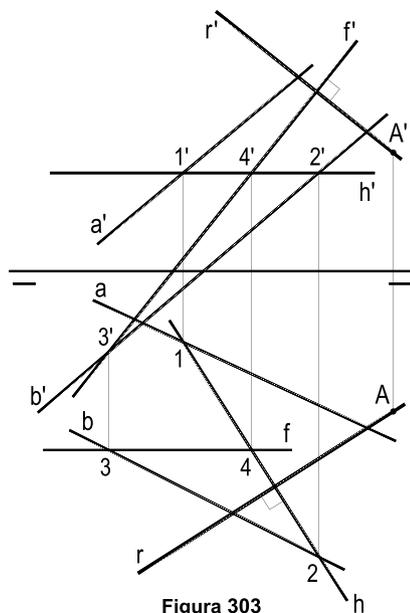


Figura 303

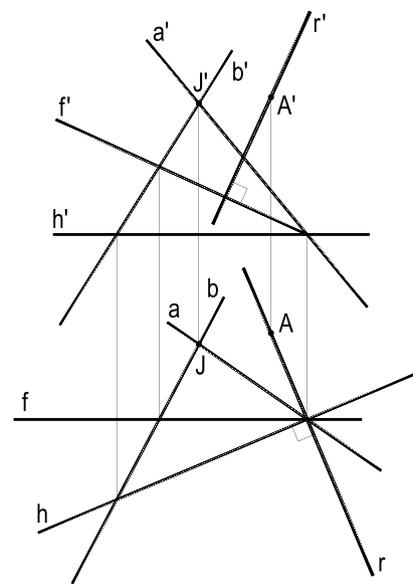


Figura 304

## 72 – Plano perpendicular a uma reta

A determinação dos traços de um plano ( $\alpha$ ), pertencente a um ponto dado (P) e perpendicular a uma reta dada (r), é bem simples. Quando a reta é paralela a pelo menos um dos planos de projeção, o plano tem de ser projetante, o que torna imediata a construção (Figuras 305, 306, 307, 308 e 309); quando a reta dada (A)(B) é de perfil (Figura 310), um corte de perfil dá solução à questão e, enfim, quando a reta dada (r) é qualquer, a utilização de uma (Figura 311) ou das duas principais do plano (Figura 312) proporciona a construção do plano procurado ( $\alpha$ ).

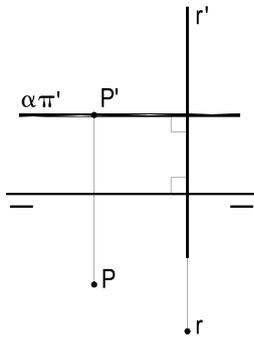


Figura 305

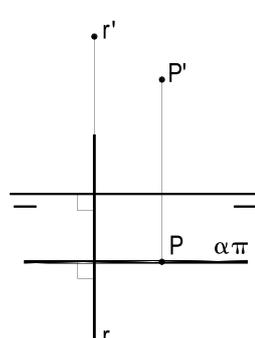


Figura 306

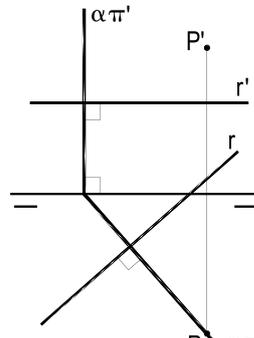


Figura 307

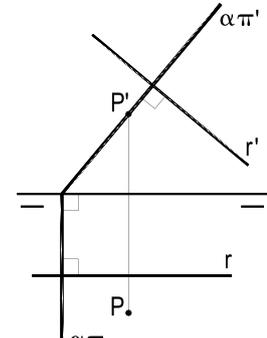


Figura 308

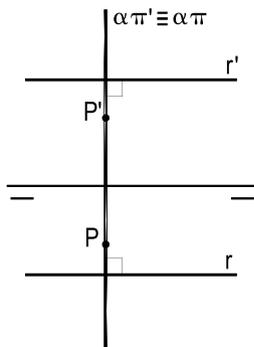


Figura 309

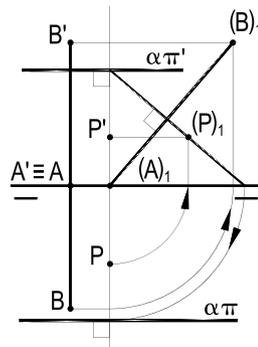


Figura 310

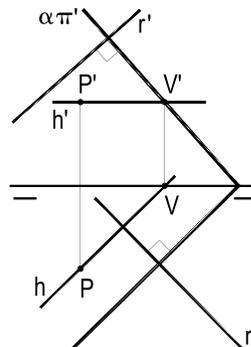


Figura 311

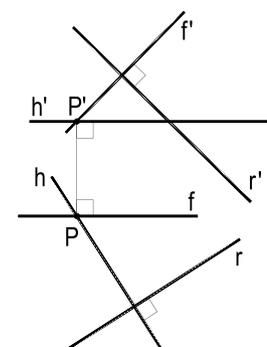


Figura 312

## 73 – Retas ortogonais

Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 23.4) que o lugar geométrico das retas (t), que pertencem a um ponto (A), exterior a (r), e que são ortogonais a (r), é o plano ( $\alpha$ ), pertencente a (A) e perpendicular a (r), exceto a reta (A)(B), que une o ponto dado (A) ao traço (B) de (r) com ( $\alpha$ ) (Figura 313), visto que (A)(B), ao invés de ortogonal, é perpendicular a (r).

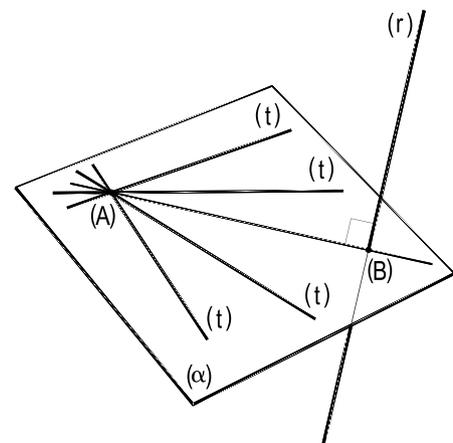


Figura 313

Assim, para construir, por um ponto dado (A), uma reta (t) ortogonal a uma reta dada (r), que atenda a alguma condição imposta, deve-se construir o plano ( $\alpha$ ) pertencente a (A) e perpendicular a (r) e buscar, nele, a(s) reta(s) que atenda(m) à tal condição, como a seguir exemplificaremos:

73.1 – Dados o ponto (A), a reta (r) e o plano ( $\gamma$ ), todos exteriores, deseja-se construir a reta (t) pertencente a (A), ortogonal a (r) e paralela a ( $\gamma$ ).

Solução: Constrói-se o plano ( $\alpha$ ) que, contendo (A), seja perpendicular a (r), bem como a interseção (s) de ( $\alpha$ ) com o plano dado ( $\gamma$ ), à qual a reta procurada (t) deve ser paralela (Figuras 314 e 315).

(t) será, então, a paralela a (s) conduzida por (A).

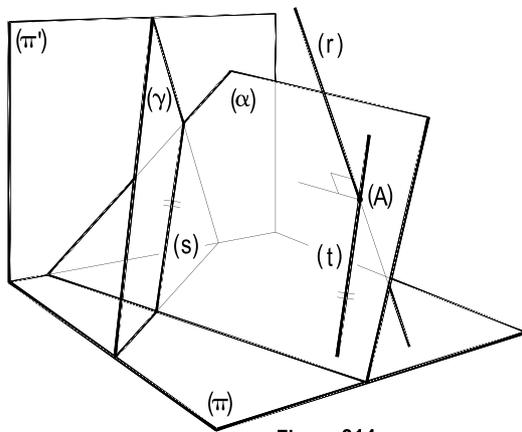


Figura 314

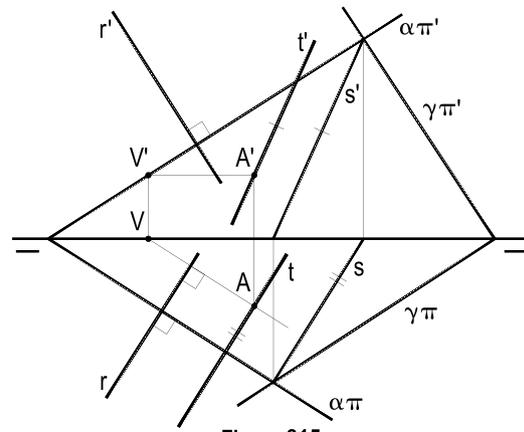


Figura 315

73.2 – Dados o ponto (A) e a reta (r), exteriores, pede-se construir as projeções de reta (t), pertencente a (A), ortogonal a (r) e concorrente com a linha de terra.

Solução: Construído o plano ( $\alpha$ ), pertencente a (A) e perpendicular a (r), a reta (t) pedida há de ser a formada por (A) e pelo ponto (J), traço de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'\pi$ ) (Figuras 316 e 317).

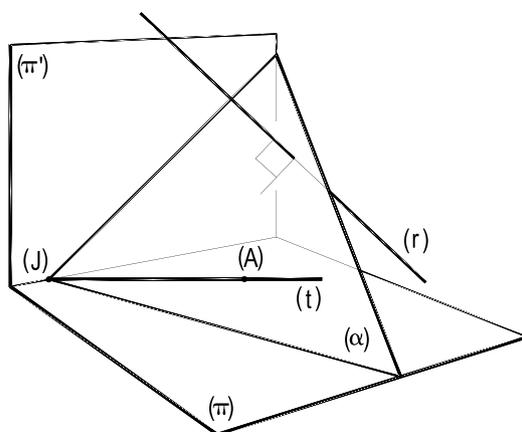


Figura 316

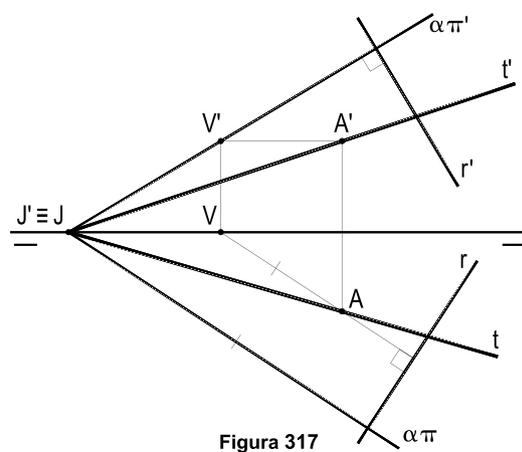


Figura 317

73.3 – Dados o ponto (A) e as retas reversas (r) e (s), busca-se construir a reta (t), pertencente a (A) e ortogonal às duas reversas dadas.

Solução: Segundo o raciocínio padrão, basta construir os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), ambos pertencentes a (A) e respectivamente perpendiculares a (r) e a (s) (Figuras 318 e 319). Sua interseção há de ser a reta (t) procurada.

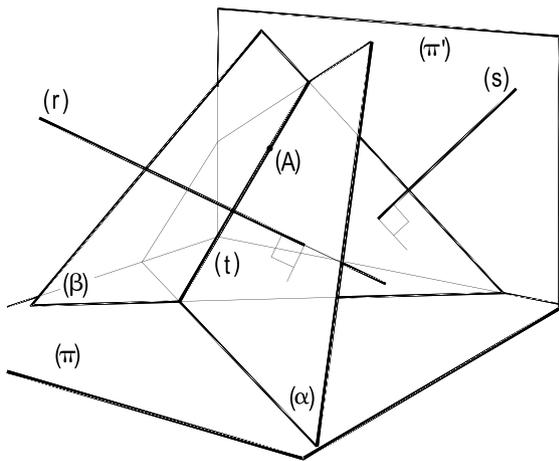


Figura 318

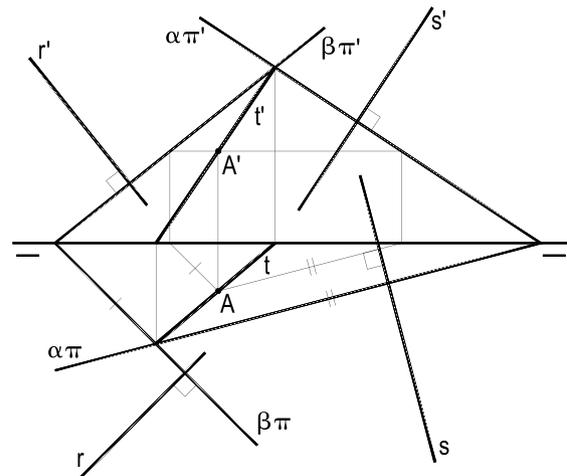


Figura 319

Uma alternativa, bem simples, para resolver esta questão, consiste em construir um plano ( $\theta$ ), contendo uma das reversas dadas (r) e uma paralela ( $s_1$ ) à segunda, e conduzir, pelo ponto dado (A), a perpendicular (t) a ( $\theta$ ), que será a reta pedida (Figuras 320 e 321).

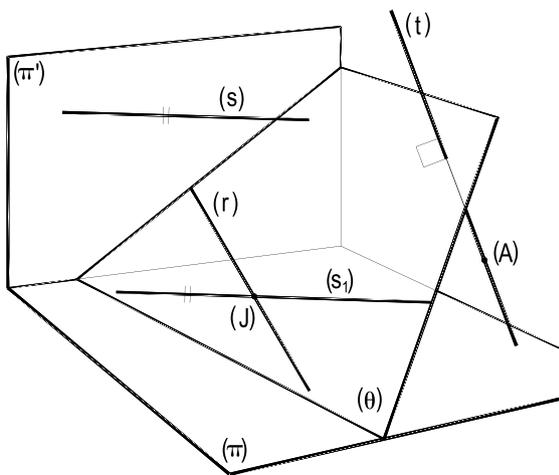


Figura 320

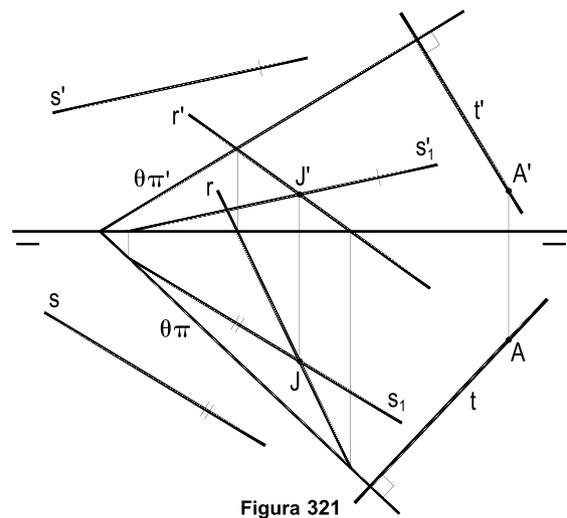


Figura 321

Observe-se que o ponto (J) foi arbitrariamente escolhido, sobre (r), visto que o que se deseja é, apenas, a direção do plano ( $\theta$ ).

## 74 – Planos perpendiculares

Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 40) que a condição suficiente para que um plano ( $\alpha$ ) seja perpendicular a outro ( $\theta$ ) é que ( $\alpha$ ) contenha uma reta ( $r$ ) perpendicular a ( $\theta$ ) (Figura 322).

Consideremos, então, um plano qualquer ( $\theta$ ) e uma reta ( $r$ ) a ele perpendicular e, fazendo um ponto ( $J$ ) descrever a linha de terra, observemos os diversos planos ( $\alpha$ ), formados por ( $r$ ) e pelos vários pontos ( $J$ ), arbitrados (Figura 323). Todos esses planos ( $\alpha$ ) serão perpendiculares a ( $\theta$ ) e, em quase sua totalidade, os pares de planos perpendiculares ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ) não apresentam, em *épura*, traços de mesmo nome perpendiculares.

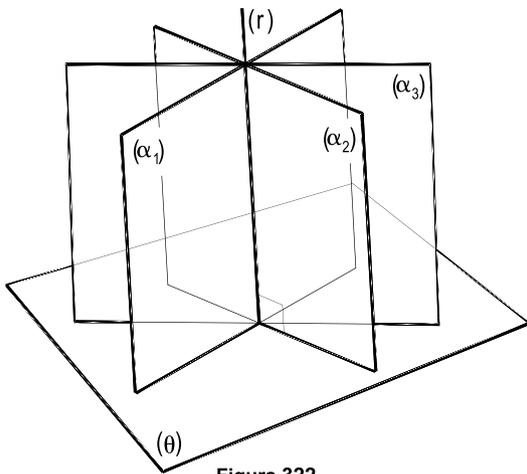


Figura 322

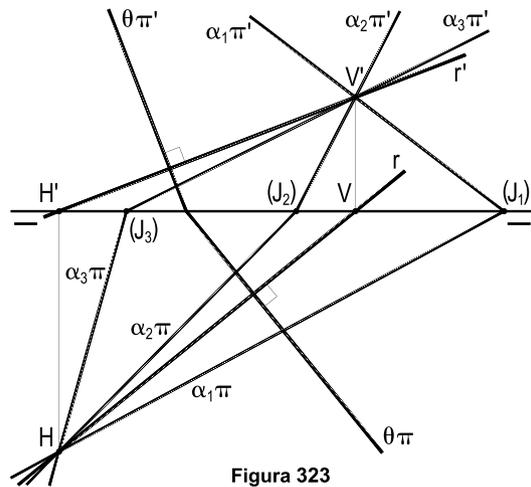


Figura 323

Tal perpendicularidade, entre traços de mesmo nome, só ocorrerá quando, em posições muito particulares, o ponto ( $J$ ) vier a coincidir com a projeção horizontal  $V$ , ou com a projeção vertical  $H'$  dos traços ( $V$ ) e ( $H$ ) da reta ( $r$ ) considerada (Figuras 324 e 325), pois, nestas posições, o plano ( $\alpha$ ) estudado, perpendicular a ( $\theta$ ), há de ser, respectivamente, vertical (Figura 324) ou de topo (Figura 325).

Nestes dois casos, um par de traços de mesmo nome apresenta tal perpendicularidade. Mas, apenas um par.

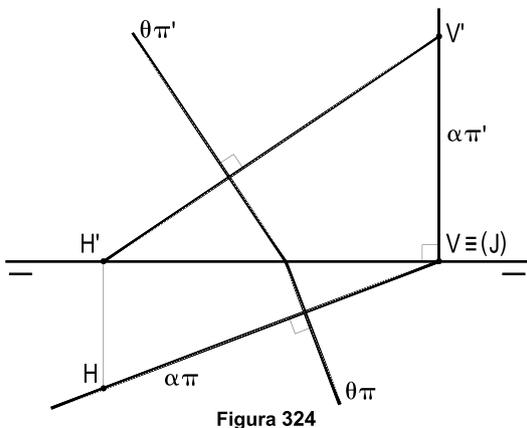


Figura 324

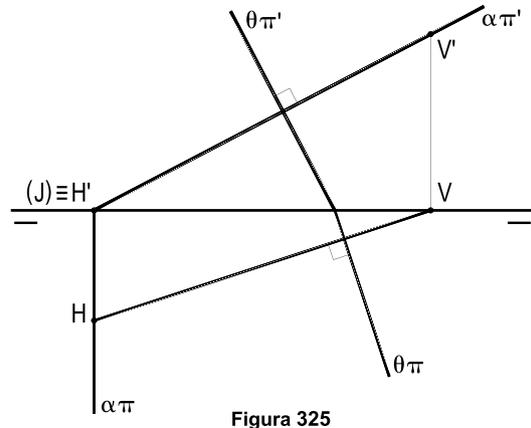


Figura 325

Naturalmente, quando os dois planos perpendiculares ( $\alpha$ ) e ( $\theta$ ) são ambos projetantes em relação a ( $\pi$ ) (Figuras 326 e 327), ou a ( $\pi'$ ) (Figuras 328 e 329), seus traços de mesmo nome, relativos ao plano de projeção a que são perpendiculares, apresentam-se perpendiculares, em é pura.

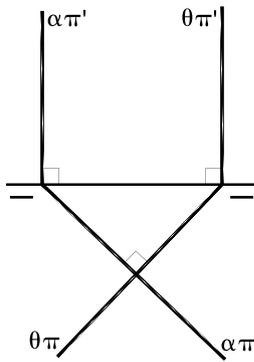


Figura 326

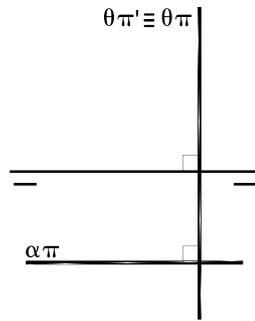


Figura 327

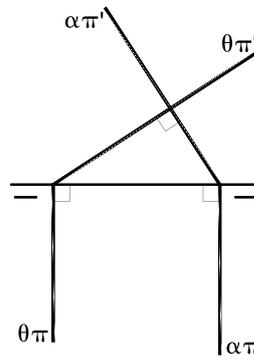


Figura 328

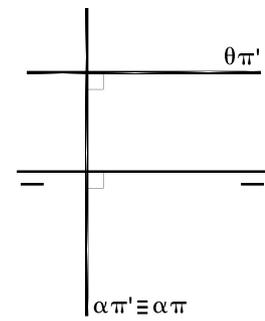


Figura 329

E, para planos paralelos ou pertencentes à linha de terra, é num corte de perfil que se asseguram as perpendicularidades (Figuras 330 e 331), visto que tais planos são sempre perpendiculares aos planos de perfil.

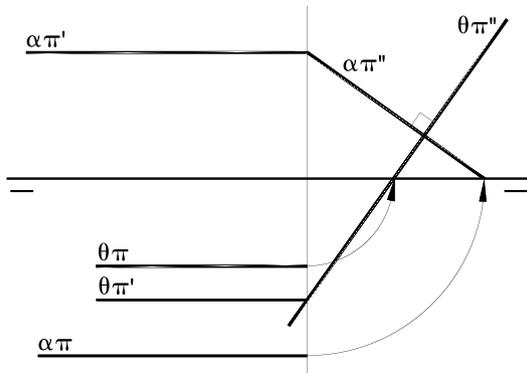


Figura 330

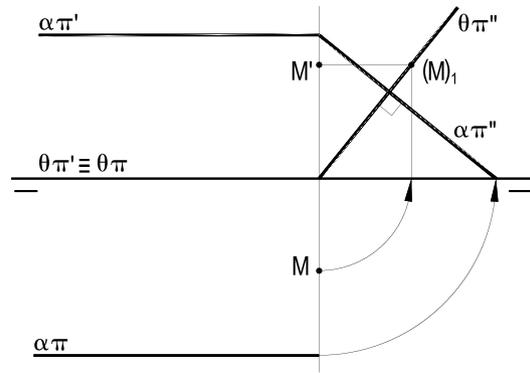


Figura 331

O plano ( $\theta$ ) da Figura 331 é o ( $\pi'\pi$ ) - ( $M$ ).

## 75 – Construção de plano perpendicular a outro plano dado

Para construir um plano ( $\alpha$ ) pertencente a um ponto dado ( $A$ ) e perpendicular a outro plano dado ( $\theta$ ), obedecendo a condições impostas, deve-se iniciar traçando, por ( $A$ ), a perpendicular ( $p$ ) a ( $\theta$ ), à qual deverá pertencer o plano ( $\alpha$ ) procurado (número 74). A utilização das condições impostas proporcionará a solução da questão, tal como passamos a exemplificar.

75.1 – Construir os traços do plano ( $\alpha$ ), pertencente ao ponto dado ( $A$ ) e perpendicular ao plano dado ( $\theta$ ), sabendo que os traços de ( $\alpha$ ) formam, em é pura,  $90^\circ$  entre si.

Solução: Para ser perpendicular a  $(\theta)$ , o plano procurado  $(\alpha)$  deve conter a reta  $(p)$ , perpendicular a  $(\theta)$ , traçada por  $(A)$ . E, para atender à condição imposta, o ponto  $(J)$ , comum a  $\alpha\pi'$  e a  $\alpha\pi$ , há de pertencer à circunferência de diâmetro  $V'H$  (*Geometria Plana*, número 128.2), havendo duas soluções (Figura 332).

75.2 – Dados, por suas projeções, o ponto  $(A)$  e as retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$ , pede-se determinar o traço com o bisetor par do plano  $(\alpha)$ , pertencente a  $(A)$  e perpendicular ao plano das duas concorrentes, sabendo que  $(\alpha)$  é paralelo à linha de terra.

Solução: O plano  $(\alpha)$  ficará precisamente definido pela fronto-horizontal que contém  $(A)$  e pela reta  $(p)$ , traçada por  $(A)$ , perpendicularmente ao plano das duas concorrentes dadas, o que se consegue com o auxílio das principais  $(h)$  e  $(f)$  desse plano (Figura 333).

O traço de  $(\alpha)$  com  $(\beta_{24})$  há de ser a fronto-horizontal  $(t)$  conduzida pelo traço  $(P)$  da reta  $(p)$  com esse bisetor.

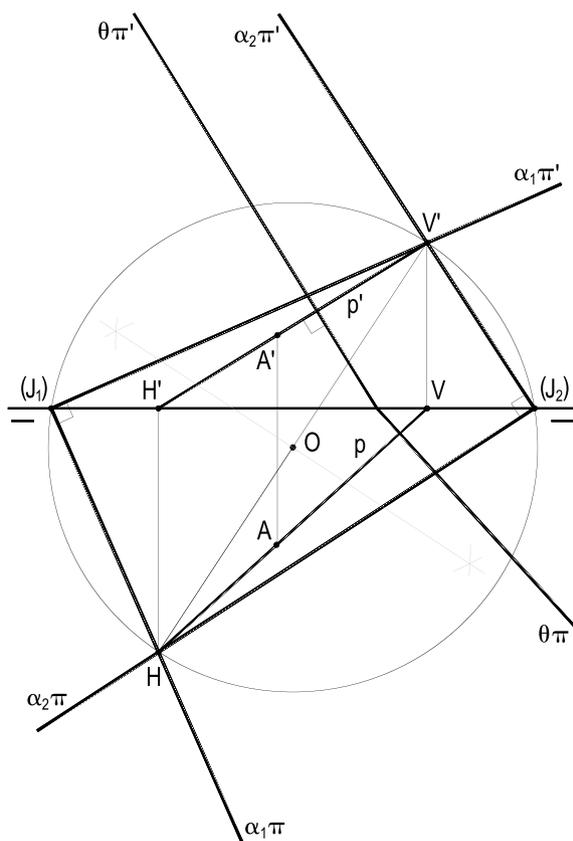


Figura 332

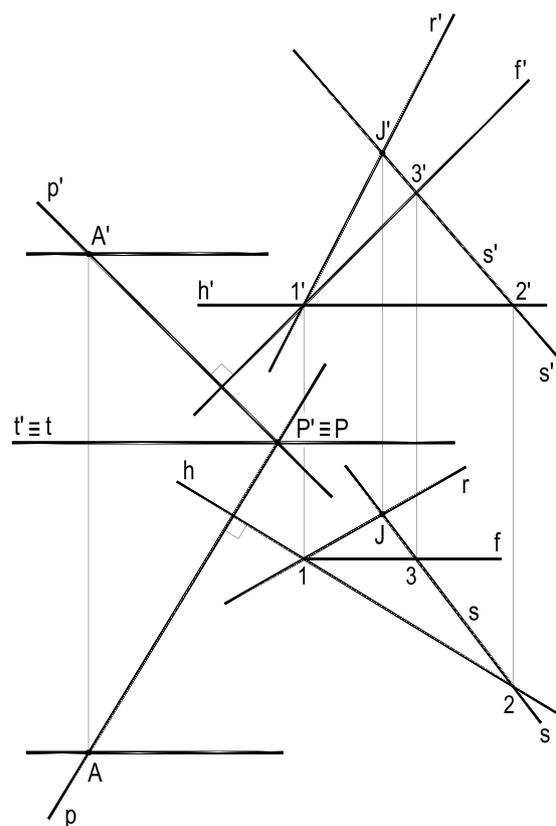


Figura 333

## 76 – Retas perpendiculares aos bissetores

As retas perpendiculares a qualquer dos bissetores e, de um modo geral, a todos os planos  $(\pi'\pi) - (M)$ , são retas de perfil, por terem de ser ortogonais ou perpendiculares à linha de terra, devendo, por isso (*Geometria Espacial*, número 23.4), pertencer a um plano perpendicular a  $(\pi'\pi)$ , além de terem de ser oblíquas a  $(\pi')$  e a  $(\pi)$ .

Em especial, as perpendiculares a qualquer dos bissetores, por formarem ângulos iguais a  $45^\circ$  com ambos os planos de projeção, têm de ter projeções iguais, já que os triângulos retângulos  $(J)_1(A)_1(B)_1$  e  $(L)_1(C)_1(D)_1$  (Figuras 334 e 335) são isósceles.

Então, se orientarmos os segmentos  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$ , respectivamente perpendiculares a  $(\beta_{13})$  e a  $(\beta_{24})$ , teremos:

- os segmentos  $\overrightarrow{AB}$  perpendiculares a  $(\beta_{13})$  apresentam projeções iguais e de sentidos iguais (Figura 334);
- os segmentos  $\overrightarrow{CD}$  perpendiculares a  $(\beta_{24})$  apresentam projeções iguais, mas com sentidos opostos (Figura 335).

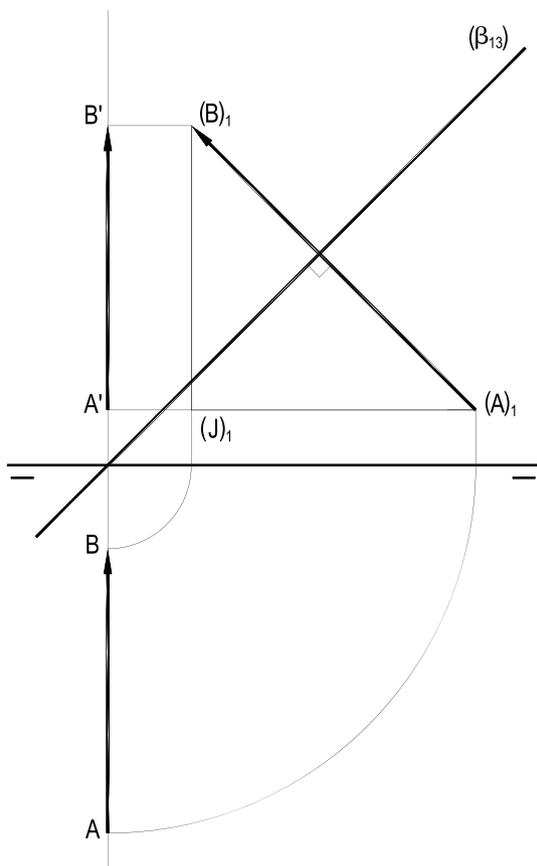


Figura 334

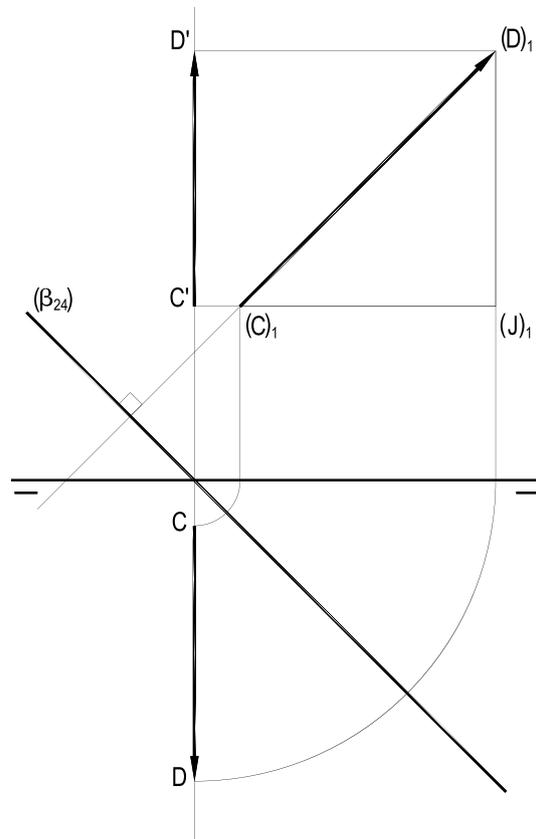


Figura 335

Cabe, ainda, analisar como se comportam os traços vertical e horizontal de uma reta (A)(B) perpendicular a um dos bissetores, tal como seus traços com o outro bissetor.

Observa-se que, para as retas perpendiculares a  $(\beta_{13})$ , em é pura, são simétricas as projeções H e V' de seus traços horizontal e vertical (Figura 336) e que, para as perpendiculares a  $(\beta_{24})$ , coincidem essas duas projeções (Figura 337).

Além disso, o traço da reta (A)(B) com o bissetor a que é perpendicular é o ponto médio do segmento formado por seus traços (V) e (H) (Figuras 336 e 337).

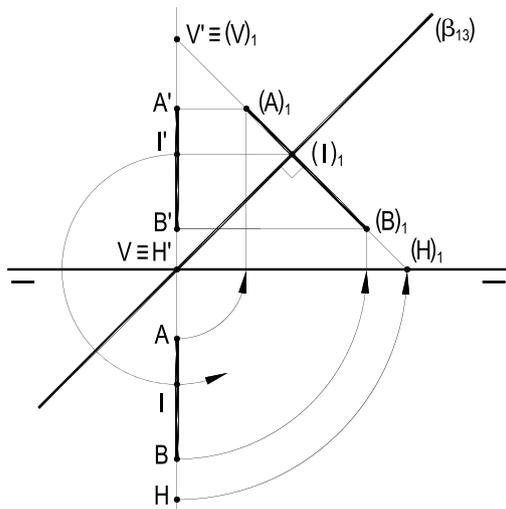


Figura 336

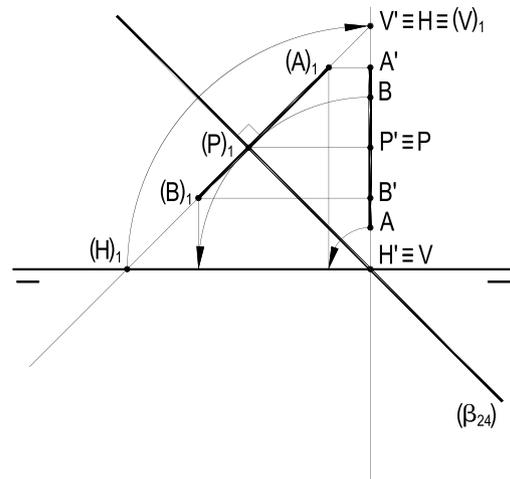


Figura 337

## 77 – Planos perpendiculares aos bissetores

Todo plano perpendicular a  $(\beta_{13})$ , por ter de possuir uma reta (V)(H) perpendicular a esse bissetor, tem, em é pura, traços simétricos em relação à linha de terra (Figuras 338 e 339).

Todo plano perpendicular a  $(\beta_{24})$ , por ter de pertencer a uma reta (V)(H) perpendicular a esse bissetor, tem, em é pura, traços coincidentes (Figuras 340 e 341).

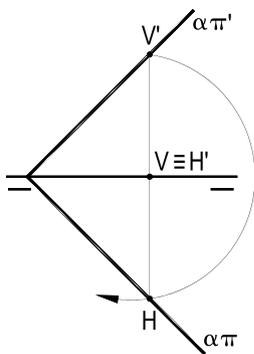


Figura 338

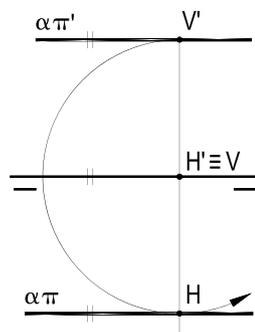


Figura 339

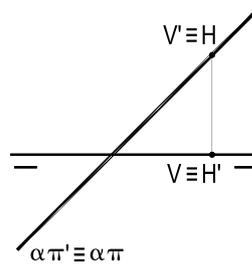


Figura 340

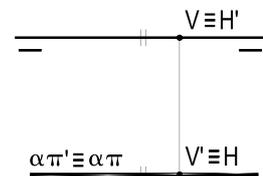


Figura 341

## 78 – Perpendicular comum a duas retas reversas

78.1 – Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 31) que, dadas duas retas reversas, existe, sempre, uma, e só uma, reta perpendicular a elas e que esta reta é, por isso, denominada perpendicular comum às duas reversas. O segmento limitado nessa perpendicular entre as duas reversas é o menor entre todos os que nelas se apoiam (*Geometria Espacial*, número 32), medindo, assim, a distância entre as duas retas.

Para o caso mais geral em que as duas retas reversas são quaisquer, para contruir a perpendicular comum a elas, deve ser utilizado o procedimento clássico, criado por Gaspard Monge, que passamos a detalhar:

Consideremos duas retas reversas  $(r)$  e  $(s)$  e tracemos, por um ponto  $(E)$  qualquer de  $(s)$ , a reta  $(r_1)$  paralela a  $(r)$ , obtendo-se o plano  $(\alpha)$  das retas  $(s)$  e  $(r_1)$  (Figura 342).

Por um ponto  $(F)$  qualquer de  $(r)$ , construamos a perpendicular a  $(\alpha)$  e determinemos sua interseção  $(G)$  com  $(\alpha)$ . Por  $(G)$ , tracemos nova paralela  $(r_2)$  a  $(r)$ , a qual corta  $(s)$  segundo o ponto  $(B)$  e, finalmente, por  $(B)$ , tracemos a reta  $(p)$ , paralela a  $(F)(G)$ , que encontra  $(r)$  em  $(A)$ . A reta  $(A)(B)$  é a perpendicular comum procurada.

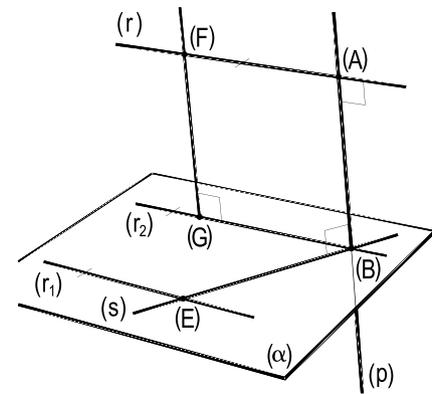


Figura 342

De fato, porque a reta  $(F)(G)$  foi traçada perpendicularmente a  $(\alpha)$ ,  $(F)(G)$  é ortogonal a  $(s)$ . E é perpendicular a  $(r)$ , porque  $(r)$  e  $(\alpha)$  são, por construção, paralelos. Ora, como  $(p)$  é paralela a  $(F)(G)$  e concorrente com  $(r)$  e com  $(s)$ ,  $(p)$  é mesmo perpendicular às reversas  $(r)$  e  $(s)$ . E mais: a perpendicular comum  $(p)$  é única, uma vez que é único o ponto  $(B)$ , obtido pela construção acima descrita (Figura 342).

É exatamente este o procedimento adotado na épura da Figura 343, em que apresentamos a construção da perpendicular comum  $(A)(B)$  a duas retas reversas  $(r)$  e  $(s)$ , quaisquer, dadas por suas projeções. Detalhando os passos:

- traçado de  $(r_1)$ , paralela a  $(r)$ , por um ponto  $(E)$ , qualquer de  $(s)$ , criando o plano  $(\alpha)$ , pertencente a  $(s)$  e paralelo a  $(r)$ ;
- perpendicular a  $(\alpha)$ , por um ponto  $(F)$  qualquer de  $(r)$ , obtendo seu traço  $(G)$  com  $(\alpha)$ ;
- paralela  $(r_2)$  a  $(r)$ , traçada por  $(G)$ , encontrando o ponto  $(B)$ , em  $(s)$ ;
- construção da perpendicular comum  $(A)(B)$ , procurada, paralela a  $(F)(G)$ ,  $(A)$  em  $(r)$ .

A determinação da distância entre as duas retas reversas dadas, ou seja, da V.G. do segmento  $(A)(B)$ , qualquer, se faz como o explicado no número 24.2, indicado, na Figura 343, pelo segmento  $A_1B_1$ .

A construção de perpendiculares comuns, para estes casos mais genéricos, será objeto de um capítulo futuro (VIII), denominado Mudança dos Planos de Projeção, quando retornaremos a essa questão.

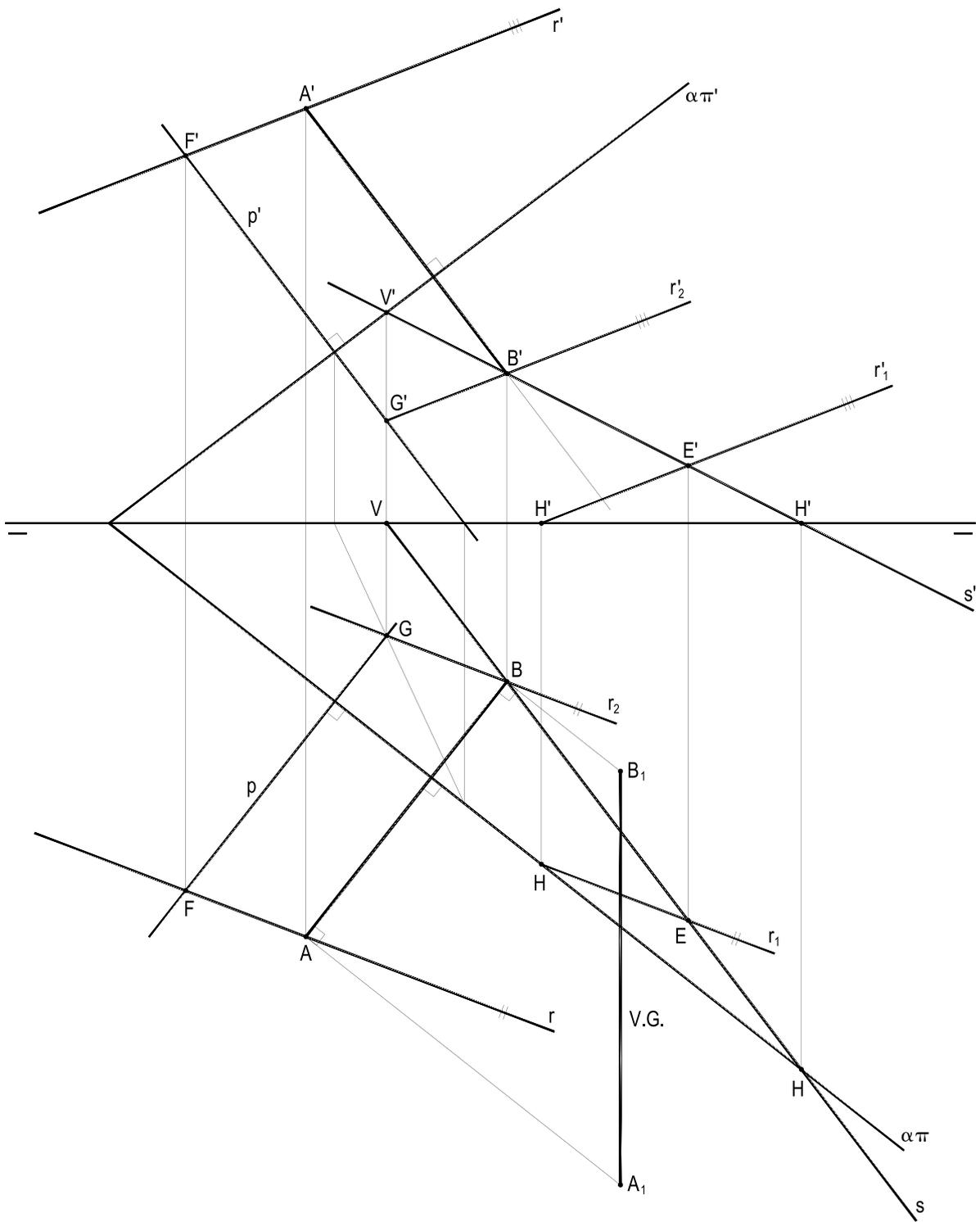


Figura 343

78.2 – Esta mesma construção pode, naturalmente, ser utilizada para quaisquer naturezas de pares de retas reversas, como, por exemplo (Figura 344), quando uma delas for qualquer e a outra horizontal, ou uma for horizontal e a outra frontal (Figura 345).

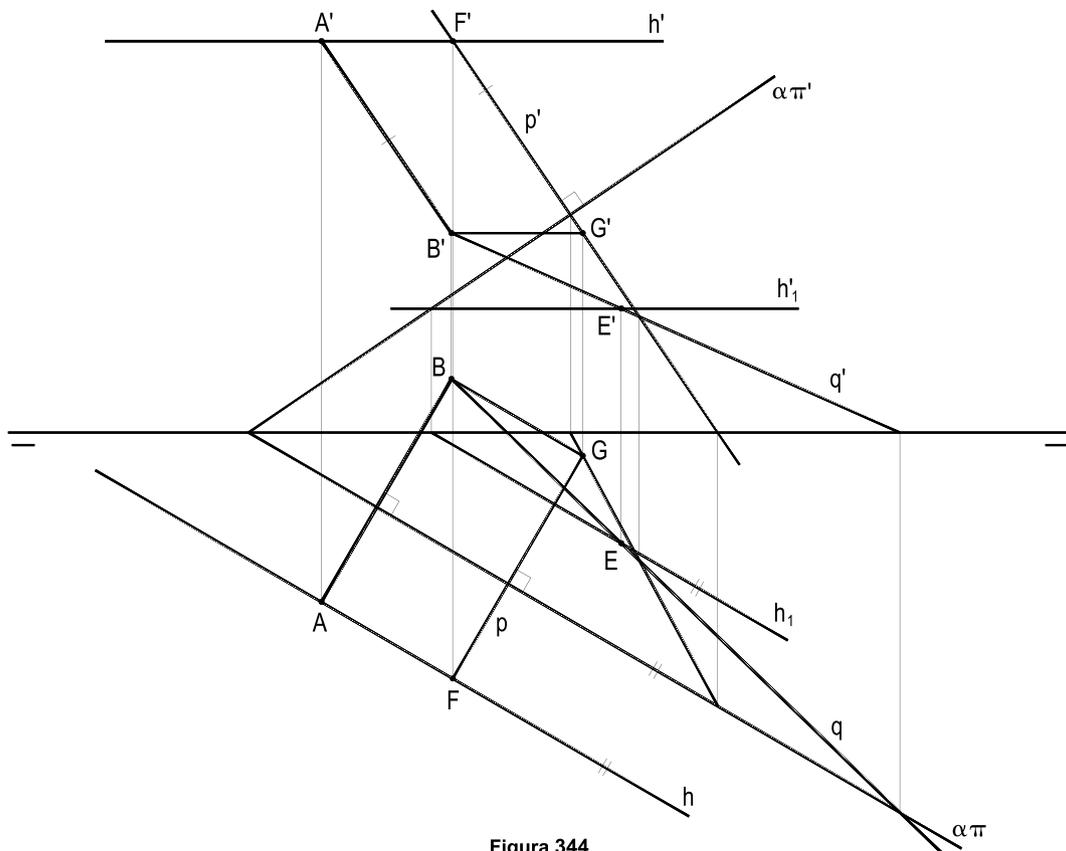


Figura 344

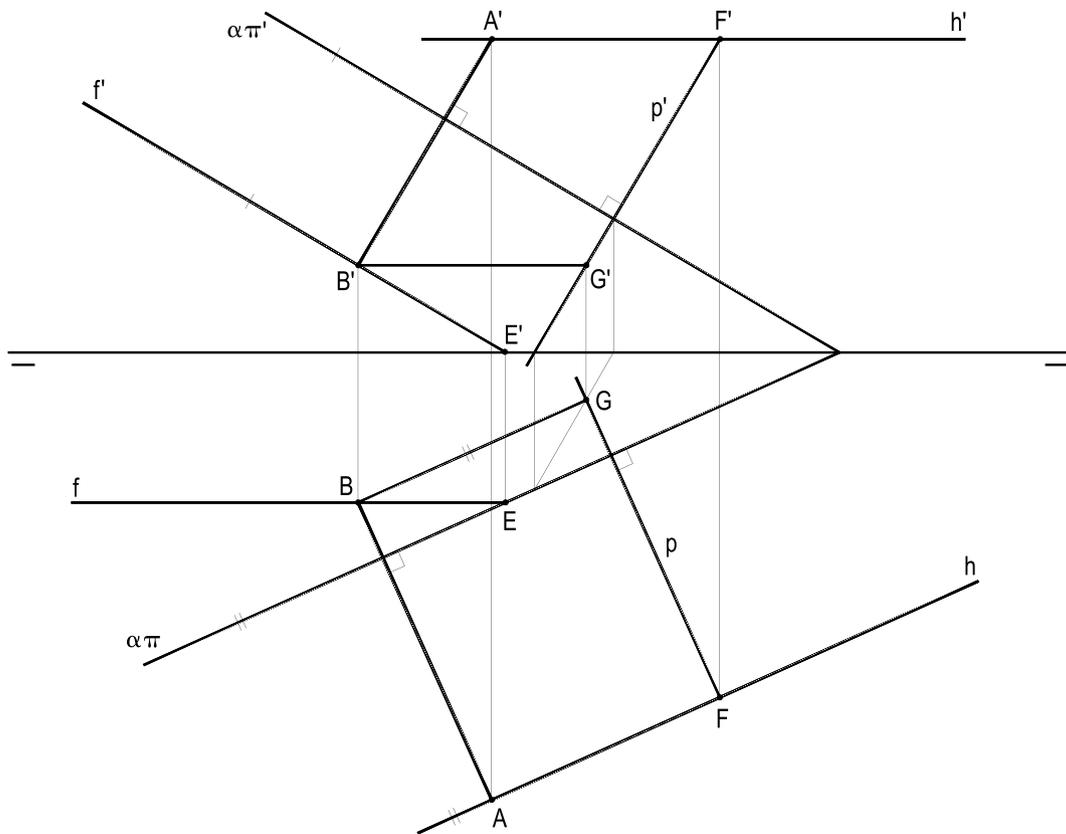


Figura 345



78.4 – Quando uma das reversas é uma vertical ( $v$ ), a perpendicular comum ( $p$ ) a ela e à segunda reversa, independentemente da natureza desta, tem de ser paralela a  $(\pi)$ , o que implica (número 71) em que a perpendicularidade se apresente em V.G. em, ao menos, uma das projeções (Figuras 348 e 349).

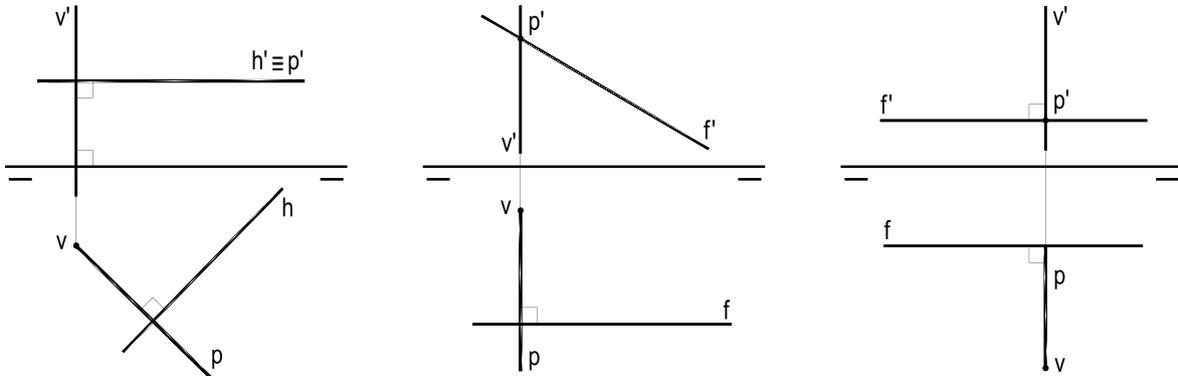


Figura 348

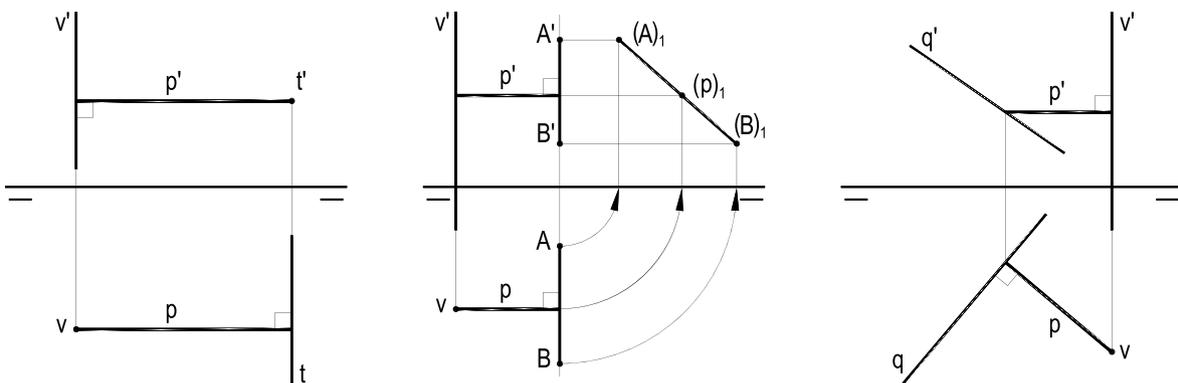


Figura 349

78.5 – Da mesma forma, quando uma das reversas ( $t$ ) é de topo, a perpendicular comum ( $p$ ) a ela e à segunda reversa tem de ser paralela a  $(\pi')$  (Figuras 350 e 351).

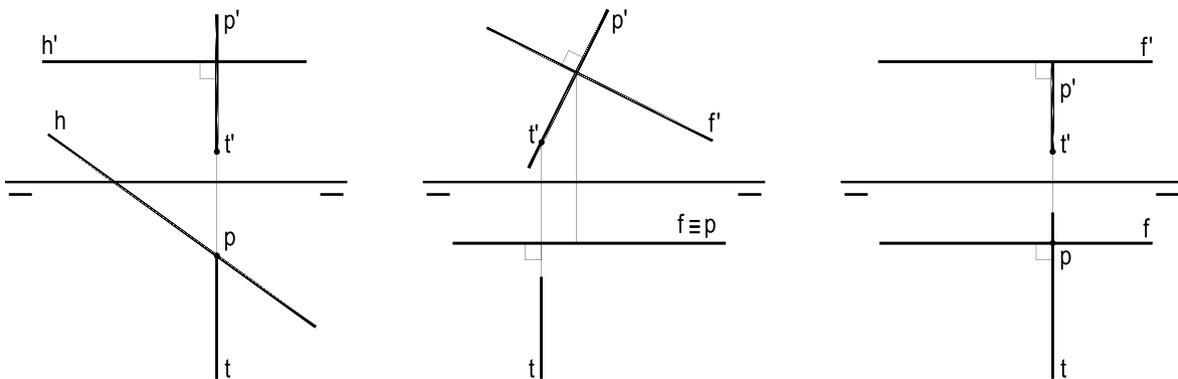


Figura 350

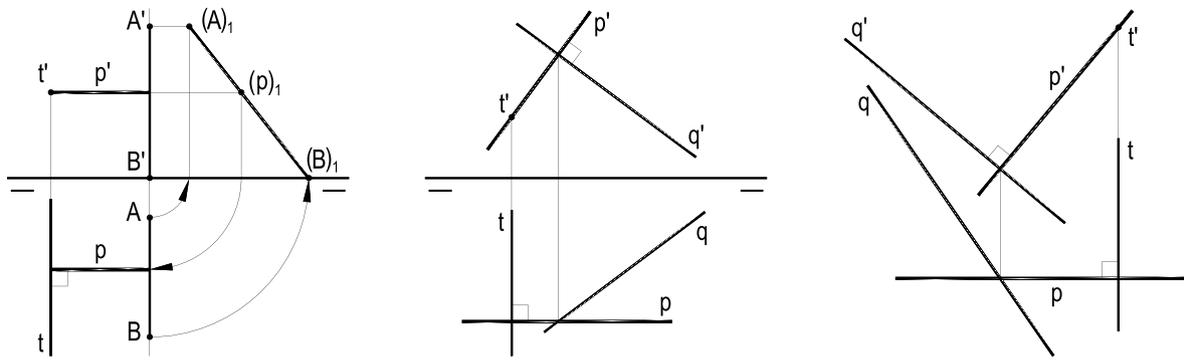


Figura 351

78.6 – Quando uma das reversas ( $r$ ) é fronto-horizontal, a perpendicular comum ( $p$ ) a ela e a uma outra reta tem de ser paralela a um plano de perfil, ou seja, vertical, de topo ou de perfil (Figura 352).

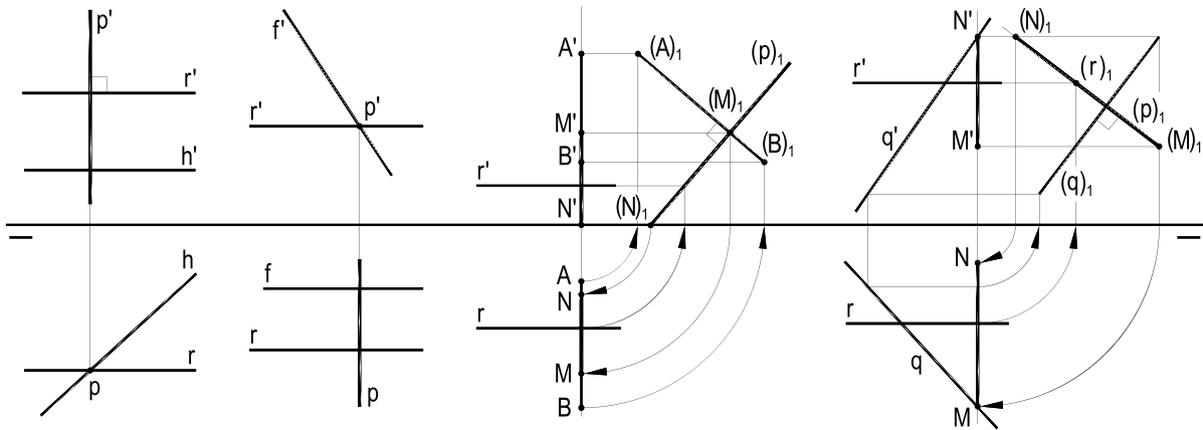


Figura 352

78.7 – Quando as duas reversas são paralelas a um dos planos de projeção, a perpendicular comum ( $p$ ), naturalmente, há de ser perpendicular a esse plano, como mostram as Figuras 353, 354, 355 e 356.

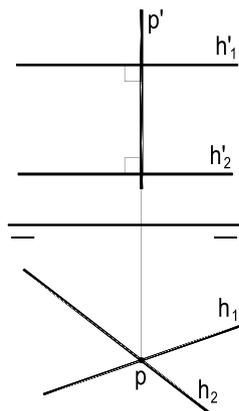


Figura 353

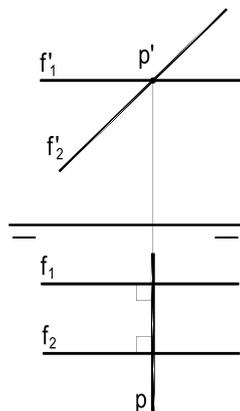


Figura 354

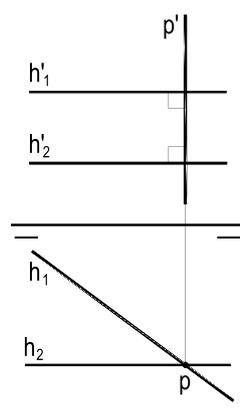


Figura 355

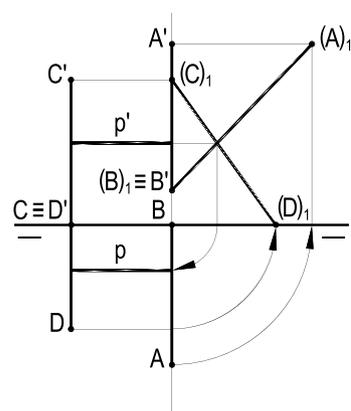


Figura 356

# CAPÍTULO VIII

## MÉTODOS DESCRITIVOS MUDANÇAS DOS PLANOS DE PROJEÇÃO

### 79 – Métodos descritivos

Como vimos, até agora, desenvolvendo e detalhando, em sua expressiva maioria, as construções da Geometria Descritiva operam com figuras que não apresentam, em projeções, suas verdadeiras grandezas, por estarem situadas, de um modo geral, em planos oblíquos aos de projeção.

Chegamos mesmo (número 24) a apresentar específicas construções para obter, em grandeza real, os valores dos ângulos que retas oblíquas aos planos de projeção formam com eles, bem como os dos comprimentos de seus segmentos, tudo isso, até, de resultados bastante limitados.

Pois, como dois de seus mais importantes objetivos, quais sejam as precisas determinações das verdadeiras grandezas das figuras planas, de variadas naturezas, e a possibilidade de, a partir disso, desenvolver construções geométricas de todos os níveis de complexidade, para solucionar questões de grandeza e de posição, foi necessário a essa geometria criar e detalhar procedimentos que a isso conduzissem.

São esses procedimentos que, com tais objetivos, são conhecidos, em conjunto, como Métodos Descritivos e que se agrupam em três importantes conjuntos, a saber:

- mudanças dos planos de projeção;
- rotações;
- rebatimentos.

### 80 – Método das mudanças dos planos de projeção

O método das mudanças de posição de um dos planos de projeção, ou dos dois, em sequência, abreviadamente denominado método das mudanças, consiste em, mantendo fixo um dos planos de projeção, alterar a posição do outro, em busca de um novo sistema referencial mais vantajoso à resolução do problema em estudo.

Naturalmente, o plano, cuja posição tenha sido modificada, deverá continuar perpendicular ao que se manteve fixo, pois só assim os princípios da Descritiva continuarão válidos.

## 81 – Mudança do plano vertical de projeção

Porque, na mudança de posição de  $(\pi')$ ,  $(\pi)$  permanece fixo, para cada ponto em estudo, fica evidente que:

- a cota se mantém constante;
- a projeção horizontal permanece fixa;
- a nova linha de terra, anotada habitualmente com dois traços sob cada extremidade, poderá receber dois sentidos, visto que, para o novo sistema biprojetivo (Figura 357), cada ponto em questão poderá ser considerado em dois diedros, a escolher (Figura 358).

Além disso, para conforto do manejo do desenho, a nova linha de terra poderá ser convenientemente afastada do traçado principal, tanto quanto se deseje e quanto os limites operacionais permitam (Figura 359).

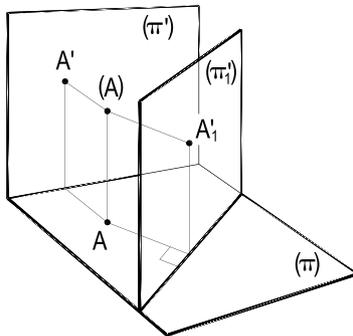


Figura 357

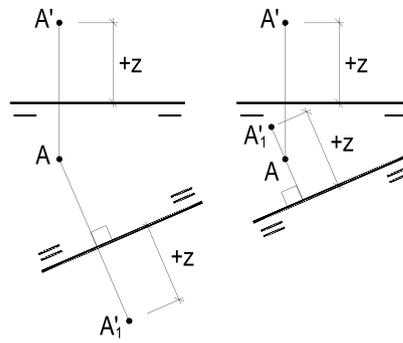


Figura 358

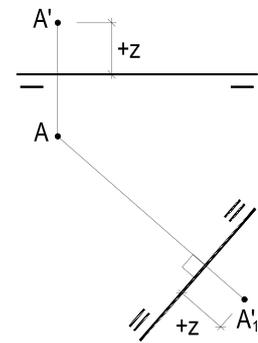


Figura 359

## 82 – Mudança do plano horizontal de projeção

Quando se muda a posição de  $(\pi)$  para  $(\pi_1)$  (Figura 360), naturalmente ainda perpendicular a  $(\pi')$ , é claro, para cada ponto em estudo, que:

- o afastamento permanece constante;
- a projeção vertical permanece fixa;
- a nova linha de terra poderá receber dois sentidos (Figura 361), correspondendo a cada um dos diedros em que o ponto em estudo poderá ser considerado.

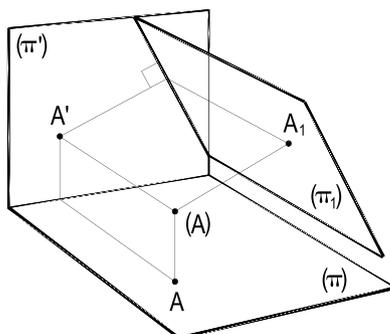


Figura 360

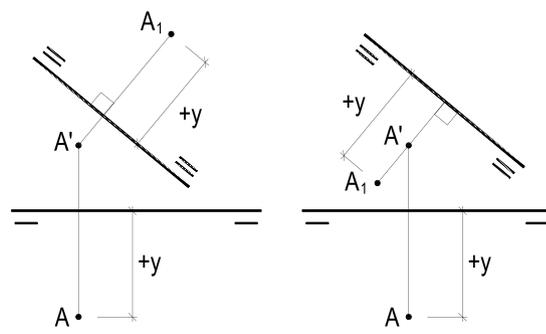


Figura 361

### 83 – Mudanças sucessivas

Conforme adiante será detalhado, por vezes será necessário proceder a duas mudanças consecutivas, uma para cada plano de projeção. Tudo se passa, para um ponto (A) qualquer, da mesma forma que o anteriormente descrito, como no caso do exemplo abaixo (Figuras 362 e 363), em que primeiro mudou-se ( $\pi'$ ) e, depois, ( $\pi$ ).

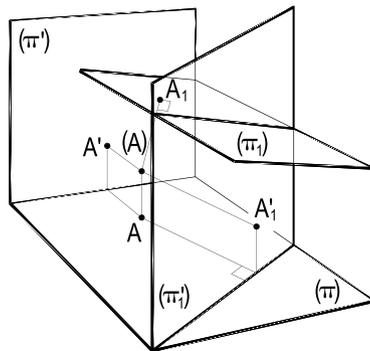


Figura 362

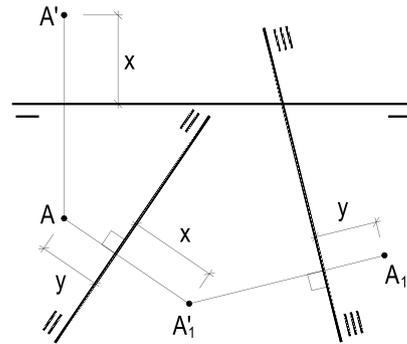


Figura 363

### 84 – Principais aplicações às retas

84.1 – Obtenção das verdadeiras grandezas de um segmento de reta qualquer e dos ângulos que ele forma com os planos de projeção.

Dada uma reta qualquer ( $r$ ), para obter as verdadeiras grandezas de seus segmentos (A)(B), bem como dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que ela forma, respectivamente, com ( $\pi$ ) e com ( $\pi'$ ), basta transformá-la em frontal (Figura 364), com uma adequada mudança de ( $\pi'$ ), ou em horizontal (Figura 365), mediante mudança de ( $\pi$ ).

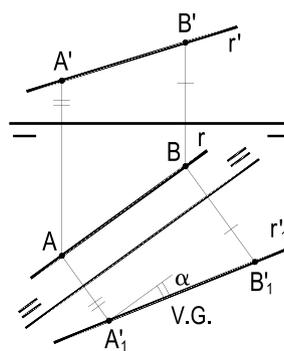


Figura 364

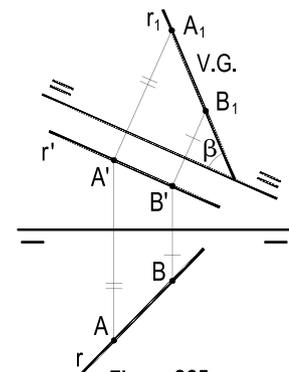


Figura 365

84.2 – Transformar uma reta qualquer em vertical, ou de topo.

Para transformar uma reta ( $r$ ), qualquer, em vertical (Figura 366), ou numa reta de topo (Figura 367), são necessárias duas mudanças que as transforme, inicialmente, em frontal ou horizontal, respectivamente.

Tais transformações serão de grande utilidade para o emprego do método das rotações, como adiante se verá.

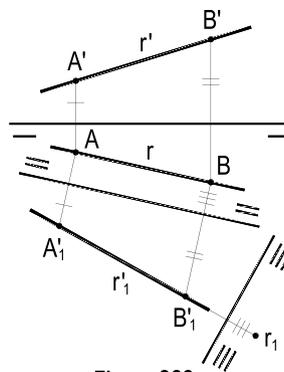


Figura 366

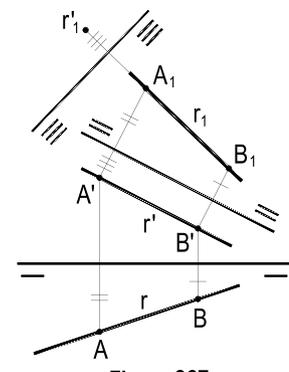


Figura 367

### 84.3 – Construção da perpendicular comum a duas retas reversas.

Vimos, anteriormente (número 78), como construir a perpendicular comum a duas retas reversas, utilizando procedimento geométrico próprio, instituído pelo criador da Geometria Descritiva, o matemático Gaspard Monge.

O método das mudanças do plano é utilizado com vantagem para tal questão, quando as duas reversas são quaisquer, ou uma é qualquer e a outra é de perfil.

Assim, dadas duas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), sendo, ao menos uma, qualquer, basta, mediante duas mudanças consecutivas, transformar a reta qualquer ( $r$ ) primeiro em frontal e, em seguida, em vertical, levando, naturalmente, a outra reversa, até este terceiro sistema biprojetivo, onde, então, tal como visto anteriormente (número 78.4), é imediato construir a perpendicular comum ( $p$ ), uma reta horizontal, nesse terceiro sistema. O retorno dos pontos comuns a ( $p$ ) e às reversas dadas ao sistema original responde ao proposto (Figuras 368 e 369).

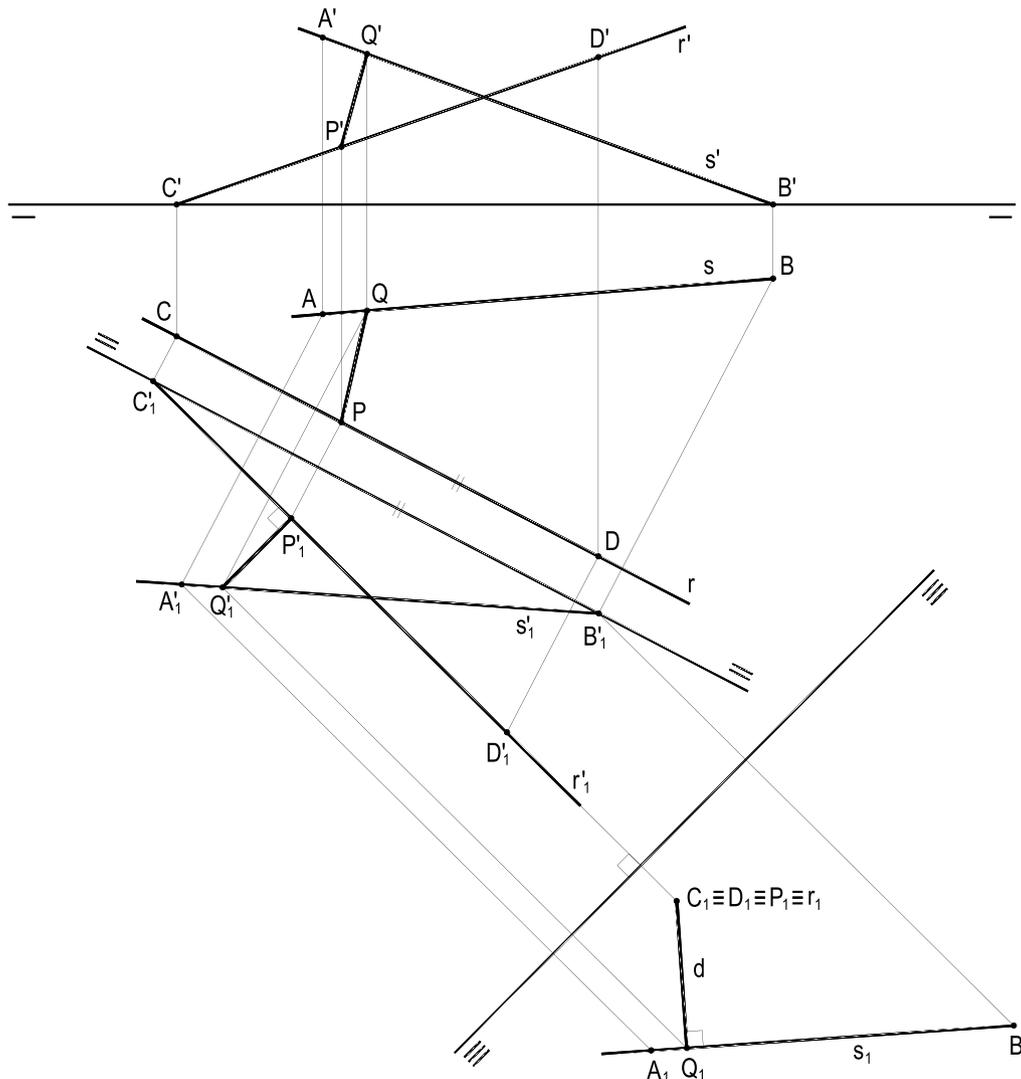


Figura 368

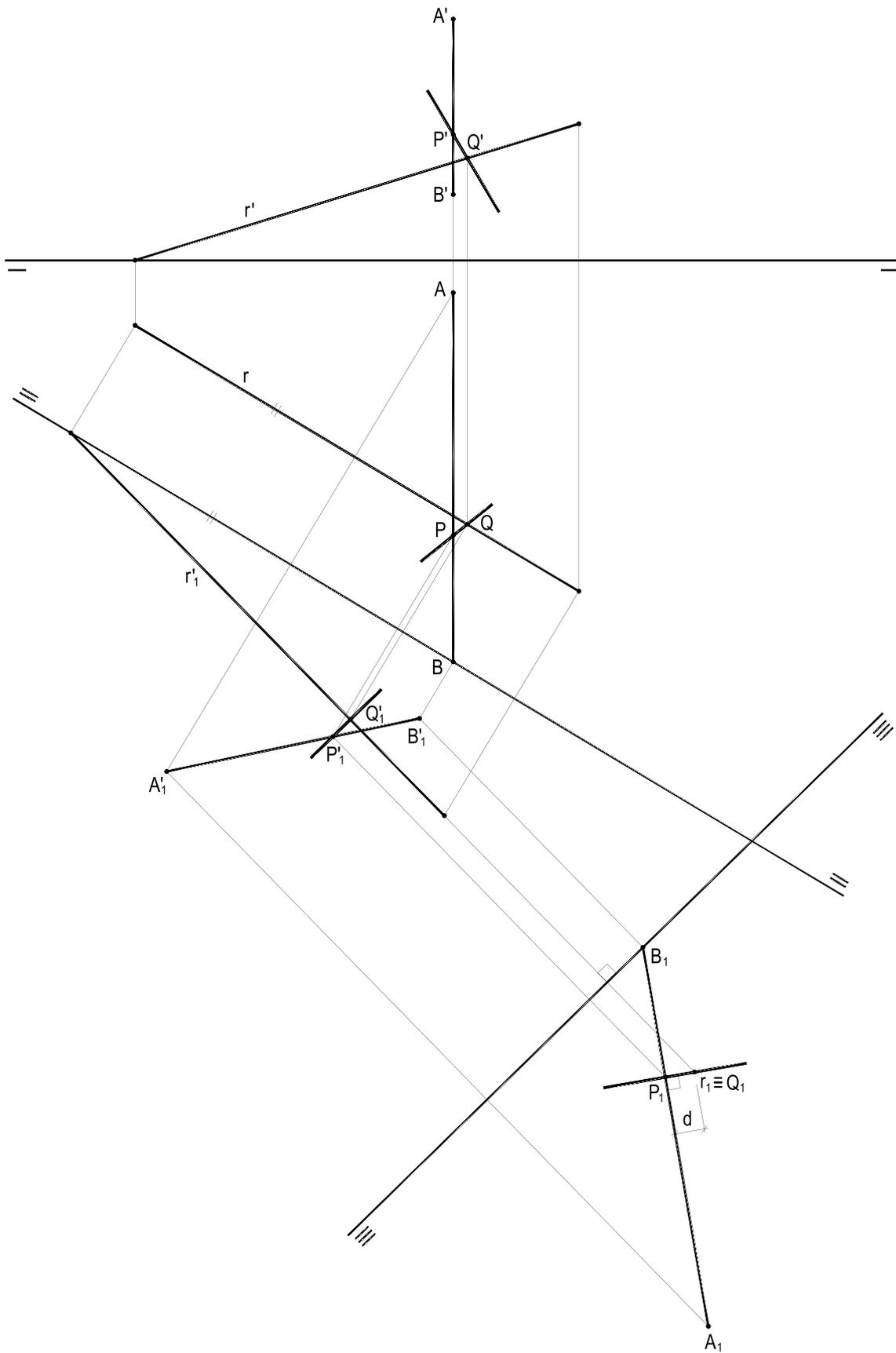


Figura 369

Finalmente, o caso, particular, ressalve-se, da construção da perpendicular comum a uma reta qualquer ( $r$ ) e a uma fronto-horizontal ( $f$ ) fica solucionado com apenas uma mudança, aproveitando que ( $f$ ) tem cota e afastamento constantes.

Mantendo a mesma sequência dos dois exemplos anteriores, optamos pela mudança de ( $\pi'$ ), que torna ( $f$ ) de topo (Figura 370).

A perpendicular comum ( $P$ )( $Q$ ) é, evidentemente, de perfil (número 78.6).

É claro que, como natural consequência, nas construções acima desenvolvidas, a medida  $d$  da projeção final  $P_1Q_1$  (Figuras 368 e 369), ou  $P'_1Q'_1$  (Figura 370) da perpendicular comum, mede a verdadeira grandeza da distância entre as retas reversas em estudo.

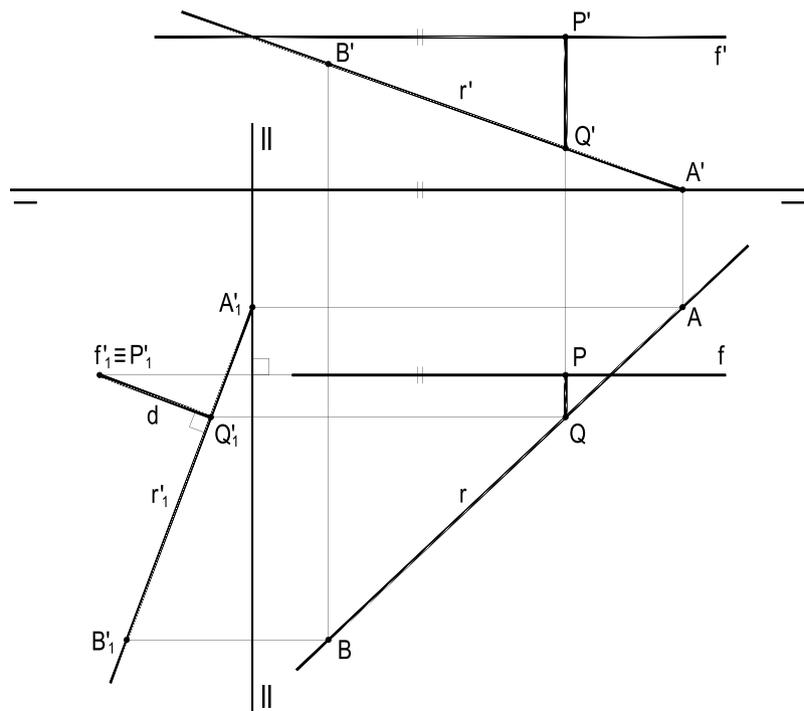


Figura 370

## 85 – Aplicações aos planos

Ao se efetuar a mudança de um dos planos de projeção, qualquer plano ( $\alpha$ ), que esteja em estudo, apresentará novo traço, que será vertical  $\alpha\pi'_1$ , se a mudança for de ( $\pi'$ ) (Figuras 371 e 372) ou horizontal  $\alpha\pi_1$ , se a mudança houver sido de ( $\pi$ ) (Figuras 373 e 374).

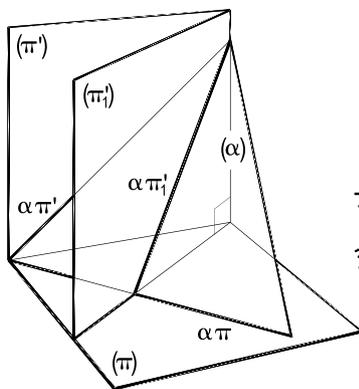


Figura 371

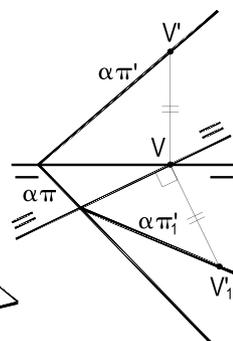


Figura 372

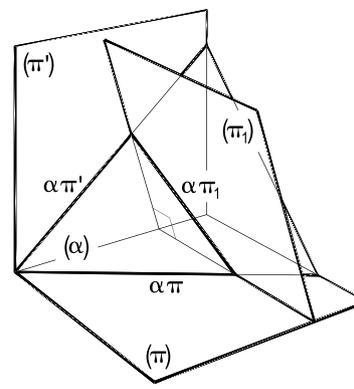


Figura 373

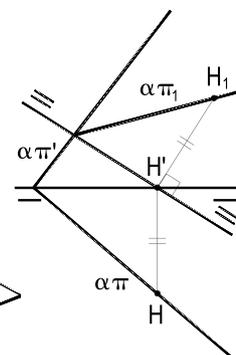


Figura 374

Observe-se que, nos dois exemplos acima apresentados, o novo traço do plano ( $\alpha$ ) foi rapidamente obtido pelo aproveitamento do ponto comum às duas linhas de terra, por corresponderem, antes e depois da mudança feita, a pontos com afastamentos nulos (Figura 372) ou cotas nulas (Figura 374).

Caso tal ponto seja inacessível, no espaço destinado ao estudo, basta utilizar um ponto genérico ( $A$ ) de ( $\alpha$ ) que tenha ou afastamento nulo (Figura 375) ou cota nula (Figura 376).

Quando, enfim, o plano ( $\alpha$ ) não é dado pelos traços, mas se deseja obtê-los, no novo sistema biprojetivo, após uma mudança de ( $\pi'$ ), deve-se utilizar dois pontos que venham a ter afastamentos nulos na situação final (Figura 377). Fosse de ( $\pi$ ) a mudança, tais pontos deveriam ser escolhidos com cotas nulas, evidentemente.

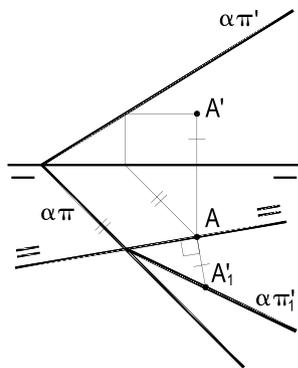


Figura 375

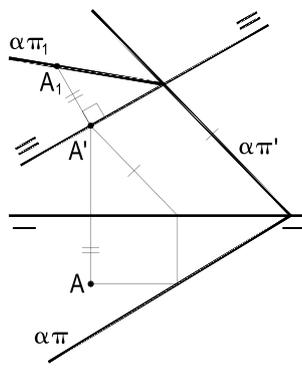


Figura 376

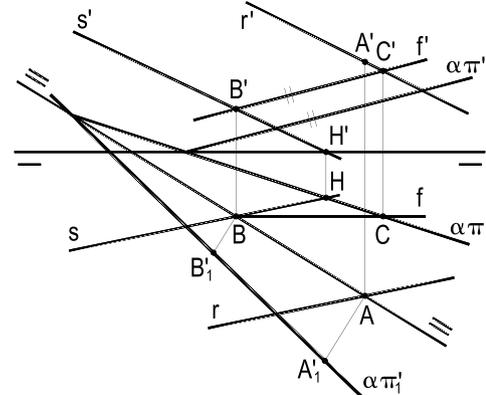


Figura 377

Além de mudanças genéricas, como indicadas a seguir, todas de ( $\pi'$ ), para um plano paralelo a ( $\pi'\pi$ ), um ( $\pi'\pi$ )-(M) e um de topo, veremos, adiante, importantes aplicações para as obtenções das verdadeiras grandezas dos ângulos que um plano qualquer forma com os de projeção e da distância entre dois planos quaisquer, paralelos entre si.

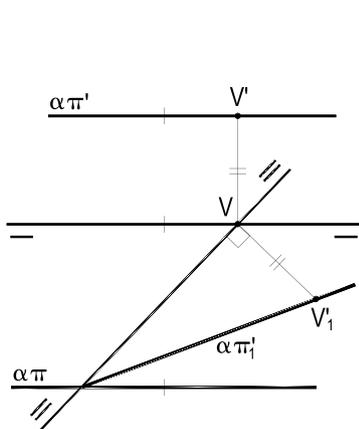


Figura 378

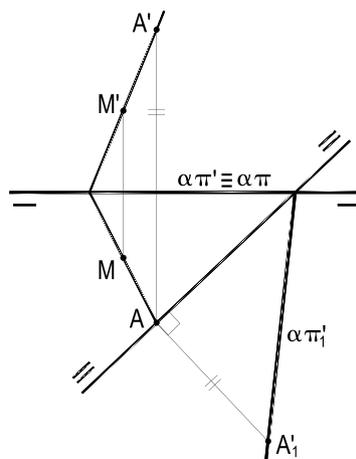


Figura 379

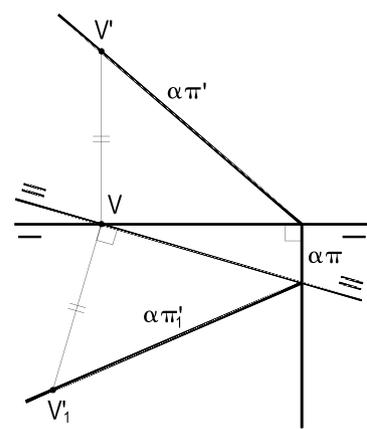


Figura 380

## 86 – Ângulos do plano qualquer com os de projeção

Já vimos, anteriormente (números 34, 35, 37 e 38), como obter as verdadeiras grandezas dos ângulos que os planos verticais, de topo, paralelos ou pertencentes à linha de terra formam com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$ .

Pois, para resolver esta questão para um plano  $(\gamma)$ , qualquer, basta efetuar uma mudança que o transforme em de topo, ou vertical, apresentando, respectivamente, as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ , formados com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$  (Figuras 381 e 382).

Mesmo quando o plano  $(\gamma)$  não vem dado por seus traços (Figura 383), aplica-se o procedimento.

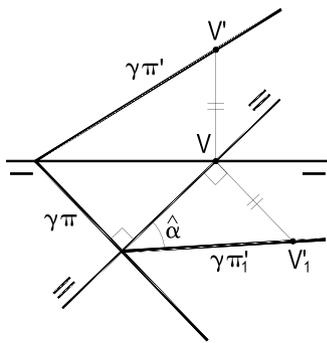


Figura 381

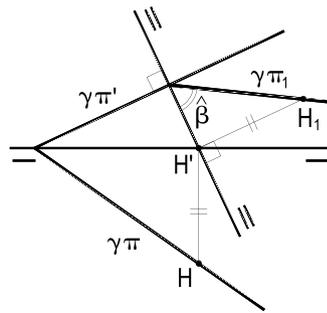


Figura 382

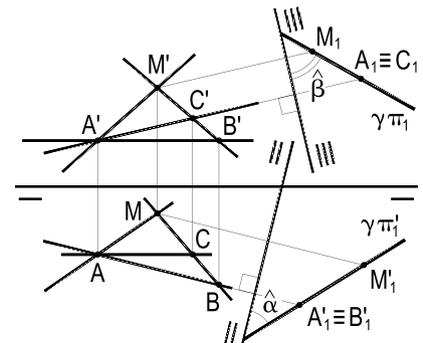


Figura 383

## 87 – Distância entre dois planos paralelos

É óbvio que as distâncias entre dois planos de perfil, ou dois frontais, ou dois horizontais são, respectivamente, iguais às diferenças entre suas abscissas, seus afastamentos, ou suas cotas. Muito simples, também, é a obtenção da verdadeira grandeza da distância entre um par de planos paralelos, um dos quais contenha a linha de terra, mediante o rebatimento de um corte de perfil (Figura 384), assim como das distâncias entre dois planos de topo, ou dois verticais, aos pares paralelos (Figuras 385 e 386), medidas sobre uma perpendicular a cada par e, sendo frontal, ou horizontal, projetando-se, em V.G., sobre  $(\pi')$  ou sobre  $(\pi)$ , respectivamente.

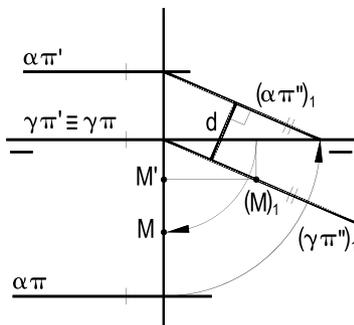


Figura 384

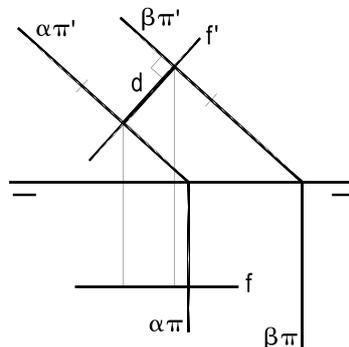


Figura 385

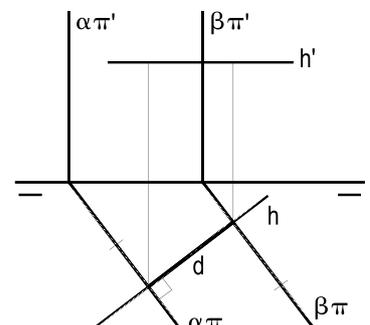


Figura 386

Quando os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), paralelos entre si, são quaisquer, basta efetuar uma mudança que os torne verticais (Figura 387) ou de topo (Figura 388), para se ter, em V.G., a distância  $d$  procurada – procedimento que permanece válido, mesmo quando não se tem os traços de um (Figura 389) ou de ambos os planos.

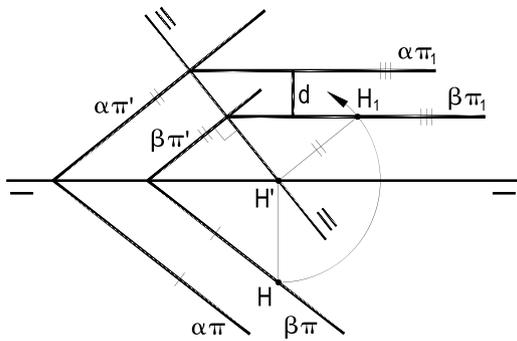


Figura 387

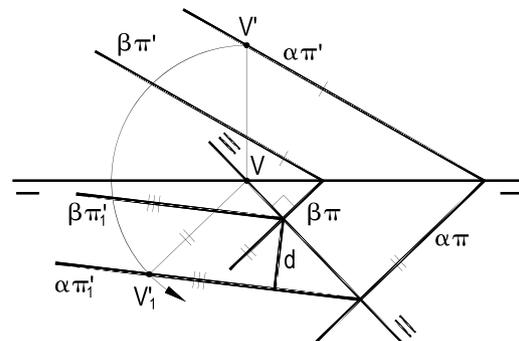


Figura 388

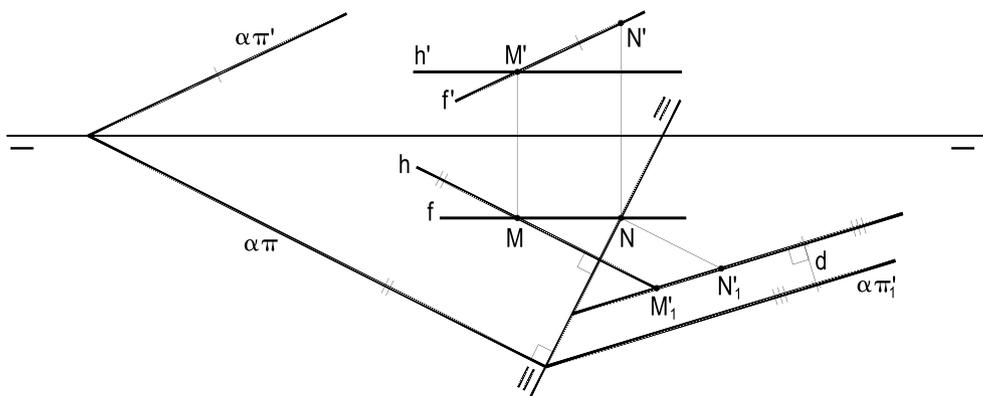


Figura 389

## 88 – Distância de um ponto a um plano

Tal como no item anterior, é imediata a obtenção de V.G. da distância  $d$  de um ponto ( $A$ ) a um plano ( $\alpha$ ), quando este é projetante, ou paralelo, ou pertencente à linha de terra, conforme as figuras seguintes.

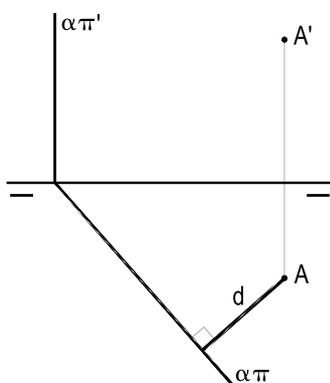


Figura 390

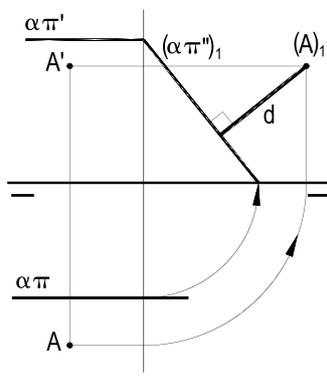


Figura 391

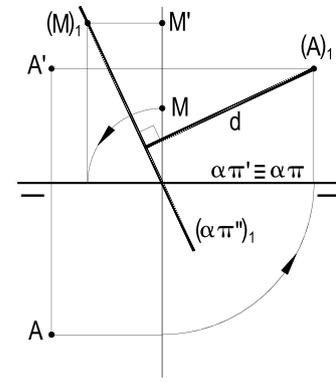


Figura 392

Quando o plano ( $\alpha$ ) é qualquer, basta, mediante uma mudança, transformá-lo em de topo, ou vertical, para a obtenção da verdadeira grandeza  $d$  procurada (Figura 393). Vale o procedimento, mesmo que ( $\alpha$ ) não se apresente por seus traços (Figura 394).

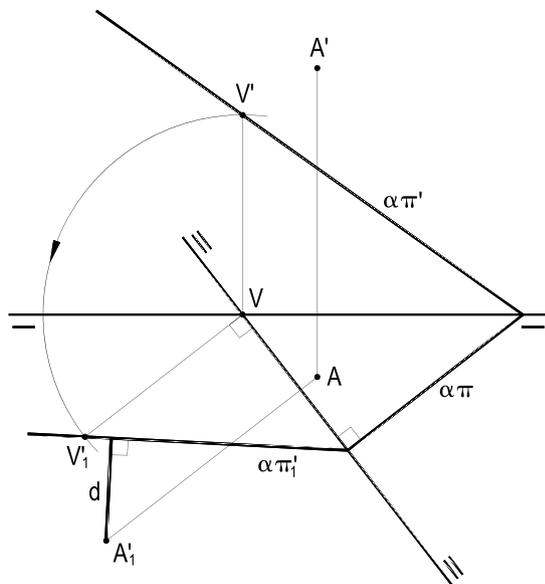


Figura 393

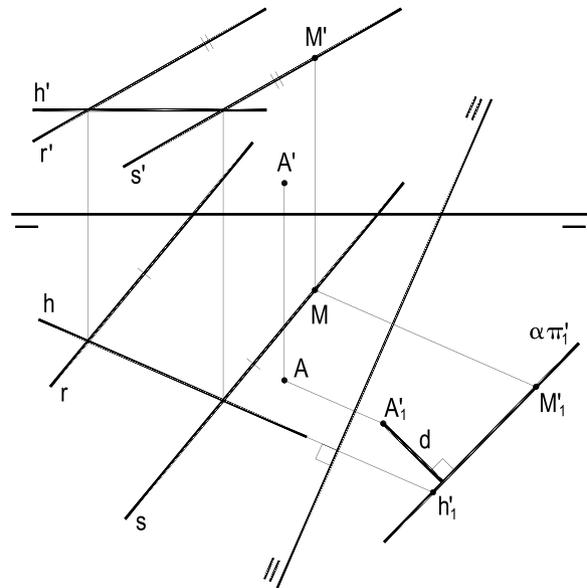


Figura 394

## 89 – Distância entre duas retas paralelas

Como duas retas paralelas são sempre coplanares, o segmento de perpendicular entre elas também pertencerá a tal plano e sua V.G. será de muito fácil obtenção se seu plano for projetante.

De fato, se horizontal ou frontal, a V.G. estará presente numa de suas projeções e se vertical, de topo ou de perfil, com uma simples mudança, ele passará a tomar a posição de horizontal ou frontal.

Quando o plano das retas em estudo for não projetante, serão necessárias duas mudanças consecutivas, para levá-lo à posição de paralelo a um dos planos de projeção, tal como indicado na Figura 395, onde, após transformar o plano ( $\alpha$ ) das duas paralelas dadas ( $r$ ) e ( $s$ ) em plano de topo e, em seguida, em horizontal, obteve-se a distância  $d$ , que é a verdadeira grandeza da distância entre ( $r$ ) e ( $s$ ).

Cabe, no entanto, ressaltar que a V.G. aqui em estudo pode ser obtida de modo muito mais simples com a utilização de outro método descritivo, o dos rebatimentos, como se verá no Capítulo X.

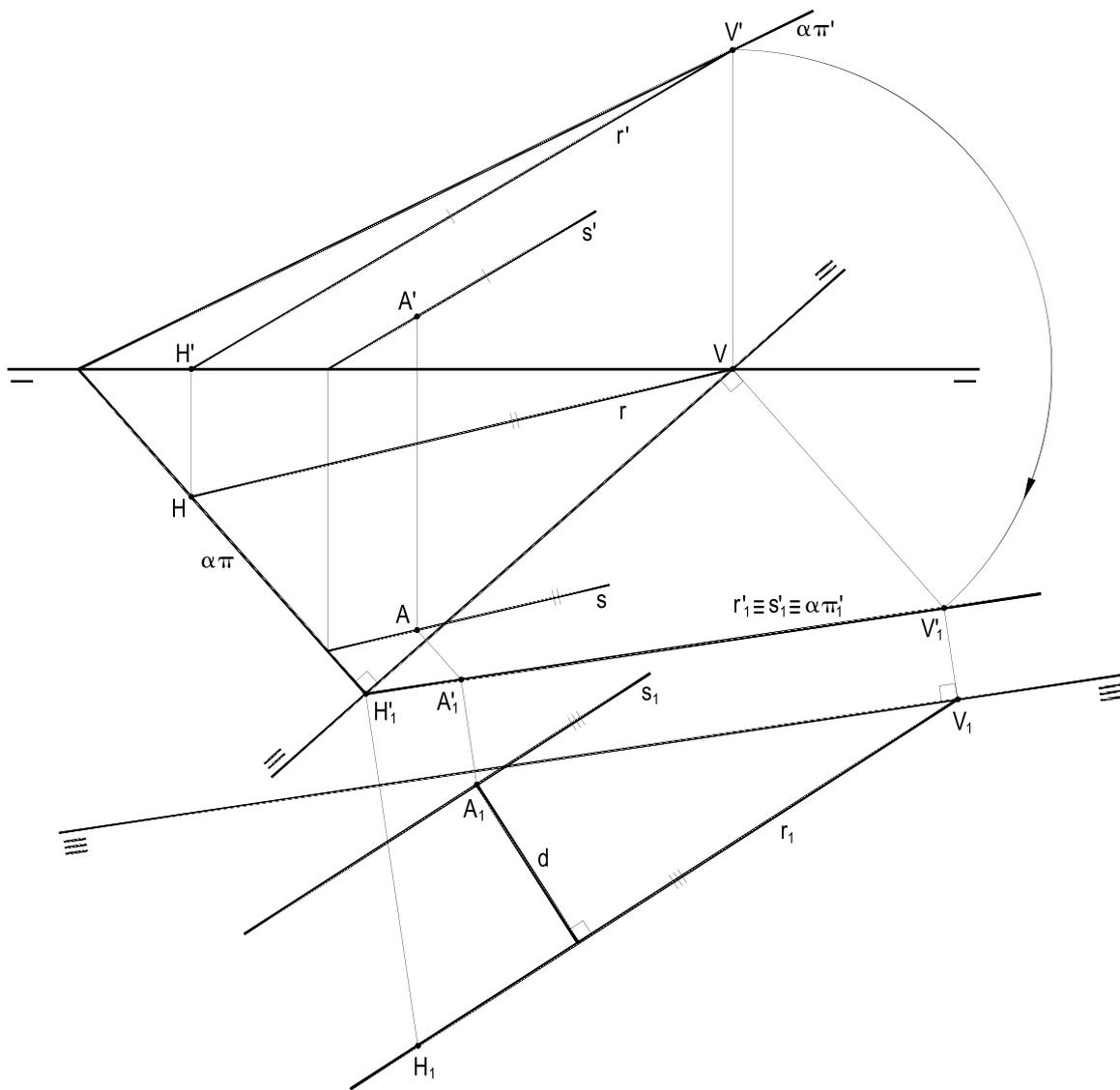


Figura 395

## 90 – Distância entre um ponto e uma reta

Quando a reta é uma vertical ( $v$ ), ou uma de topo ( $t$ ), porque a distância  $d$  a ela de um ponto dado se mede sobre a perpendicular a ela, que tem de ser, respectivamente, paralela a ( $\pi$ ) ou a ( $\pi'$ ), vem, em verdadeira grandeza, na projeção horizontal ou na vertical, respectivamente (Figura 396).

Assim são as distâncias indicadas por  $d$  na Figura 396.

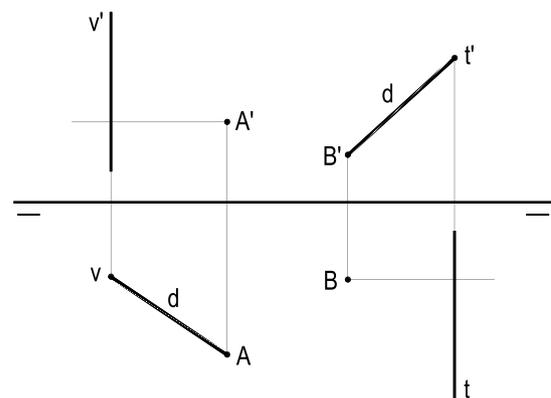


Figura 396

Quando a reta dada é horizontal, frontal ou fronto-horizontal (Figuras 397, 398 e 399), com uma simples mudança, faz-se com que ela passe a ser, respectivamente de topo ou vertical, recaindo-se, então, na situação anterior.

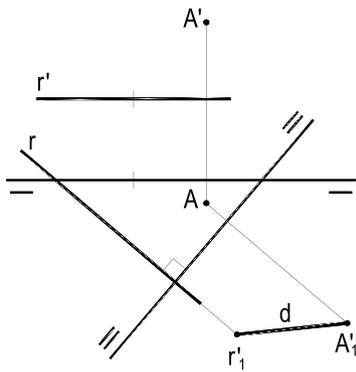


Figura 397

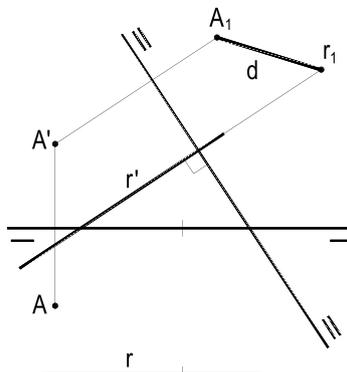


Figura 398

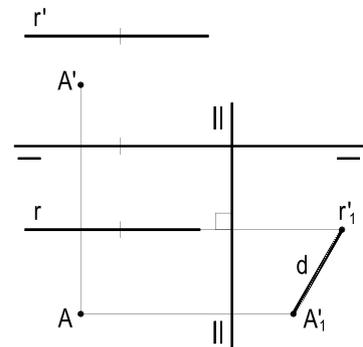


Figura 399

Quando, enfim, a reta dada é qualquer (Figura 400) ou de perfil (Figura 401), com duas mudanças sucessivas que as transformem em frontal e, a seguir, em vertical, retorna-se à situação anterior, para obter a V.G.  $d$  da distância entre o ponto e a reta dados.

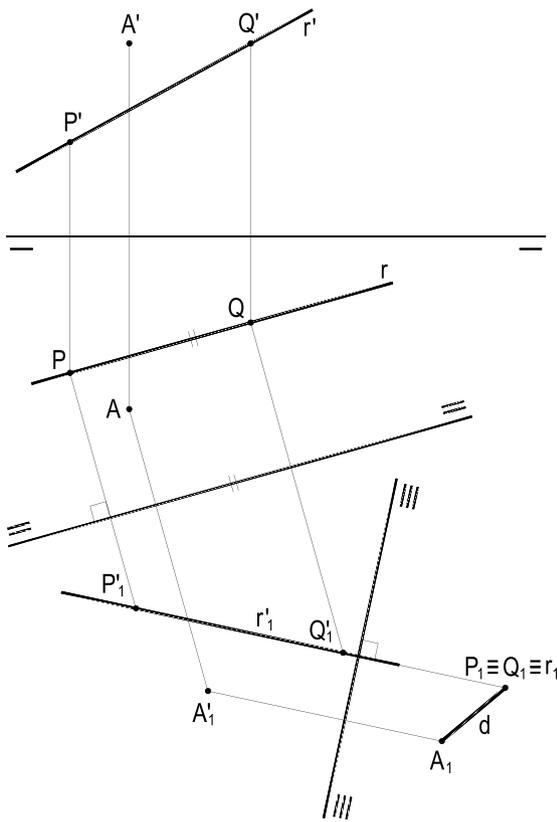


Figura 400

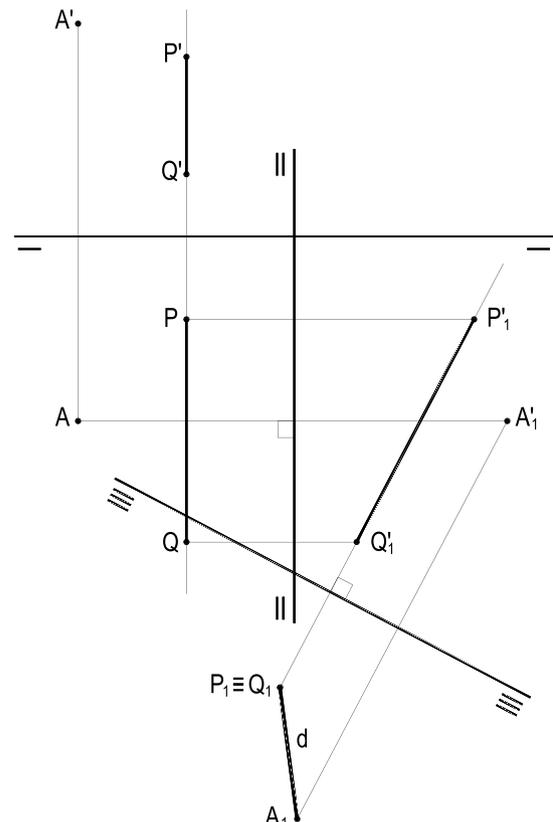


Figura 401

## 91 – Resolução de problemas geométricos

O método das mudanças dos planos de projeção pode ser utilizado na resolução de diversos problemas geométricos, no âmbito da Geometria Descritiva, envolvendo determinações ou utilizações de verdadeiras grandezas. O procedimento, em geral, consiste em efetuar uma ou duas mudanças que conduzam a questão a poder ser explorada, quando pertencente a um plano horizontal, ou a um frontal, aproveitando as verdadeiras grandezas então conquistadas.

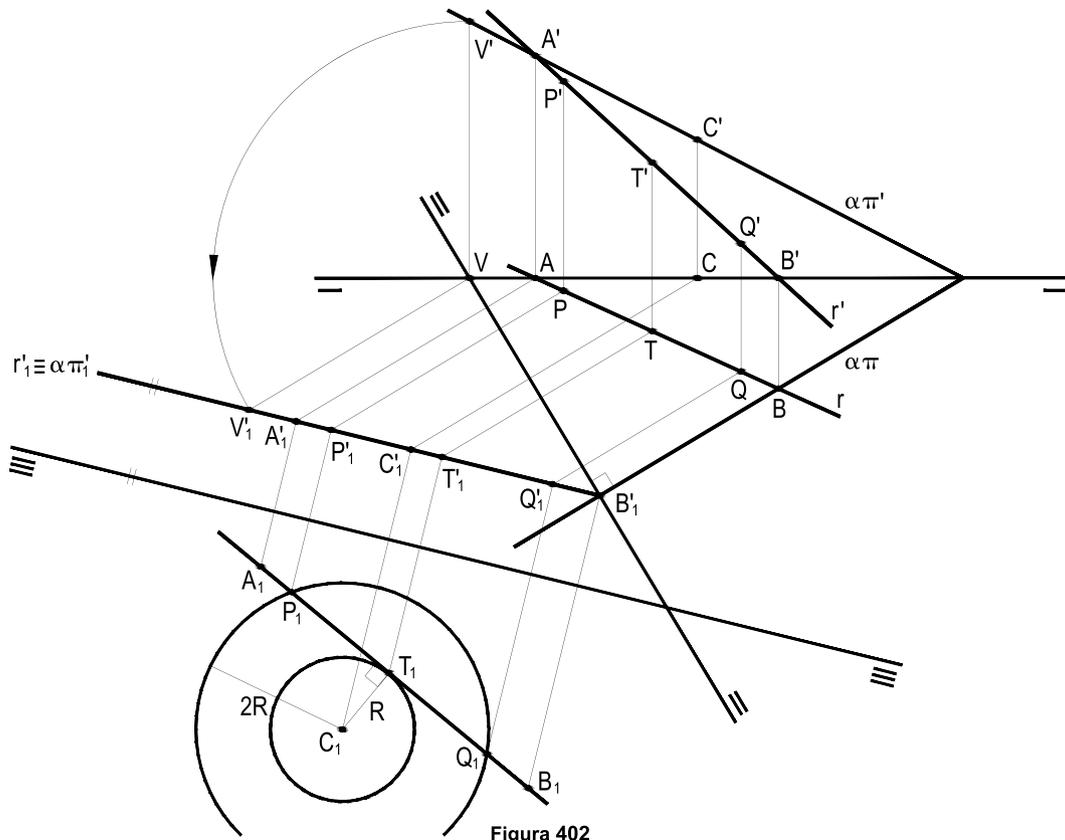
Vejamos alguns exemplos:

91.1 – Dado um plano ( $\alpha$ ) por uma reta qualquer ( $r$ ) e por um ponto ( $C$ ), pede-se considerar dois círculos concêntricos, com centros em ( $C$ ), um primeiro tangente a ( $r$ ), num ponto ( $T$ ), e o segundo, com raio igual ao dobro do primeiro, cortando ( $r$ ) nos pontos ( $P$ ) e ( $Q$ ), ( $P$ ) com abscissa menor que ( $Q$ ).

Pede-se determinar as projeções dos pontos ( $T$ ), ( $P$ ) e ( $Q$ ).

Solução: Determinados os traços de ( $\alpha$ ), mediante duas mudanças consecutivas, que o transformem primeiro num plano de topo e, em seguida, num horizontal, transportando ( $r$ ) e ( $C$ ) para esse terceiro sistema projetivo, são imediatas as construções dos dois círculos com centro em ( $C$ ), o primeiro tangente e o segundo secante a ( $r$ ), conforme imposto no anunciado.

Basta, então, retornar os três pontos pedidos ( $T$ ), ( $P$ ) e ( $Q$ ) ao sistema original (Figura 402).



91.2 – Pede-se construir as projeções do losango (A)(B)(C)(D) pertencente ao plano ( $\alpha$ ), sabendo que sua diagonal (A)(C) é igual aos seus lados.

São dados os traços do plano ( $\alpha$ ) e as projeções verticais dos vértices (A) e (C).

Solução: Marcados (A) e (C) em ( $\alpha$ ) e efetuadas duas mudanças consecutivas que levem ( $\alpha$ ) a ser de topo e, em seguida, a ser horizontal, é imediata a construção da V.G.  $A_1B_1C_1D_1$  do losango e, retornando ao sistema biprojetivo inicial, assim obter as projeções pedidas (Figura 403).

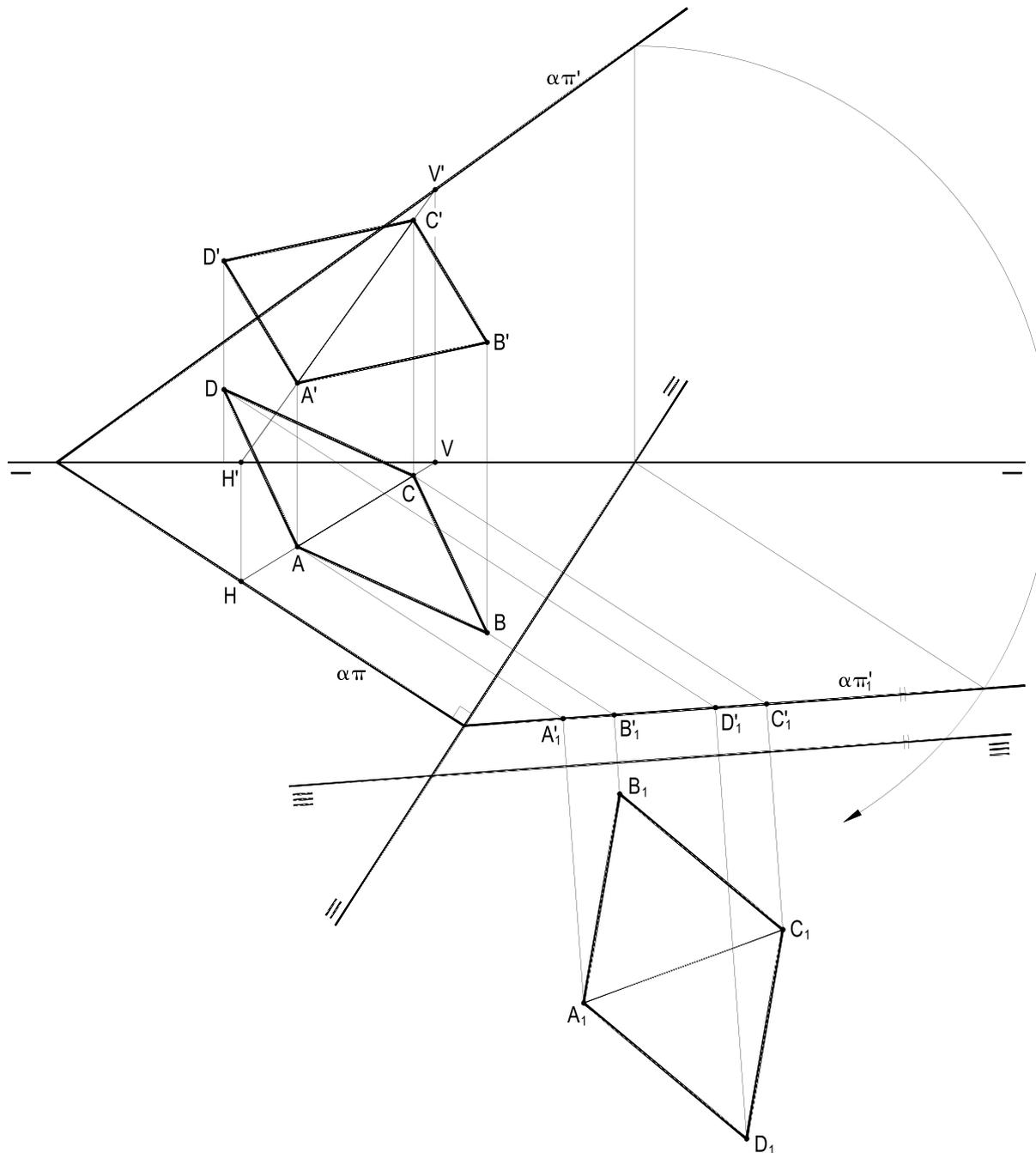


Figura 403

# CAPÍTULO IX

## MÉTODOS DESCRITIVOS ROTAÇÕES

### 92 – Método das rotações

Ao contrário do primeiro dos três métodos descritivos, o das mudanças dos planos de projeção, que, como vimos, conserva fixas as figuras em estudo, modificando as posições dos planos referenciais, em busca de situações mais favoráveis, os outros dois deixam fixos o par de planos de projeção ( $\pi$ ) e ( $\pi'$ ), modificando as posições das figuras em análise, girando-as em torno, sempre, de um eixo retilíneo.

Aliás, já se deve adiantar que o terceiro método, que detalharemos no Capítulo X, é um caso particular do de rotações e que ocorre quando o eixo da rotação escolhido pertence ao plano a ser girado.

Denomina-se rotação o movimento tal que todos os pontos da figura em estudo girem em torno de um eixo retilíneo fixo, em amplitudes angulares e sentidos iguais, descrevendo, assim, arcos de círculo correspondentes a ângulos centrais iguais, num mesmo sentido, sempre com centros sobre o eixo e em planos perpendiculares a esse eixo, denominado eixo da rotação (Figura 404).

Conforme a natureza da figura girante, seus pontos podem descrever arcos de círculo de raios diversos.

Quando existe, entre todos esses círculos, um com raio menor que todos os demais, ele é denominado círculo de gola, como é o círculo (c) da Figura 404; quando existe um com raio maior que todos os demais, ele é dito equador da rotação.

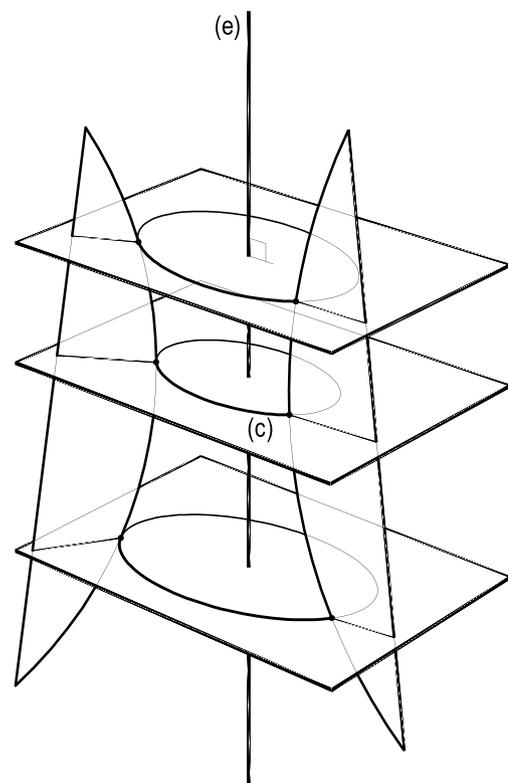


Figura 404

### 93 – A escolha do eixo

Muitas vezes, por imposição do problema em questão, o eixo de rotação é predefinido, mas, quando se trata de obter verdadeiras grandezas, como adiante veremos, uma boa escolha da posição do eixo pode simplificar a resolução desejada.

Vejamos, então, as conveniências que podem ser conseguidas, conforme a natureza do eixo de rotação.

#### 93.1 – Eixos verticais e de topo.

As especialíssimas naturezas desses dois tipos de eixo, que são perpendiculares a um dos planos de projeção, proporcionam que os círculos descritos no movimento se projetem em V.G. sobre  $(\pi)$  ou sobre  $(\pi')$ , o que simplifica sobremaneira a resolução das questões em estudo (Figuras 405 e 406).

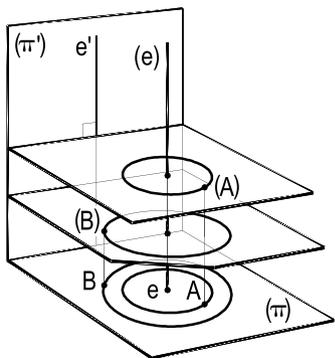


Figura 405

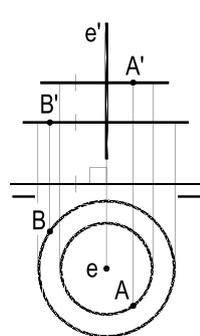


Figura 406

#### 93.2 – Eixo fronto-horizontal.

Por ser perpendicular aos planos de perfil, é também ótima a escolha do eixo paralelo à linha de terra, proporcionando que cada círculo descrito por um ponto, na rotação, venha projetado em V.G., sobre qualquer desses planos, o que pode, então, ser facilmente trabalhado, numa vista lateral (Figura 407).

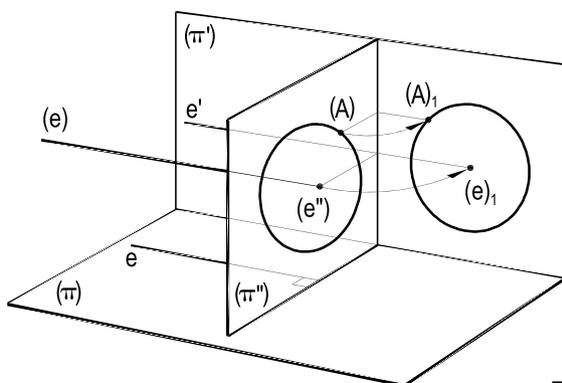
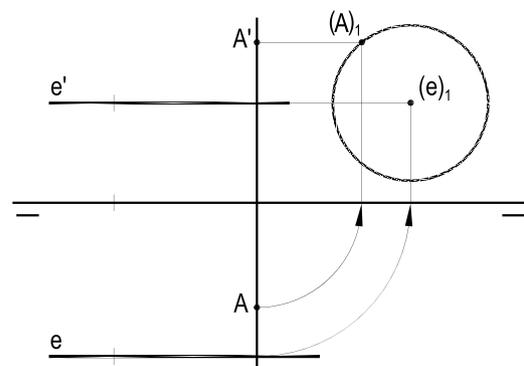


Figura 407



### 93.3 – Eixos horizontal e frontal.

Já não tão confortáveis são os eixos horizontais, ou frontais, por não serem perpendiculares a qualquer plano de projeção.

O que se faz, então, é lançar mão de uma mudança de plano (Figuras 408 e 409), para que os eixos se convertam de horizontal em de topo, ou de frontal em vertical, respectivamente.

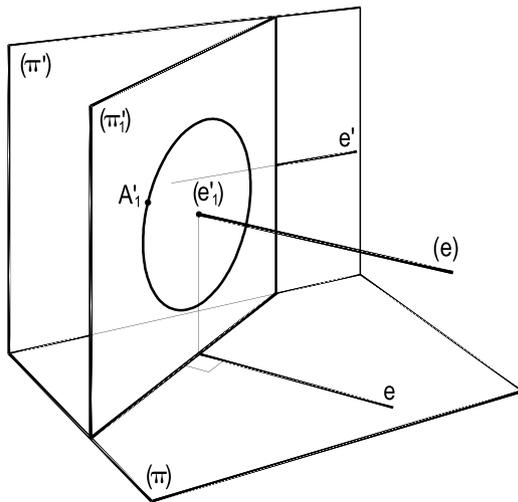


Figura 408

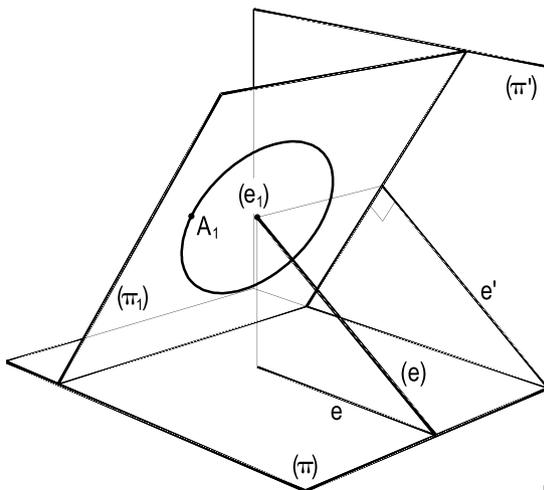
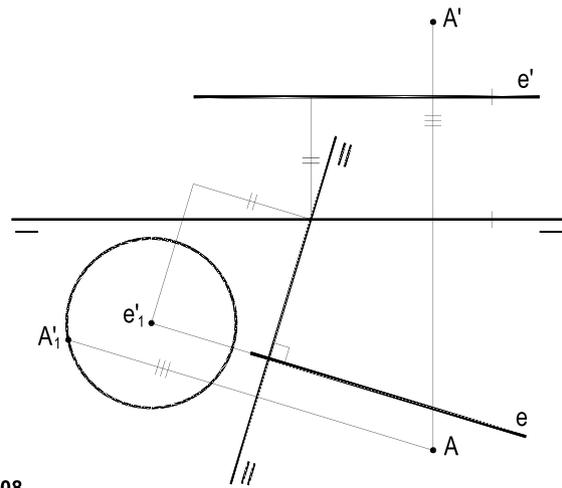
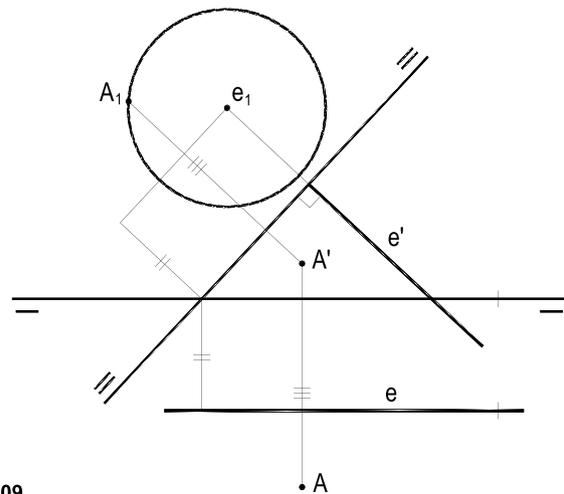


Figura 409



### 93.4 – Eixos de perfil e qualquer.

Quando o eixo da rotação é de perfil, ou qualquer, para que possam chegar a ocupar as confortáveis posições de verticais, ou de topo, serão necessárias duas mudanças de plano consecutivas, o que há de onerar em demasia as épuras correspondentes, motivo pelo qual se prefere operar com os rebatimentos dos planos perpendiculares aos eixos, para os pontos em estudo, tal como detalhado no Capítulo X, próximo.

## 94 – Rotação do ponto

Vamos considerar, doravante, apenas as rotações em torno de eixos verticais ou de topo, devendo-se operar como detalhado no item anterior para outros casos, se tal for imposto.

Na rotação de um ponto qualquer ( $A$ ) em torno de um eixo vertical ( $e$ ), vimos (número 93.1) que sua cota permanece constante, enquanto que sua projeção horizontal  $A$  gira em torno do ponto  $e$ , projeção horizontal do eixo, descrevendo um arco de círculo que se projeta em V.G. sobre  $(\pi)$  (Figura 405).

Quando a rotação de um ponto genérico ( $A$ ) se faz em torno de um eixo de topo (Figura 406), é sua projeção vertical que descreve um arco, em V.G., em torno do ponto  $e'$ , projeção vertical do eixo, mantendo o ponto ( $A$ ) constante seu afastamento.

## 95 – Problema direto

O problema direto, natural, consiste em, dados um eixo ( $e$ ) e um ponto ( $A$ ), exteriores, girar o ponto em torno do eixo, até que ele venha a atender a alguma condição imposta.

Seguem (Figuras 410 e 411) dois exemplos.

95.1 – Dados o ponto ( $A$ ), a reta ( $r$ ) e o plano ( $\alpha$ ) definido pelas retas concorrentes ( $a$ ) e ( $b$ ), pede-se girar ( $A$ ) em torno de ( $r$ ), até que ele venha a pertencer a ( $\alpha$ ).

Solução: Como o eixo dado ( $r$ ) é uma reta vertical, o ponto  $A$  descreve um círculo horizontal, em V.G. em sua projeção horizontal.

Assim, para que ( $A$ ) venha a pertencer ao plano ( $\alpha$ ), das retas ( $a$ ) e ( $b$ ), deve vir a pertencer à reta horizontal ( $h$ ), que tenha a sua cota, havendo, para as posições dadas, duas soluções ( $A_1$ ) e ( $A_2$ ), como indicado na Figura 410.

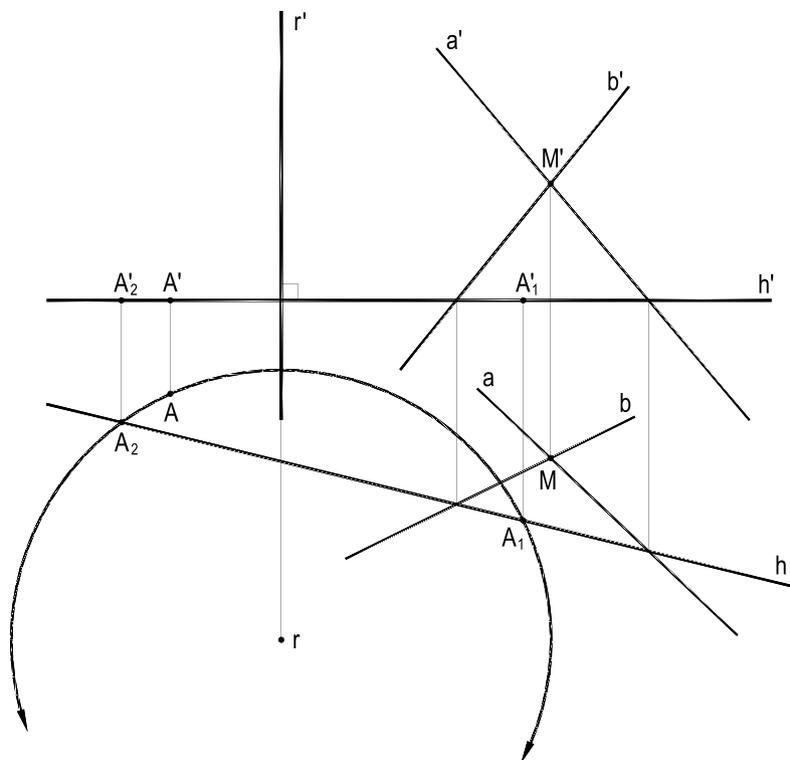


Figura 410

95.2 – Dados dois pontos (A) e (B) e uma reta (r), exteriores, pede-se girar (A) em torno de (r) e, mantendo-se fixo o ponto (B), fazer com que, em sua nova posição, (A) forme com (B) uma reta concorrente com a linha de terra.

Solução: Para que a futura reta  $(A_1)(B)$  possa concorrer com a linha de terra, ela deverá pertencer ao plano  $(\pi'\pi)-(B)$ .

Ora, como o eixo dado (r) é de topo, a rotação de (A) se faz por um círculo frontal (número 93.1) e, por ter afastamento constante e igual ao de (A), o ponto procurado  $(A_1)$  deve pertencer à reta (f), fronto-horizontal, com seu afastamento, e pertencente ao plano  $(\pi'\pi)-(B)$ .

Para as posições dadas, o problema oferece duas soluções  $(A_1)$  e  $(A_2)$ , como apresentado na Figura 411, onde, apenas por curiosidade, traçamos a reta  $(A_1)(B)$ , pedida e, efetivamente, concorrente com  $(\pi'\pi)$ .

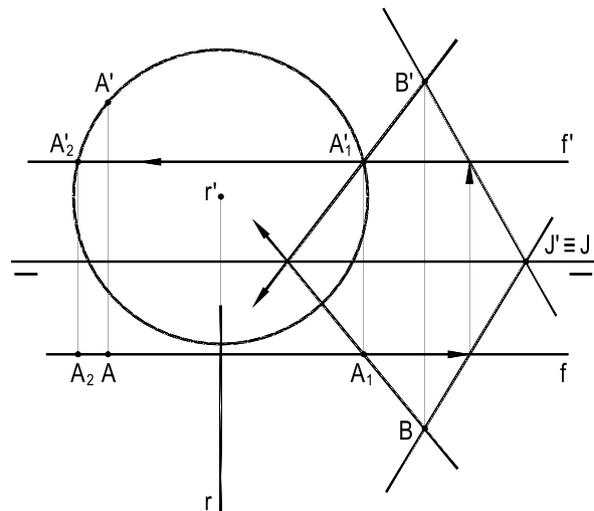


Figura 411

## 96 – Rotação de reta concorrente com o eixo

Quando uma reta (r) sofre uma rotação completa em torno de um eixo (e), com ela concorrente num ponto (V), ela gera uma superfície cônica de revolução de duas folhas (*Geometria Espacial*, número 182.3), da qual (V) é o vértice e as retas (r), em seu movimento, as geratrizes.

Cabe destacar (*Geometria Espacial*, número 183) as seguintes propriedades dessa rotação (Figura 412):

- cada ponto (A) de (r) se movimenta sobre um círculo pertencente a um plano  $(\varphi)$  perpendicular ao eixo (e);
- é constante o valor do ângulo  $\alpha$  que (r), em todas as suas posições, forma com o plano  $(\varphi)$ ;
- é também constante o ângulo  $\gamma$  (complemento de  $\alpha$ ), que (r), em todas as suas posições, forma com o eixo (e).

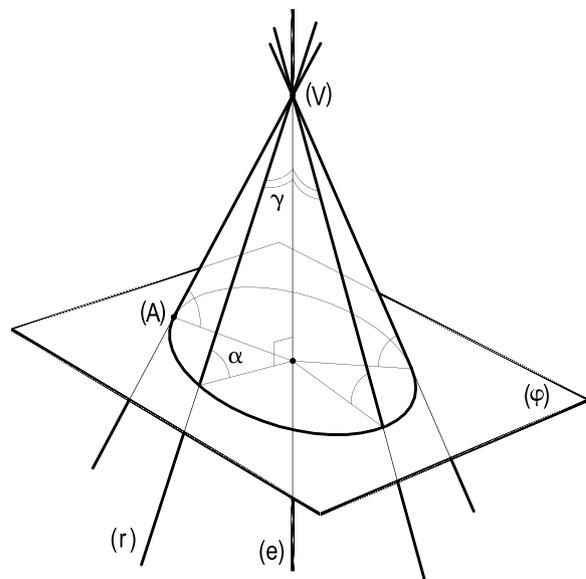


Figura 412

## 97 – A escolha do eixo

Tal como foi visto no estudo da rotação de um ponto, os eixos mais convenientes para a rotação de uma reta com ela concorrente são os verticais e os de topo, por oferecerem, em V.G., uma das projeções dos círculos da rotação.

E, mais que isso, tais rotações, como mostram as Figuras 413 e 414, proporcionam obter as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que a reta, em estudo, forma, com cada plano de projeção, ao ser levada, respectivamente, às posições frontal (Figura 413) ou horizontal (Figura 414). Em ambas as posições, consegue-se, também, a verdadeira grandeza  $d$  de um segmento (AB) qualquer da reta dada.

Observe-se que, nos dois exemplos a seguir apresentados, foi excluída, das épuras, a linha de terra, o que, em nada, prejudicou as construções.

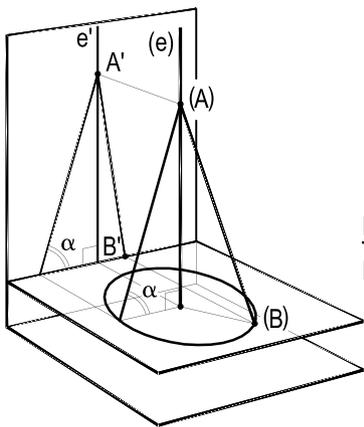


Figura 413

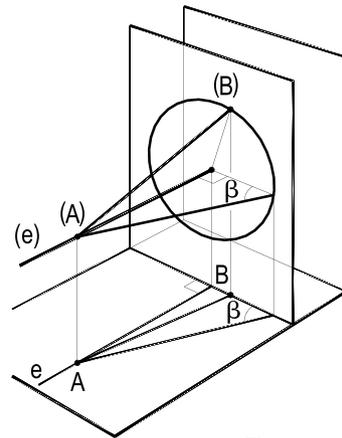
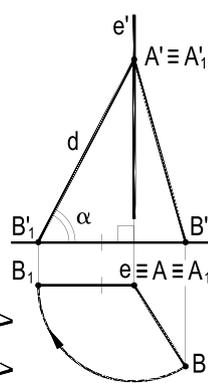
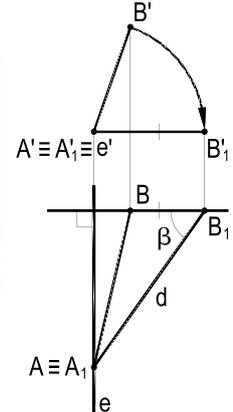


Figura 414



Fica claro quanto mais simples, para as obtenções destas verdadeiras grandezas, é o método das rotações, comparado com o das mudanças (número 84.1).

Naturalmente, o eixo pode ter natureza diversa dessas duas, tudo se passando como detalhado no estudo da rotação do ponto (números 93.2 e 93.3).

## 98 – Problema direto

Além das determinações das verdadeiras grandezas de segmentos de reta qualquer e dos ângulos que ela forma com os planos de projeção, os problemas diretos consistem em, dados uma reta (r) e um eixo (e), com ela concorrente, fazer girar (r) em torno de (e), até que seja atendida determinada condição imposta.

Seguem alguns exemplos, não apenas com os preferidos eixos verticais ou de topo (Figuras 415, 416 e 418), mas também de natureza diversa (Figura 417).

98.1 – Dadas as retas concorrentes (r) e (e), além da fronto-horizontal (f) a elas reversa, pede-se girar (r) em torno de (e), até que (r) venha a concorrer com (f).

Solução: Como a reta fixa (f) tem cota constante, tanto quanto os pontos da reta girante (r), por ser vertical o eixo (e), convém aproveitar o ponto (P) de (r), que tem a mesma cota que a reta (f), e girá-lo até que ele venha a pertencer a esta reta.

Pela posição dos dados, o problema oferece duas soluções ( $P_1$ ) e ( $P_2$ ) para esse ponto (P) e, portanto, duas posições ( $r_1$ ) e ( $r_2$ ) para a reta em estudo (Figura 415).

98.2 – Girar a reta qualquer (r) em torno do eixo (e), com ela concorrente, até que ela venha a ficar paralela ao bissetor par.

Solução: Como, para ser paralela a ( $\beta_{24}$ ), uma reta deve ter suas projeções paralelas (número 29), todos os seus pontos possuem, em épura, distâncias iguais entre suas projeções.

Assim, qualquer outro ponto (B) de (r) deverá, na posição final ( $B_1$ ), apresentar, em épura, sobre sua linha de chamada, um segmento  $B'_1B_1$  igual a  $A'A$ , correspondente ao ponto (A) comum ao eixo (e) e à reta girante (r).

Então, escolhido um ponto (B) qualquer de (r), por ser de topo o eixo (e), durante a rotação, (B) manterá constante seu afastamento. Logo, basta procurar a nova projeção vertical do ponto (B), distante um valor  $A'A$  da projeção horizontal B, inicial, daquele ponto (B).

Como indicado na Figura 416, o problema conta com duas soluções, correspondentes às novas posições  $B'_1$  e  $B'_2$  da projeção vertical do ponto girante (B). Na épura, foi apresentada apenas uma das duas soluções para a nova reta ( $r_1$ ).

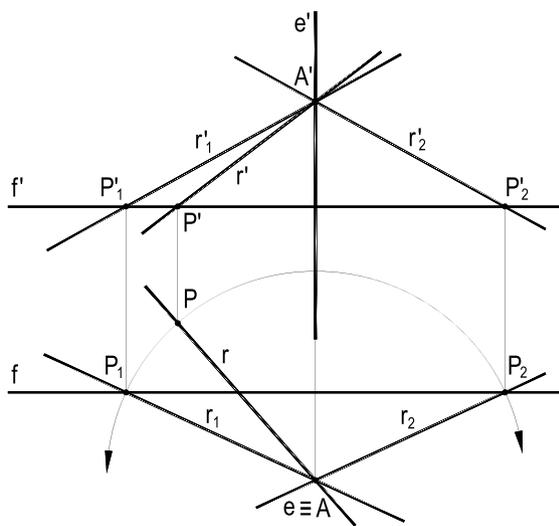


Figura 415

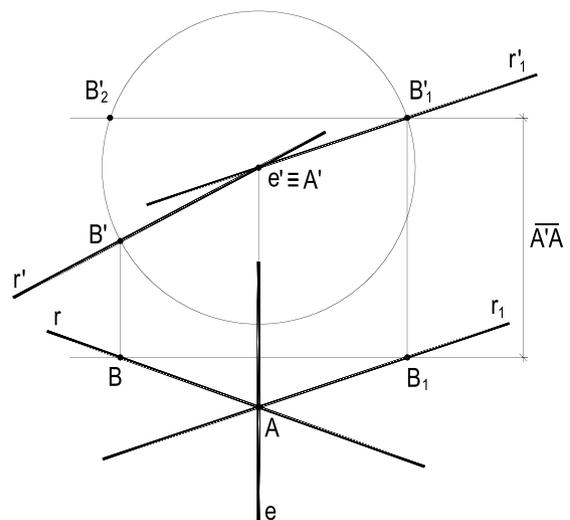


Figura 416

98.3 – Girar a reta qualquer ( $r$ ), em torno do eixo fronto-horizontal ( $e$ ), concorrente com ela, até que ( $r$ ) venha a concorrer com a reta de perfil  $(A)(B)$ . Dadas, por suas projeções, as retas ( $r$ ), ( $e$ ) e  $(A)(B)$ .

Solução: Com uma mudança de ( $\pi$ ), transforma-se o eixo ( $e$ ) em vertical, levando ( $r$ ) e  $(A)(B)$  a esse novo sistema projetivo, para o qual  $(A)(B)$  foi transformada numa reta horizontal.

Nesse novo sistema, o círculo da rotação do ponto ( $J$ ), de ( $r$ ), de mesma abscissa que  $(A)(B)$ , vem em V.G. na nova projeção horizontal.

Obtêm-se, assim, nessa nova projeção horizontal, os pontos  $M_1$  e  $N_1$ , que, retornados ao sistema original (Figura 417), fornecem as duas soluções, tendo sido representada apenas uma na épura da Figura 417 – a reta ( $r_1$ ), concorrente com  $(A)(B)$  no ponto ( $M$ ).

98.4 – Dadas uma reta horizontal ( $r$ ) e uma vertical ( $e$ ), concorrentes, girar ( $r$ ) em torno de ( $e$ ) até que ela fique paralela aos bissetores.

Solução: Como a horizontal ( $h$ ) é perpendicular ao eixo ( $e$ ), neste caso particular de concorrência, ( $h$ ) girará no próprio plano horizontal que a contém (Figura 418).

E, para poder ser paralela aos dois bissetores, tem de chegar a ser paralela à linha de terra, única natureza de reta com tal possibilidade, entre as que pertencem a esse tipo de plano.

Basta, então, girar um ponto ( $B$ ), qualquer, da reta ( $h$ ), até que ele venha a ter o mesmo afastamento do eixo ( $e$ ) (Figura 418).

O problema oferece apenas uma solução, embora exista uma segunda posição para a nova projeção do ponto ( $B$ ), que, no entanto, resulta na mesma fronto-horizontal ( $h_1$ ) (Figura 418).

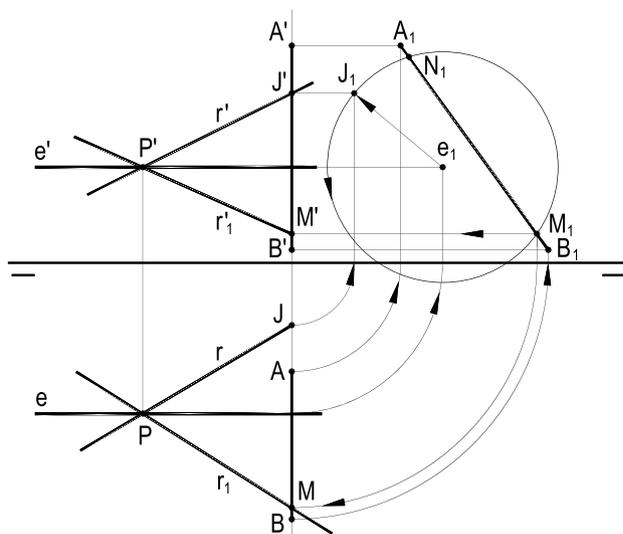


Figura 417

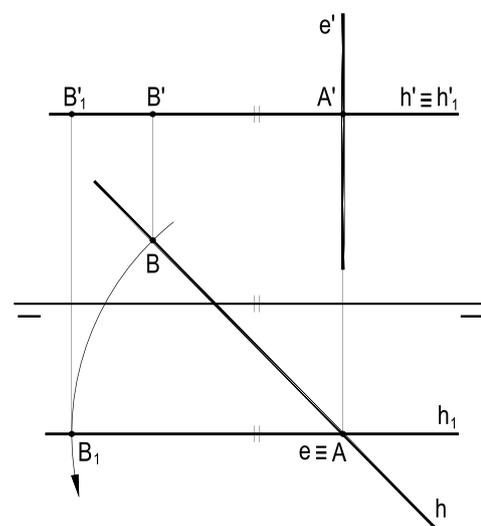


Figura 418

## 99 – Rotação de reta reversa ao eixo

Numa rotação, parcial ou total, em torno de um eixo (e), uma figura (f) mantém-se rigidamente ligada ao eixo, todos os seus pontos (A) girando segundo arcos de círculo de amplitudes angulares e sentidos iguais, descritos em planos perpendiculares a (e), como na Figura 419.

Por isso, nesse movimento, cada ponto (A) de (f) manterá invariável sua distância ao eixo (e), até chegar à posição final (A<sub>1</sub>), ao término da rotação.

Assim, quando uma reta (A)(B), reversa a um eixo vertical (e), sofre uma rotação em torno desse eixo, ela permanece, em seu movimento, pertencente a um plano (γ), perpendicular a (π) e tangente a uma superfície cilíndrica de revolução de eixo (e) (Figura 420).

E, porque (A)(B) se mantém, durante a rotação, rigidamente ligada ao eixo (e), a perpendicular (O)(T), comum a (A)(B) e a (e), conserva valor constante, enquanto gira num círculo de um plano horizontal (Figura 420).

Assim, em épura (Figura 421), quando a reta (A)(B) sofre rotação em torno do eixo vertical (e), reverso a ela:

- seus pontos, por girarem ao longo de planos horizontais, mantêm constantes suas cotas;
- suas projeções horizontais – AB, inicial e A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, final – são tangentes a um círculo, que tem centro na projeção horizontal e do eixo;
- e, porque (A)(B) gira rigidamente associado ao eixo (e), a posição do ponto de contato T, sobre  $\overline{AB}$ , se mantém, igualando a posição de T<sub>1</sub> sobre  $\overline{A_1B_1}$ , ou seja:

$$\overline{A_1T_1} = \overline{AT}$$

$$e \quad \overline{T_1B_1} = \overline{TB}$$

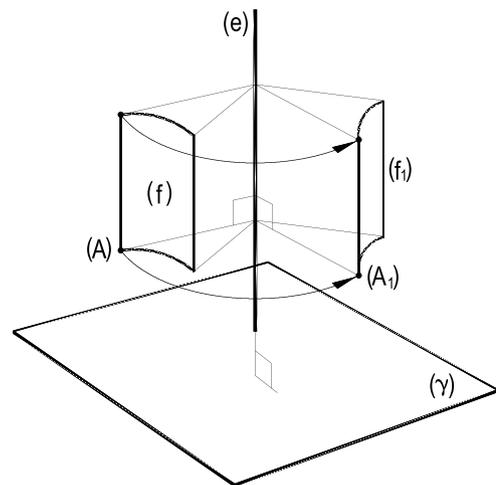


Figura 419

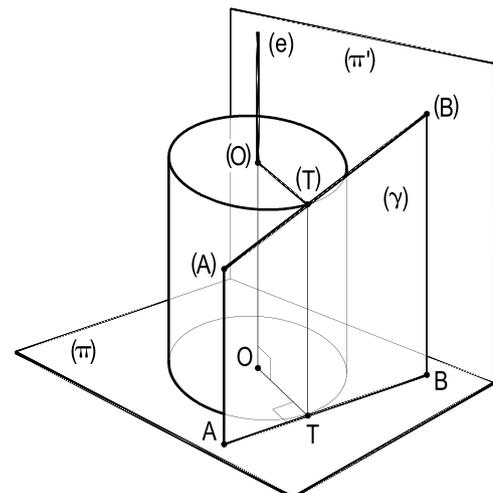


Figura 420

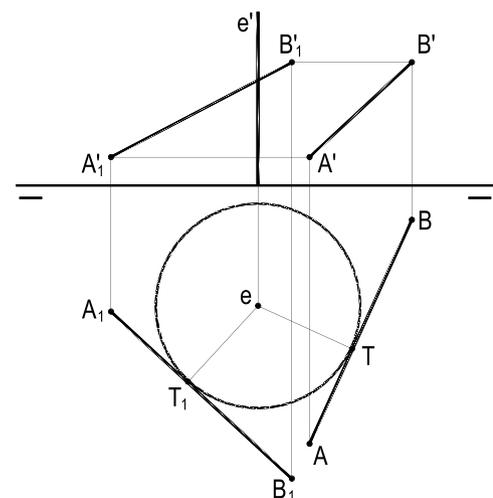


Figura 421

Então, para girar uma reta qualquer ( $r$ ) em torno de um eixo vertical ( $e$ ), reverso a ( $r$ ), deve-se tomar um qualquer de seus pontos ( $A$ ), que manterá constante sua cota, e construir, em projeção horizontal, o círculo de centro  $e$ , tangente a  $r$ , no ponto  $T$  (Figura 422), projeção horizontal de ( $T$ ).

Da posição final  $A_1$ , daquele ponto  $A$ , constrói-se a tangente ao círculo da projeção horizontal, obtendo-se a projeção  $T_1$  do ponto de contato  $e$ , em seguida,  $T'_1$  de cota igual à de  $T'$  (Figura 422).  $A'_1$  e  $T'_1$  definem a projeção  $r'_1$ , de ( $r$ ), ao final da rotação.

É claro que poder-se-ia, também, para girar uma reta qualquer ( $r$ ) em torno de um eixo vertical ( $e$ ), reverso a ela, efetuar as rotações de dois pontos ( $A$ ) e ( $B$ ) de ( $r$ ), obedecendo as igualdades das amplitudes angulares (Figura 423) e dos sentidos desses dois movimentos, o que seria assegurado, na prática, por exemplo, repetindo o valor do arco 12 no arco 34 (Figura 423).

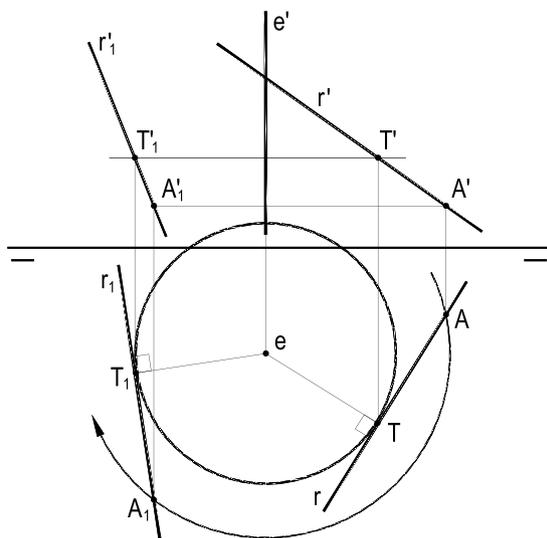


Figura 422

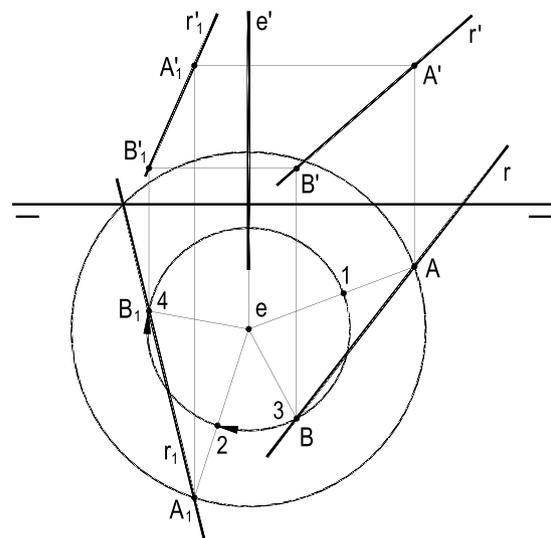


Figura 423

Sendo de topo o eixo ( $e$ ) (Figura 424), tudo se passa da mesma forma, com os círculos correspondentes às rotações dos pontos em estudo, apresentando-se em V.G. em suas projeções verticais e mantidos constantes seus afastamentos.

Na Figura 424, foi utilizado o mesmo método detalhado no primeiro dos dois procedimentos analisados acima, para eixos verticais, agora, com tangentes ao círculo na projeção vertical, é claro.

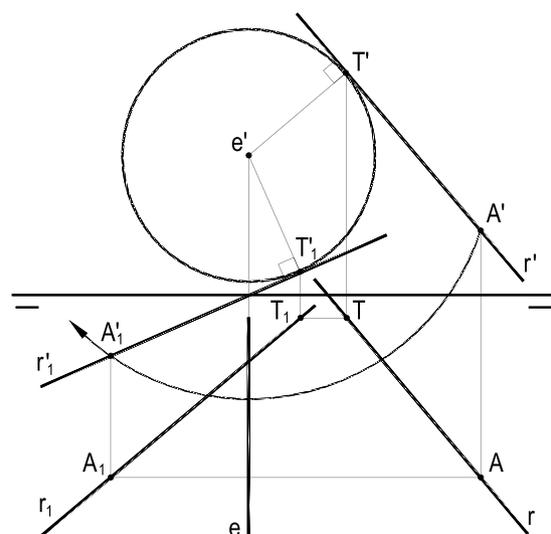


Figura 424

## 100 – A escolha do eixo

Tal como no estudo da rotação de um ponto, ou de uma reta concorrente com o eixo de rotação, (números 93 e 97), a escolha do eixo, para conveniência de épura, deve recair sobre posições perpendiculares a algum plano de projeção, permitindo o traçado circular do movimento de cada ponto acontecer em V.G. numa de suas projeções.

Por isso, mesmo quando a reta em estudo é reversa ao eixo, em sendo possível, este deve ser vertical, como em todos os exemplos anteriores, ou de topo (Figura 425), ou, eventualmente, fronto-horizontal, quando uma simples mudança faz recair a questão numa das duas anteriores. No caso da Figura 426, optou-se por uma mudança de  $(\pi)$ , transformando o eixo  $(e)$  em uma vertical.

Se, por imposição da questão proposta, o eixo tiver outra natureza (horizontal, frontal, de perfil ou qualquer), tal como analisado para eixos concorrentes com as retas girantes (número 97), dever-se-á proceder a uma mudança de plano, ou duas consecutivas, para os casos mais complexos, fazendo, sempre, recair a situação em rotações em torno de eixos verticais ou de topo.

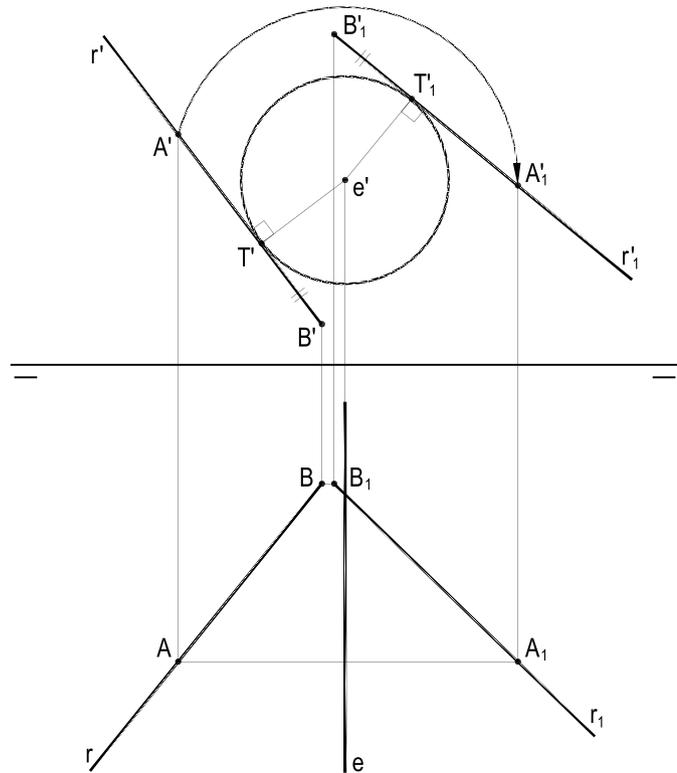


Figura 425

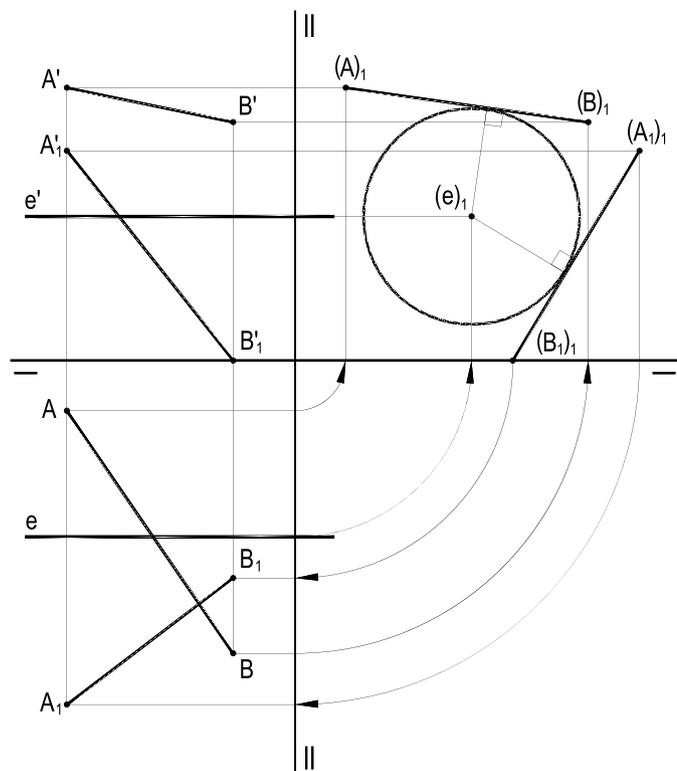
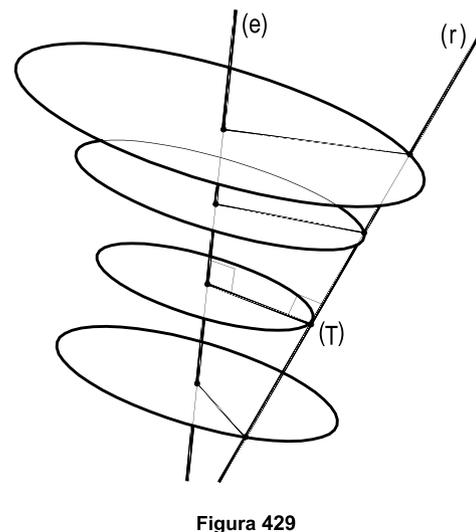
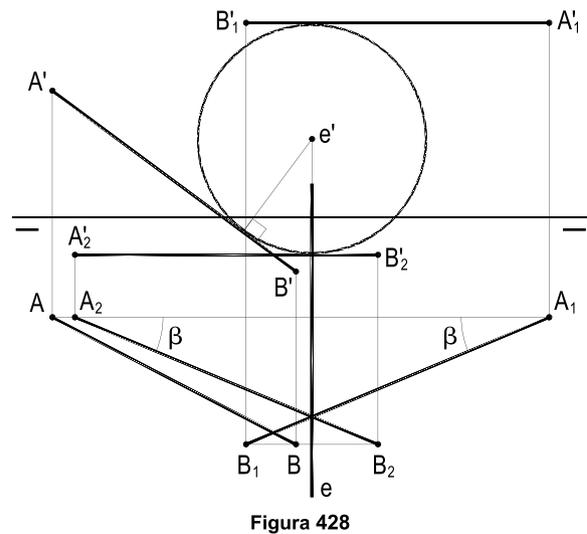
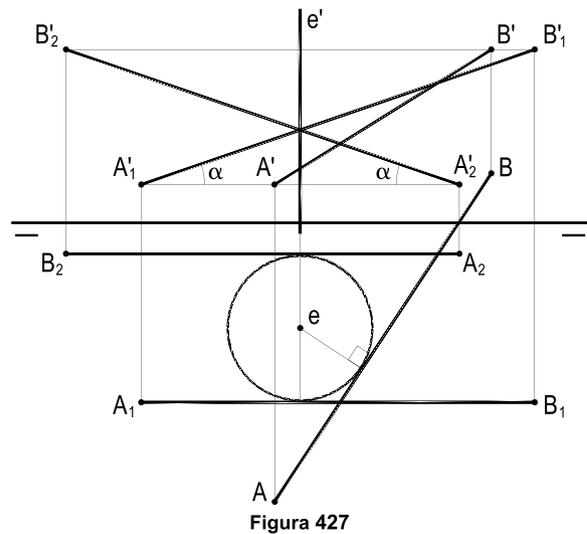


Figura 426

## 101 – Observações

- Quando o eixo é vertical, uma reta qualquer ( $r$ ) a ele reversa, assume, em seu movimento, por duas vezes, diametralmente opostas, a posição frontal, o que proporciona, em projeção vertical, as verdadeiras grandezas  $\overline{A_1B_1}$  ou  $\overline{A_2B_2}$ , de seus segmentos e  $\alpha$  do ângulo que ela forma com  $(\pi)$  (Figura 427).
- Quando o eixo ( $e$ ) é de topo, tudo se passa de maneira equivalente, e a reta qualquer ( $r$ ), em sua rotação, passa duas vezes (Figura 428) pela posição horizontal, apresentando, então, as verdadeiras grandezas  $\overline{A_1B_1}$  e  $\overline{A_2B_2}$  de seu segmento  $(A)(B)$  e do ângulo ( $\beta$ ) que ela forma com  $(\pi')$ .
- Nas rotações de uma reta ( $r$ ), reversa a um eixo genérico ( $e$ ), todos os pontos de ( $r$ ), como visto, descrevem arcos de círculos de raios variáveis. Dentre todos eles, o que corresponde ao menor desses raios é o ponto ( $T$ ), pé da perpendicular comum a ( $r$ ) e a ( $e$ ) (Figura 429), por ser ( $T$ ) o ponto de ( $r$ ) mais próximo de ( $e$ ) (*Geometria Espacial*, número 32). Assim, o arco descrito por ( $T$ ) pertence ao círculo de gola do movimento (ver número 92).



- Situação particular acontece quando uma reta que gira é paralela ao eixo, gerando uma superfície cilíndrica de revolução.

Sendo o eixo vertical (Figura 430), o círculo da projeção horizontal se faz em V.G. e basta girar um ponto da reta, para obter sua nova posição.

- Particulares, também, são os casos da reta girando ser perpendicular (Figura 431) ou ortogonal (Figura 432) ao eixo.

Sendo vertical o eixo (e), estas rotações darão, em geral, origens a retas horizontais, situadas num mesmo plano perpendicular ao eixo e, em posições ainda mais particulares, a retas fronto-horizontais ou de topo como, respectivamente, as retas ( $r_3$ ) e ( $r_2$ ), tanto na Figura 431 quanto na Figura 432.

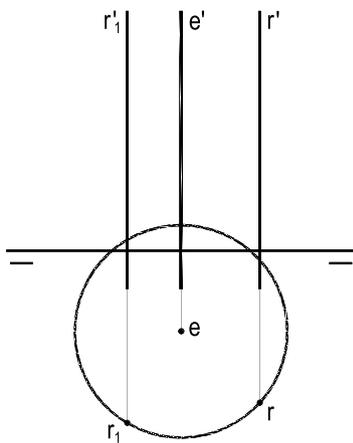


Figura 430

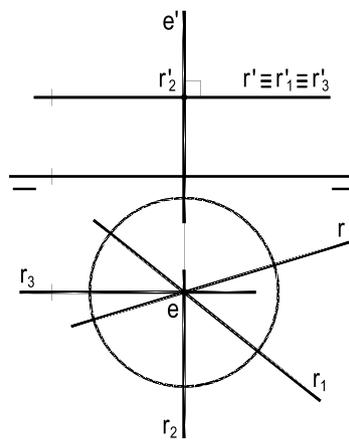


Figura 431

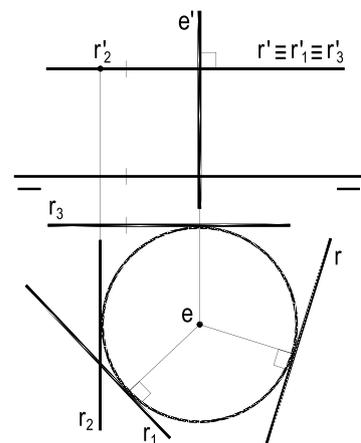


Figura 432

## 102 – Rotação do plano

Para estudar a rotação de um plano ( $\alpha$ ) em torno de um eixo retilíneo (e), observemos que ( $\alpha$ ) e (e) podem ser secantes, paralelos ou pertencer um ao outro.

Ficam as seguintes hipóteses:

- ( $\alpha$ ) é oblíquo a (e);
- ( $\alpha$ ) é perpendicular a (e);
- ( $\alpha$ ) é paralelo a (e);
- ( $\alpha$ ) contém (e).

Passemos a analisá-las.

### 103 – Rotação de plano secante ao eixo

Quando um plano ( $\alpha$ ) sofre rotação em torno de um eixo ( $e$ ) a ele oblíquo, o plano se move sempre tangente a uma superfície cônica de revolução, que tem por eixo o próprio eixo ( $e$ ) de rotação e, portanto, por vértice o ponto ( $V$ ), interseção de ( $e$ ) com ( $\alpha$ ) (Figura 433).

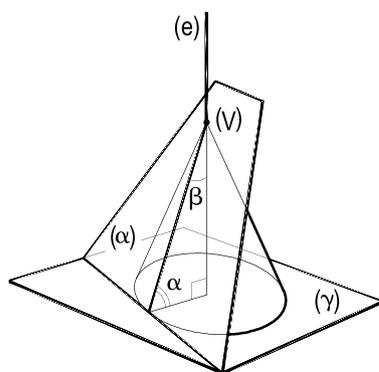


Figura 433

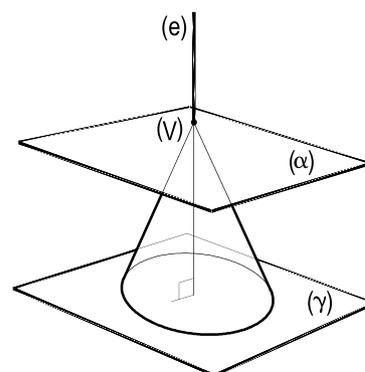


Figura 434

É de notar que são constantes e complementares, ao longo do movimento, os ângulos que ( $\alpha$ ) forma com ( $e$ ) e com o plano referencial ( $\gamma$ ), tomado perpendicular a ( $e$ ).

No caso particular em que ( $\alpha$ ) é perpendicular a ( $e$ ), o plano gira sobre si mesmo, fazendo com que todos os seus pontos e suas figuras girem, nesse próprio plano, em torno do ponto ( $V$ ), traço de ( $e$ ) em ( $\alpha$ ) (Figura 434).

### 104 – A escolha do eixo

Como em situações anteriores, convém que os eixos escolhidos sejam verticais ou de topo, para simplificar as épuras.

Deve-se, sempre, inicialmente, determinar a interseção ( $V$ ) de ( $\alpha$ ) com ( $e$ ), ponto que permanecerá fixo durante a rotação e, em seguida, se o eixo for vertical, girar o traço horizontal  $\alpha\pi$

do plano, até sua posição final  $\alpha_1\pi$ , reta que definirá, com aquele ponto fixo ( $V$ ), a nova posição ( $\alpha_1$ ) do plano em movimento (Figura 435).

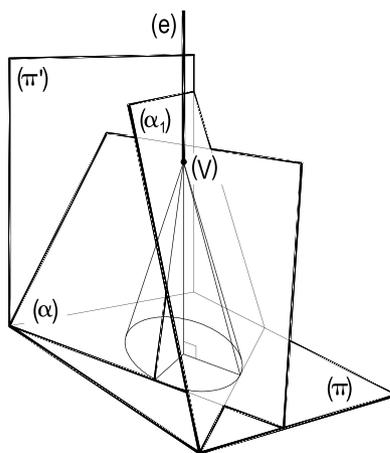


Figura 435

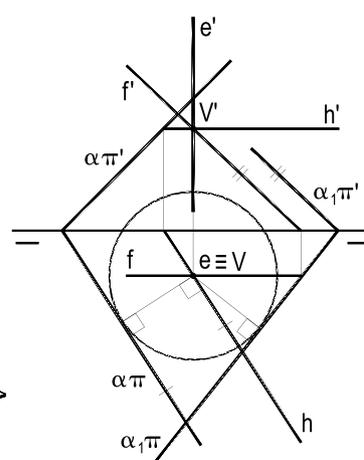


Figura 436

Em épura (Figura 436), o ponto ( $V$ ) foi obtido com o auxílio da horizontal ( $h$ ) e o traço vertical  $\alpha_1\pi'$ , da posição final do plano girado, com a utilização da frontal ( $f$ ).

Fosse de topo o eixo ( $e$ ), após obter-se o traço ( $V$ ) de ( $e$ ) com o plano girante ( $\alpha$ ), dever-se-ia, naturalmente, operar com o círculo da rotação do traço  $\alpha\pi'$  (Figura 437).

Quando o plano ( $\alpha$ ) em estudo não vem dado por seus traços, para girá-lo em torno de um eixo vertical ( $e$ ), após obter o traço ( $V$ ) de ( $e$ ) em ( $\alpha$ ), deve-se girar uma horizontal ( $h$ ) de ( $\alpha$ ), até sua posição final ( $h_1$ ) (Figura 438).

Observe-se como foi simples, após tal rotação, obter os traços do plano ( $\alpha_1$ ), posição final de ( $\alpha$ ), para o que se fez uso da posição ( $h_1$ ) daquela horizontal, depois da rotação efetuada (Figura 438).

Para eixos de outra natureza, operando com uma ou duas mudanças de ( $\pi$ ), ou de ( $\pi'$ ), consegue-se retornar às condições acima detalhadas para os especiais eixos verticais ou de topo.

### 105 – Aplicações

As mais usuais aplicações são as obtenções das verdadeiras grandezas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que um plano qualquer ( $\gamma$ ) forma, respectivamente, com ( $\pi$ ) e com ( $\pi'$ ), com rotações que o transformem em plano de topo (Figuras 439 e 441) ou vertical (Figura 440).

Mesmo para planos não dados por seus traços, o processo é bem simples, efetuando-se a rotação de uma horizontal ( $h$ ) do plano, até que ela assumia a posição de topo ( $h_1$ ) (Figura 441).

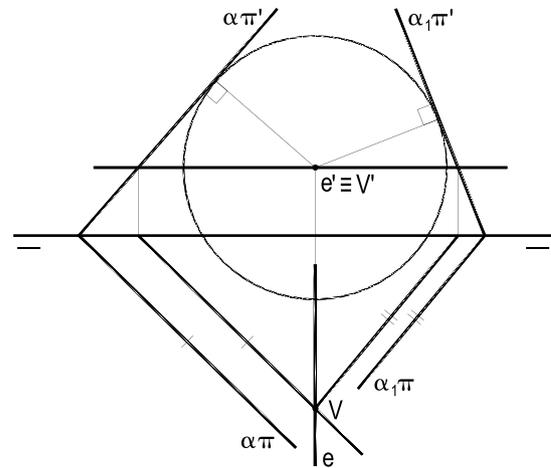


Figura 437

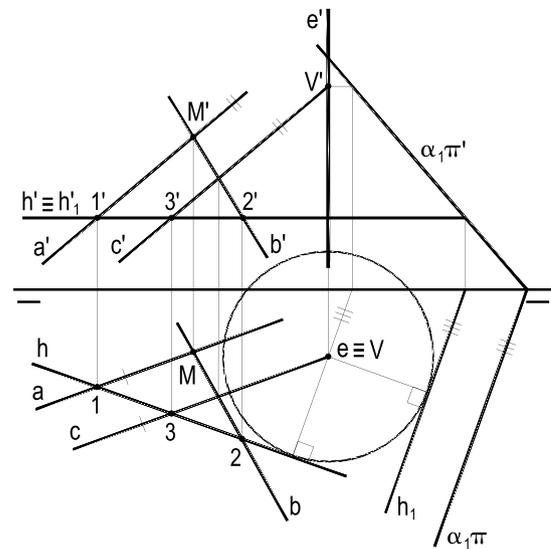


Figura 438

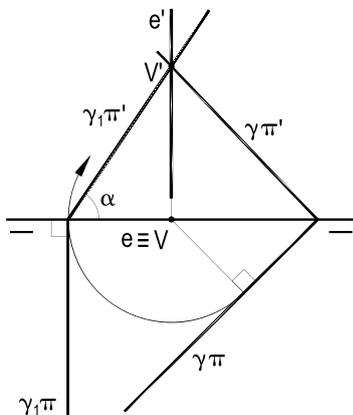


Figura 439

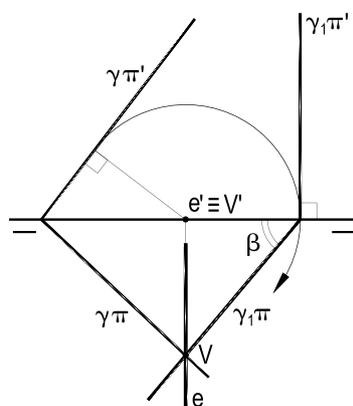


Figura 440

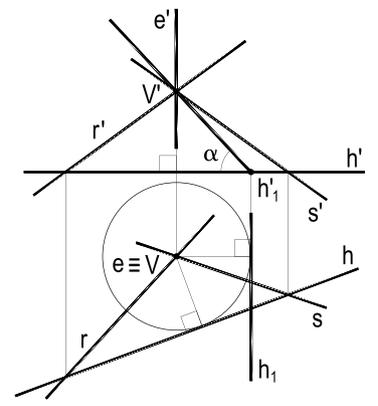


Figura 441

## 106 – Rotação de plano paralelo ao eixo

Quando um plano ( $\alpha$ ) sofre rotação em torno de um eixo ( $e$ ) a ele paralelo, o plano se desloca tangenciando uma superfície cilíndrica de revolução, cujo eixo é o próprio eixo ( $e$ ) de rotação e cujo raio é a distância  $d$  do eixo ao plano (Figuras 442 e 443).

Assim, para efetuar a rotação, basta girar uma reta do plano preferencialmente ortogonal ao eixo, pois o plano se manterá, sempre, paralelo ao eixo.

Mais uma vez, os eixos desejáveis são os verticais (Figura 442) ou de topo (Figura 443).

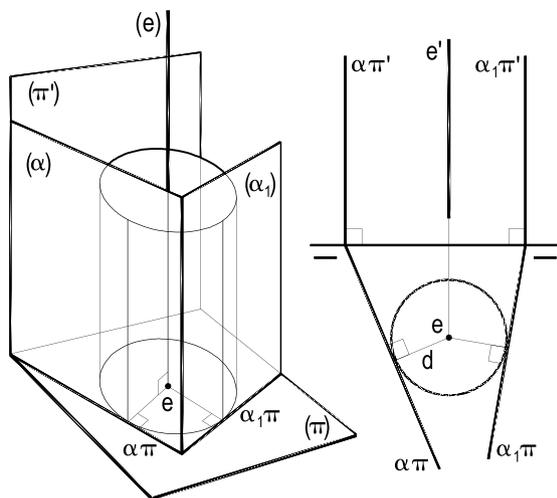


Figura 442

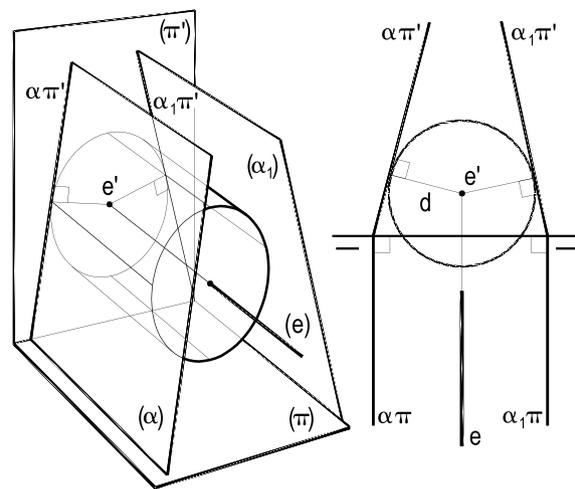


Figura 443

## 107 – Rotação de um plano em torno de eixo a ele pertencente

Quando um plano ( $\gamma$ ) gira em torno de um eixo ( $e$ ) a ele pertencente, todos os seus pontos, como ( $A$ ), na Figura 444, descrevem arcos de círculo situados em planos ( $\theta$ ), perpendiculares ao eixo ( $e$ ) e, então, perpendiculares a ( $\gamma$ ), em sua posição inicial e a ( $\gamma_1$ ), em sua posição final, após a rotação.

É claro, pois, que as distâncias de tais pontos ( $A$ ) e ( $A_1$ ), posição final daquele, em relação ao eixo ( $e$ ), são iguais (Figura 444).

Trata-se de caso muito particular e de especialíssima importância, por ser a essência, como logo se verá (Capítulo X), do terceiro método descritivo, o dos rebatimentos.

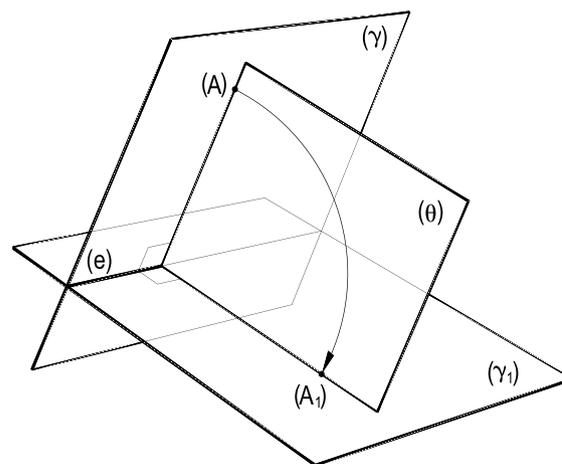


Figura 444

# CAPÍTULO X

## MÉTODOS DESCRITIVOS REBATIMENTOS

### 108 – Rebatimento de um plano sobre outro

Dados dois planos secantes  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , diz-se que rebater  $(\alpha)$  sobre  $(\beta)$  é girar  $(\alpha)$  em torno de sua interseção  $(\alpha\beta)$  com  $(\beta)$  até que os dois planos venham a coincidir.

A interseção  $(\alpha\beta)$  dos dois planos, o eixo de tal rotação, é denominada charneira ou eixo do rebatimento (Figuras 445 e 446).

Por se tratar de um movimento de rotação, para qualquer ponto  $(A)$  do plano  $(\alpha)$  a rebater, pode-se garantir (Figuras 445 e 446) que:

- o arco descrito no movimento pertence a um plano  $(\gamma)$  perpendicular à charneira  $(\alpha\beta)$ ;
- as distâncias do ponto  $(A)$  antes e depois da rotação à charneira  $(\alpha\beta)$  são iguais;
- todos os pontos da charneira  $(\alpha\beta)$  permanecem fixos durante o movimento;
- os raios do arco descrito pelo ponto  $(A)$ , em estudo, pertencem às retas de maior declive de  $(\alpha)$  em relação a  $(\beta)$  e de  $(\beta)$  em relação a  $(\alpha)$ , e, por isso, o ângulo  $\theta$ , entre eles formado, mede o ângulo que  $(\alpha)$  forma com  $(\beta)$ .

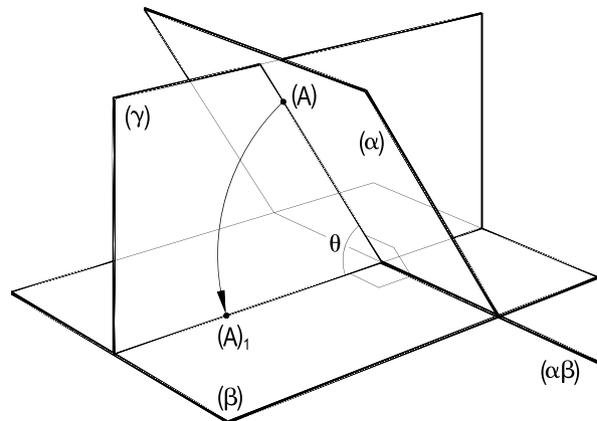


Figura 445

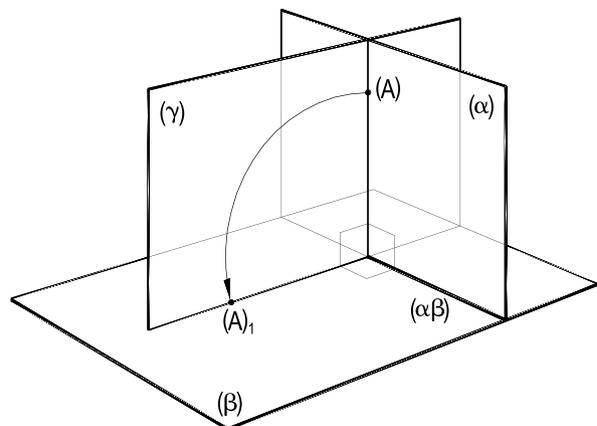


Figura 446

## 109 – Rebatimento de um plano sobre um plano de projeção

Porque o principal objetivo dos rebatimentos de planos é operar com as verdadeiras grandezas de suas figuras, o mais conveniente, sempre que possível, é que tais rebatimentos se façam sobre  $(\pi)$  ou sobre  $(\pi')$ .

No caso de rebatimento de um plano  $(\alpha)$  sobre  $(\pi)$  (Figura 447), cabe observar que:

- a charneira é o traço horizontal  $\alpha\pi$ ;
- a reta  $A(A)_1$ , formada pela projeção horizontal  $A$  de um ponto  $(A)$ , genérico, de  $(\alpha)$  e por seu rebatimento  $(A)_1$ , é perpendicular à charneira  $\alpha\pi$ .

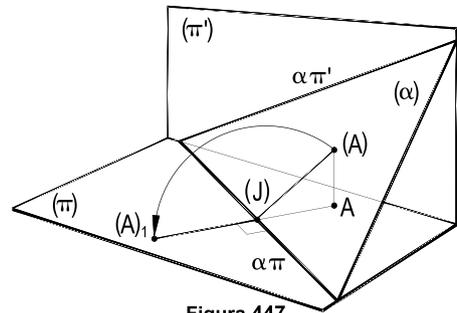


Figura 447

Para o rebatimento de  $(\alpha)$  sobre  $(\pi')$  (Figura 448), analogamente:

- a charneira é o traço vertical  $\alpha\pi'$ ;
- a reta  $A'(A)_1$ , formada pela projeção vertical  $A'$  de um ponto  $(A)$ , qualquer, do plano e por seu rebatimento  $(A)_1$ , é perpendicular à charneira  $\alpha\pi'$ .

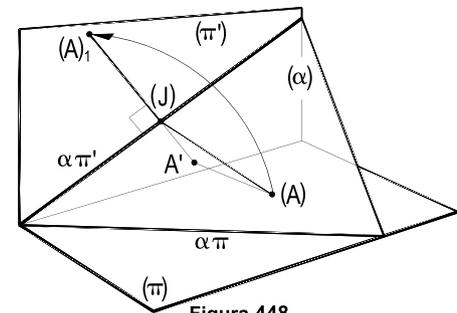


Figura 448

## 110 – Rebatimento de um plano sobre um plano horizontal ou frontal

Quando, por condições impostas, ou por limitações de espaço para operar, não for possível, ou for desvantajoso, rebater um plano sobre qualquer dos planos de projeção, pode-se optar por rebatê-lo sobre um plano horizontal, ou sobre um plano frontal, convenientemente escolhido.

A não ser pela mudança da charneira, que será, então, a interseção do plano  $(\alpha)$ , a rebater, com o plano  $(\gamma)$ , auxiliar, escolhido, todas as propriedades acima elencadas permanecerão válidas.

Na Figura 449, exemplificamos o caso do rebatimento do plano  $(\alpha)$  sobre um plano horizontal  $(\gamma)$ .

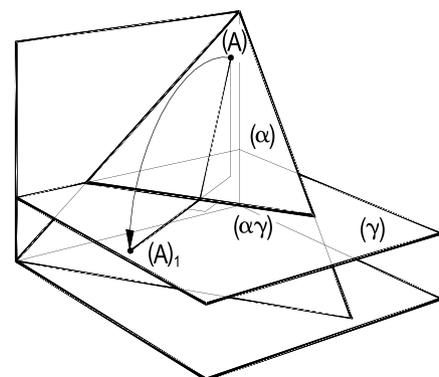


Figura 449

## 111 – Alçado

Denomina-se alçado, ou alçamento, o retorno dos elementos rebatidos ao ambiente original da é pura. Naturalmente, permanecem válidas, nos alçados, as propriedades acima listadas para os rebatimentos.

## 112 – Triângulo de rebatimento

Quando se rebate um plano ( $\alpha$ ) sobre outro ( $\beta$ ), oblíquo a ( $\alpha$ ), a um ponto ( $A$ ), qualquer de ( $\alpha$ ) e não pertencente à charneira ( $\alpha\beta$ ), pode-se associar um triângulo retângulo  $(A)\bar{A}\bar{J}$  (Figura 450), cuja hipotenusa  $(A)\bar{J}$  pertence a uma reta de maior declive de ( $\alpha$ ) em relação a ( $\beta$ ) e cujos catetos pertencem, respectivamente, à projetante  $(A)\bar{A}$  sobre ( $\beta$ ) e a uma reta de maior declive  $\bar{A}\bar{J}$ , de ( $\beta$ ) em relação a ( $\alpha$ ).

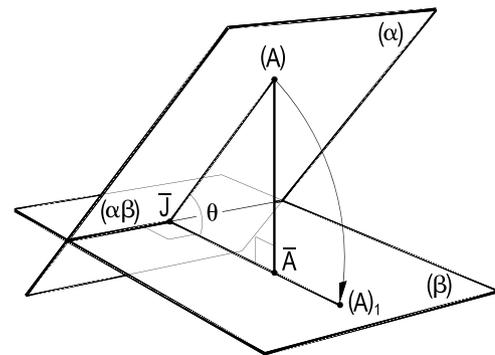


Figura 450

Tal triângulo retângulo  $(A)\bar{A}\bar{J}$  é denominado triângulo de rebatimento para o ponto ( $A$ ) e sua utilidade natural, além de elemento auxiliar na execução do rebatimento, como adiante se verá, é a apresentação do ângulo  $\theta$  formado pelos dois planos.

Nos exemplos antes apresentados, tais triângulos são  $(A)A(J)$  (Figura 447) e  $(A)A'(J)$  (Figura 448).

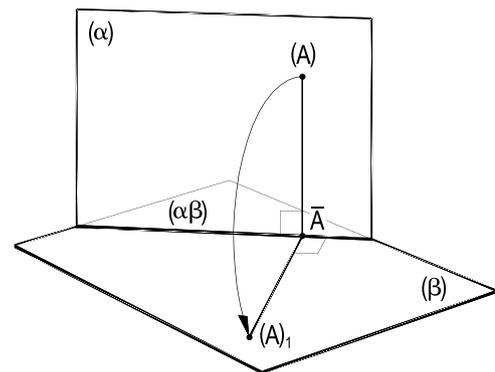


Figura 451

No caso particular em que ( $\alpha$ ) é perpendicular a ( $\beta$ ) (Figura 451), deixa de existir o triângulo de rebatimento para qualquer ponto ( $A$ ) de ( $\alpha$ ), permanecendo iguais, para todo ponto ( $A$ ) do plano, as distâncias à charneira ( $\alpha\beta$ ) antes e após o rebatimento.

## 113 – Porção útil de um plano

Porção útil, ou espaço útil, de um plano, para cada um dos diedros, é a porção do plano situada em tal diedro.

É claro que tais porções ficam limitadas pelos traços do plano.

Cabe observar que os planos horizontais, frontais e os pertencentes à linha de terra, por só atravessarem dois diedros, possuem apenas duas porções úteis, cada. Aos paralelos à linha de terra correspondem três porções úteis e os demais, verticais, de topo e quaisquer, por atravessarem, sempre, os quatro diedros, possuem quatro porções úteis.

Aliás, enquanto para os planos verticais e de topo, tais porções úteis correspondem a ângulos retos, já que seus traços são perpendiculares entre si, para os planos quaisquer, as porções úteis ocupam ângulos agudos e obtusos.

## 114 – Utilização da afinidade ortogonal nos rebatimentos

Consideremos o rebatimento de um plano genérico ( $\alpha$ ), oblíquo a ( $\pi$ ) sobre este plano de projeção, e observemos que por ser um sistema rígido, pertencente ao plano, o conjunto de retas de ( $\alpha$ ), paralelas ou não à charneira  $\alpha\pi$ , mantém essas posições relativas (Figura 452), após o rebatimento considerado.

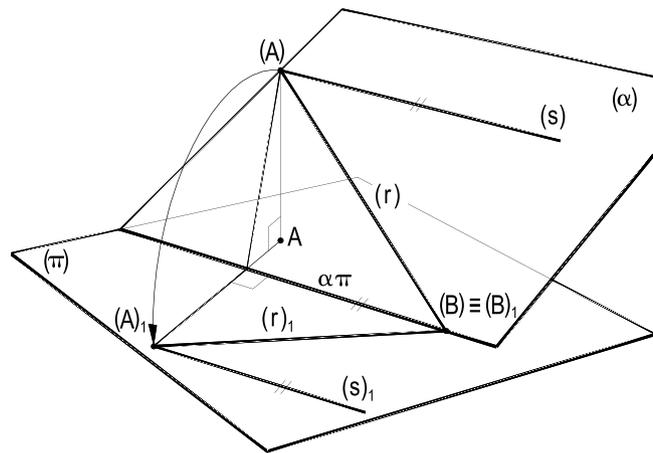


Figura 452

Assim, entre as projeções horizontais dos pontos e das retas de ( $\alpha$ ) e seus respectivos rebatimentos, estabelece-se uma afinidade plana, ortogonal, cujo eixo é a charneira  $\alpha\pi$  (*Geometria Plana*, número 351), o que se confirma (Figura 453) pela concorrência simultânea da projeção horizontal de cada reta de ( $\alpha$ ) e de seu respectivo rebatimento em pontos da charneira  $\alpha\pi$ , mesmo que impróprios.

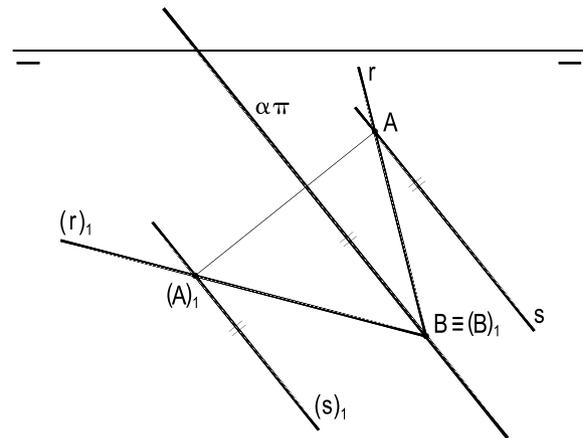


Figura 453

A utilização reiterada dessa afinidade ortogonal facilita sobremodo as construções dos rebatimentos e dos alçados de retas e de pontos do plano, após a obtenção (admitida na Figura 454) do rebatimento  $(A)_1$  de um primeiro ponto (A).

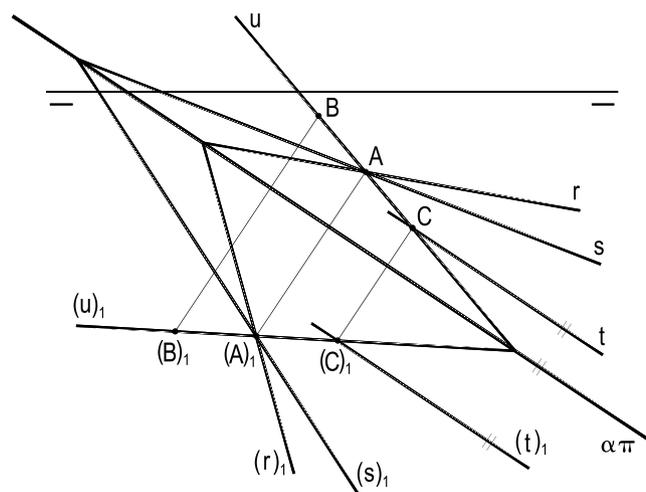


Figura 454

É claro que tudo se passaria de forma idêntica, mas em projeção vertical, entre rebatimentos e respectivas projeções verticais de pontos e retas de um plano oblíquo a ( $\pi'$ ) sobre este plano, funcionando, então, como eixo da afinidade ortogonal, a charneira  $\alpha\pi'$ .

## 115 – Rebatimento do plano de topo sobre um dos planos de projeção

Entre as duas possibilidades, para os planos de topo, a mais usual é o rebatimento sobre  $(\pi)$ , para aproveitar a afinidade entre projeções horizontais e rebatimentos de pontos e de retas do plano, funcionando como eixo dessa afinidade o traço horizontal do plano.

E mais, para obter o rebatimento  $(A)_1$  de um primeiro ponto  $(A)$  de um plano de topo  $(\alpha)$ , sobre  $(\pi)$ , basta utilizar a V.G. do movimento circular descrito por  $(A)$  em seu rebatimento, que acontece na projeção vertical (Figuras 455 e 456).

Observe-se, ainda, que, feito o rebatimento, o traço horizontal  $\alpha\pi'_1$  do plano  $(\alpha)$  em estudo, já rebatido, coincide com a linha de terra (Figura 456).

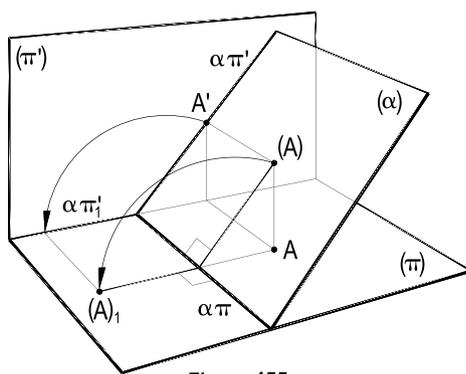


Figura 455

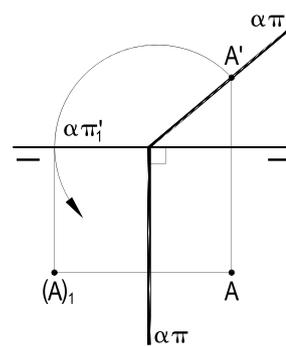


Figura 456

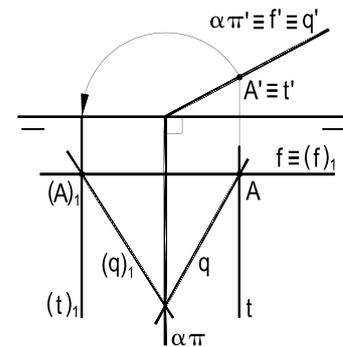


Figura 457

Na Figura 457 podem ser apreciados os três tipos de retas que o plano de topo pode conter (número 40), frontal, de topo e qualquer e seus respectivos rebatimentos sobre  $(\pi)$ .

Para a hipótese do rebatimento de um plano de topo  $(\alpha)$  sobre  $(\pi')$ , funcionará, naturalmente, como charneira, seu traço vertical  $\alpha\pi'$  e o rebatimento  $\alpha\pi$ , de seu traço horizontal, será perpendicular a  $\alpha\pi'$ . No movimento, para cada ponto  $(A)$  de  $(\alpha)$ , servirá, como raio do rebatimento, o próprio afastamento do ponto (Figuras 458 e 459).

Na Figura 460, apresentam-se as porções úteis do plano  $(\alpha)$ , já após seu rebatimento sobre  $(\pi')$ , no sentido admitido nas Figuras 458 e 459.

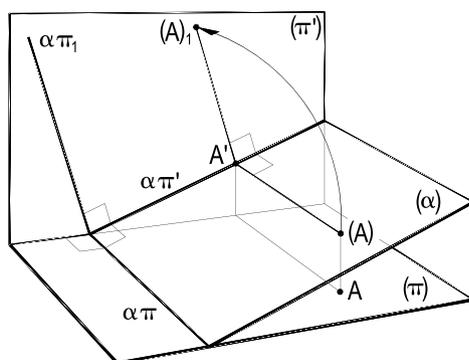


Figura 458

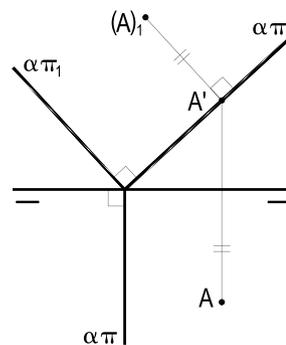


Figura 459

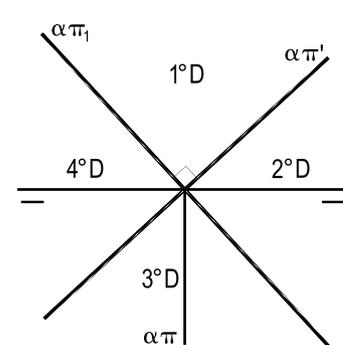


Figura 460

## 116 – Rebatimento do plano vertical sobre um dos planos de projeção

Para aproveitar a afinidade ortogonal entre projeções verticais e respectivos rebatimentos, com eixo na charneira  $\alpha\pi'$ , convém, sempre que possível, rebater um plano vertical ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi'$ ) e, também, desde que viável, utilizar, no movimento do rebatimento, o sentido do ângulo obtuso, para evitar superposições no primeiro diedro (Figuras 461 e 462).

Tudo decorre com absoluta semelhança ao detalhado no item anterior, inclusive a afinidade acima destacada.

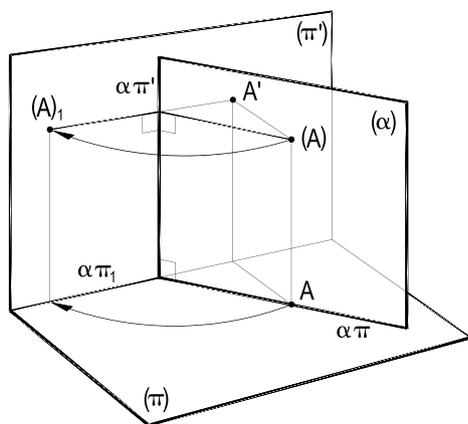


Figura 461

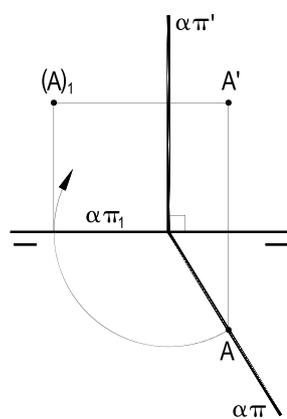


Figura 462

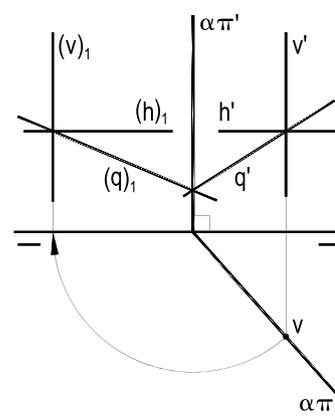


Figura 463

As retas verticais, horizontais e quaisquer, possíveis de pertencer a um plano vertical (número 40), apresentam-se respectivamente assim após o rebatimento sobre ( $\pi'$ ) (Figura 463).

No rebatimento do plano vertical sobre ( $\pi$ ), para cada um de seus pontos, é a cota que funciona como raio do rebatimento (Figuras 464 e 465).

A Figura 466 apresenta, após o rebatimento, as porções úteis do plano vertical ( $\alpha$ ), em cada diedro, utilizado o sentido indicado nas Figuras 464 e 465.

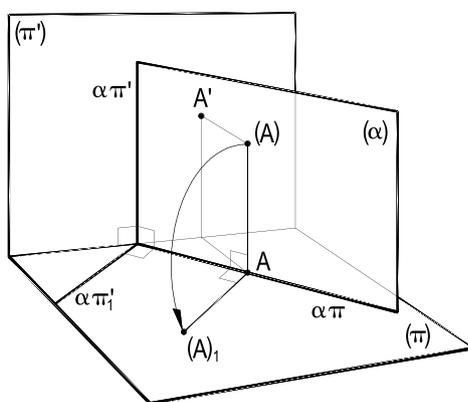


Figura 464

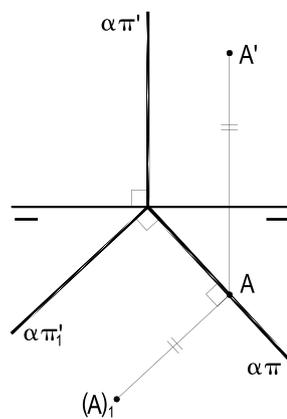


Figura 465

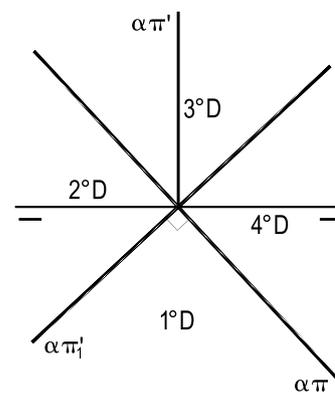


Figura 466

## 117 – Rebatimento do plano de perfil sobre um dos planos de projeção

No rebatimento de um plano de perfil ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi'$ ), funciona, naturalmente, como charneira, seu traço vertical  $\alpha\pi'$ . No movimento, cada ponto ( $A$ ), do plano, mantém constante sua cota, enquanto o arco descrito espacialmente, por ele, projeta-se em V.G. sobre ( $\pi$ ) (Figuras 467 e 468).

Porque os planos de perfil são perpendiculares aos dois de projeção, não cabe a utilização da afinidade ortogonal, antes explorada.

O sentido anti-horário habitualmente empregado neste rebatimento oferece como vantagem a colocação, após realizado, das porções úteis do plano na mesma distribuição que a cartesiana (Figura 468).

Após tal rebatimento, as retas verticais, do topo e de perfil, capazes de pertencer a planos de perfil (número 40), mantêm suas naturais posições, respectivamente perpendiculares aos traços horizontal e vertical do plano e, por último, oblíqua aos dois (Figura 469).

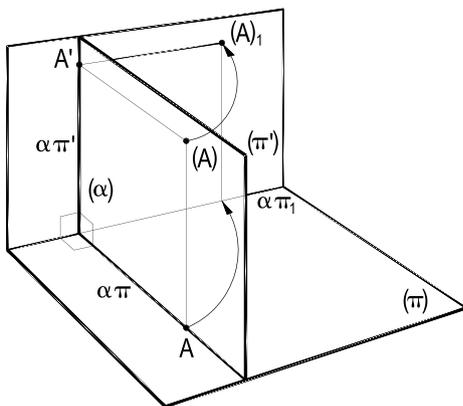


Figura 467

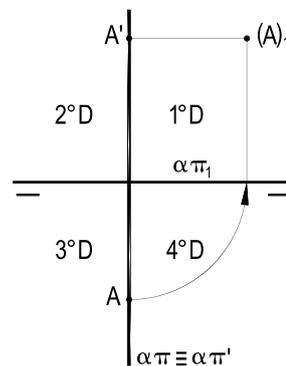


Figura 468

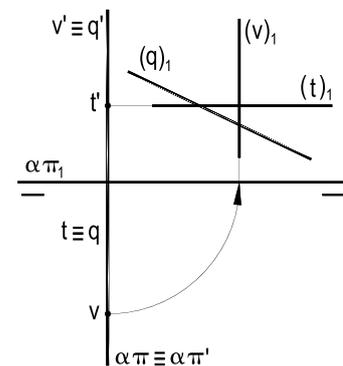


Figura 469

Por ser perpendicular tanto a ( $\pi$ ) quanto a ( $\pi'$ ), tudo se passa de forma semelhante para o rebatimento de um plano de perfil ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ) (Figuras 470 e 471) e com a explicitação dos rebatimentos dos três tipos de reta a eles pertencentes (Figura 472).

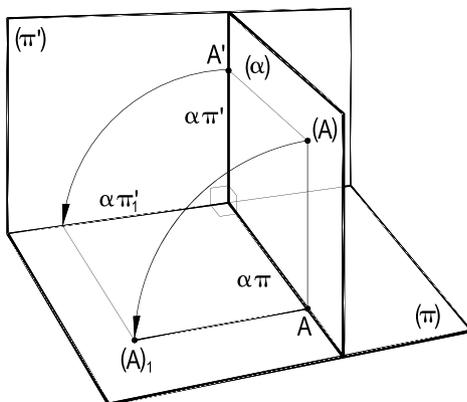


Figura 470

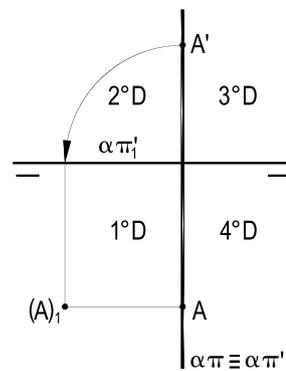


Figura 471

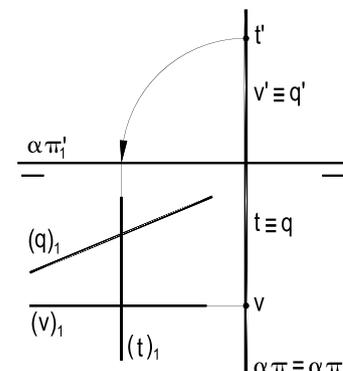


Figura 472

## 118 – Rebatimento do plano paralelo a $(\pi'\pi)$ sobre um dos planos de projeção

Por terem traços paralelos, são muito semelhantes os rebatimentos de um plano  $(\alpha)$ , paralelo à linha de terra, sobre  $(\pi)$  ou sobre  $(\pi')$ . No primeiro caso, em havendo, na épora, espaço para a obtenção do rebatimento  $\alpha\pi'$  de seu traço vertical, convém utilizar o triângulo de rebatimento (ver número 112) para um ponto  $(V)$ , qualquer desse traço (Figuras 473 e 474), do que se aproveita para explicitar a V.G. da distância  $d$  existente entre os dois traços do plano. A charneira é, naturalmente, o traço horizontal  $\alpha\pi$  do plano.

E, para rebater, ou alçar, pontos e retas do plano, tanto se pode lançar mão do rebatimento de um corte de perfil, (Figura 475), quanto de retas do plano, (Figura 476), ou da afinidade ortogonal existente entre as projeções horizontais e os rebatimentos desses elementos (Figura 477).

Por último, cabe observar que, por sua própria natureza, o plano só atravessa três diedros, tendo, por isso mesmo, apenas três porções úteis, como indicado nas Figuras 478 e 481.

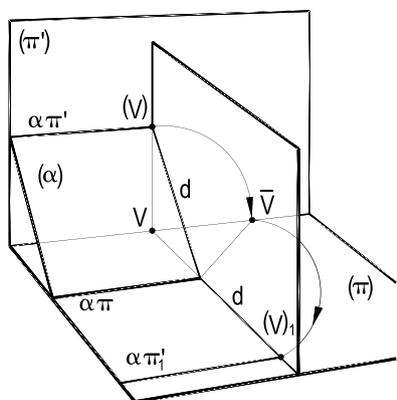


Figura 473

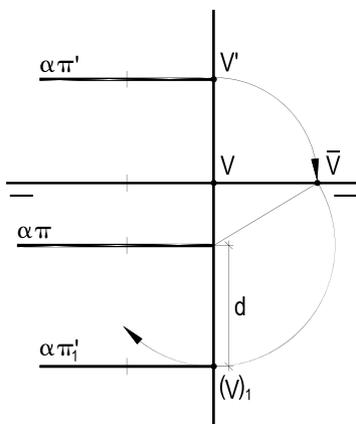


Figura 474

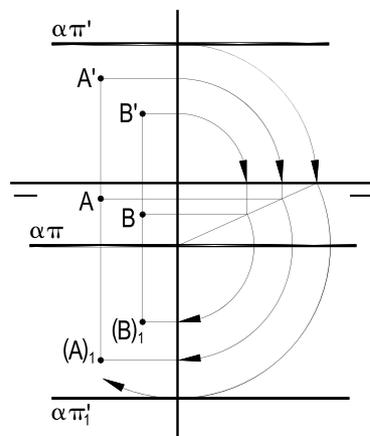


Figura 475

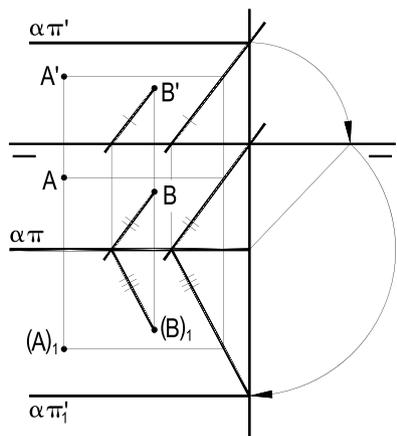


Figura 476

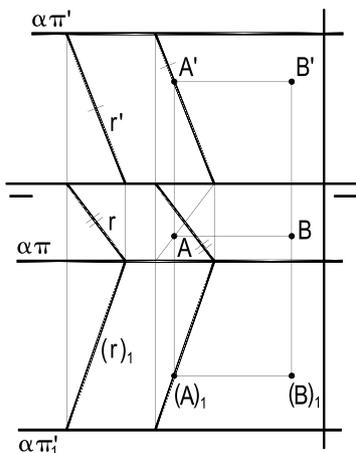


Figura 477

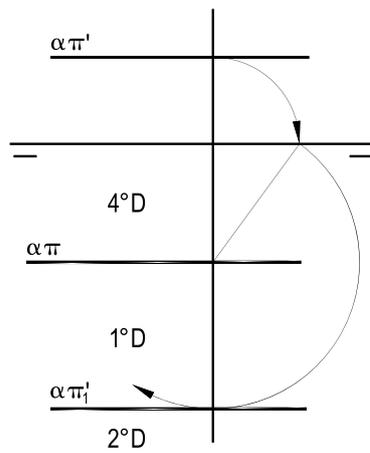


Figura 478

O rebatimento de  $(\alpha)$  sobre  $(\pi')$  aproveita, em sendo possível, o triângulo de rebatimento de um ponto  $(H)$ , qualquer, de seu traço horizontal  $\alpha\pi$  (Figura 479). E os rebatimentos, ou alçados, de pontos e retas do plano se fazem, como na hipótese anterior, utilizando o rebatimento de um corte de perfil, além de retas quaisquer e fronto-horizontais do plano, explorando a afinidade ortogonal existente entre suas projeções verticais e seus rebatimentos respectivos, funcionando, como eixo,  $\alpha\pi'$ , a charneira deste rebatimento (Figura 480).

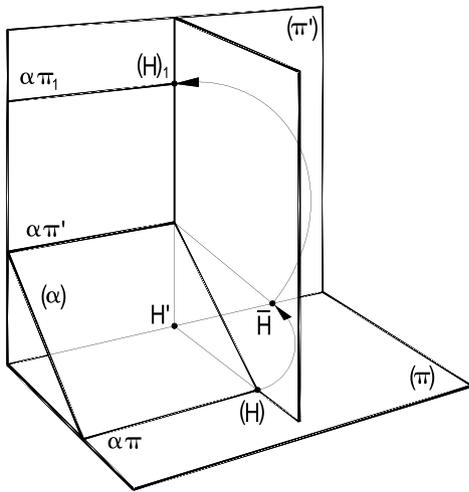


Figura 479

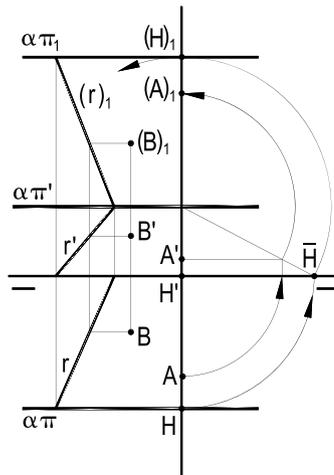


Figura 480

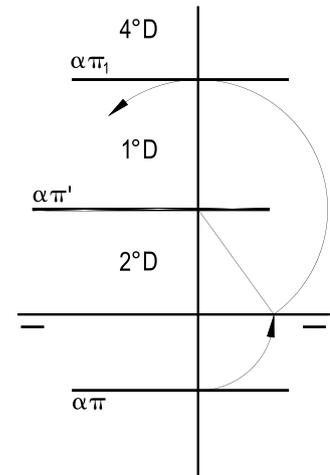


Figura 481

Num rebatimento de um plano paralelo à linha de terra sobre  $(\pi)$ , quando o rebatimento do traço vertical  $\alpha\pi'$  for inacessível, deve-se trabalhar com o triângulo de rebatimento de um ponto  $(M)$  qualquer do plano (Figuras 482 e 483) e, daí por diante, com as retas do plano e a afinidade existente entre as projeções horizontais e os rebatimentos desses elementos. Naturalmente tudo isso se aplica, também, para um rebatimento de  $(\alpha)$  sobre  $(\pi')$ , quando não for possível utilizar o rebatimento do seu traço horizontal  $\alpha\pi$  (Figura 484).

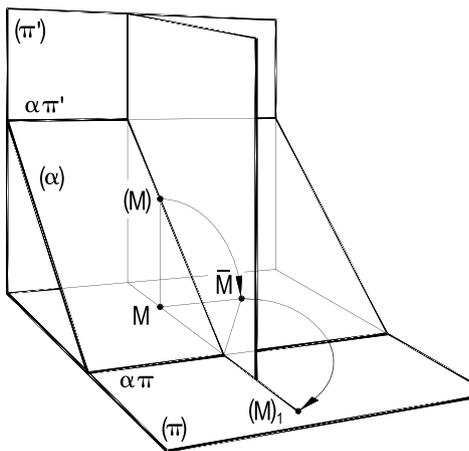


Figura 482

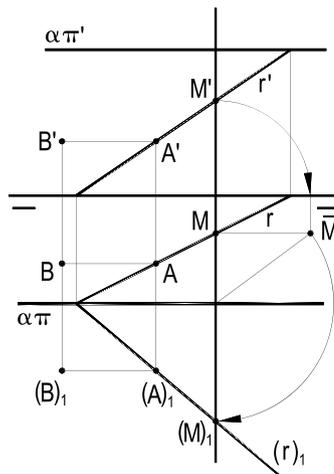


Figura 483

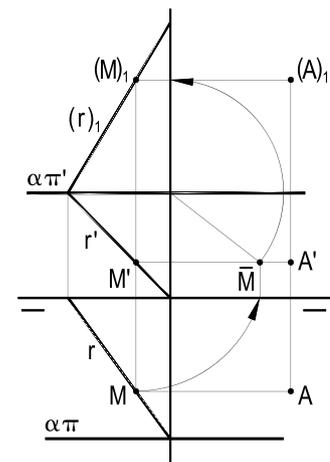


Figura 484

Quando não são dados os traços, ou inexistente a linha de terra, deve-se, mais uma vez, utilizar o triângulo de rebatimento de um ponto do plano. Assim foi feito na Figura 485, para se determinar a verdadeira grandeza  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1$  do paralelogramo  $(ABCD)$  dado por suas projeções, e na Figura 486, quando, dado um plano por um ponto  $(A)$  e por uma fronto-horizontal  $(r)$ , suprimida a linha de terra, se pediu determinar a V.G. do triângulo  $(ABC)$ , dadas a projeção vertical  $B'$  do vértice  $(B)$  e a horizontal  $C$  do vértice  $(C)$ .

Nos dois exemplos, o triângulo de rebatimento escolhido foi para o ponto  $(A)$  e, no segundo, o rebatimento foi efetuado sobre o plano horizontal  $(\gamma)$  pertencente a  $(r)$ , para se chegar à V.G.  $(A)_1(B)_1(C)_1$  pedida (Figura 486).

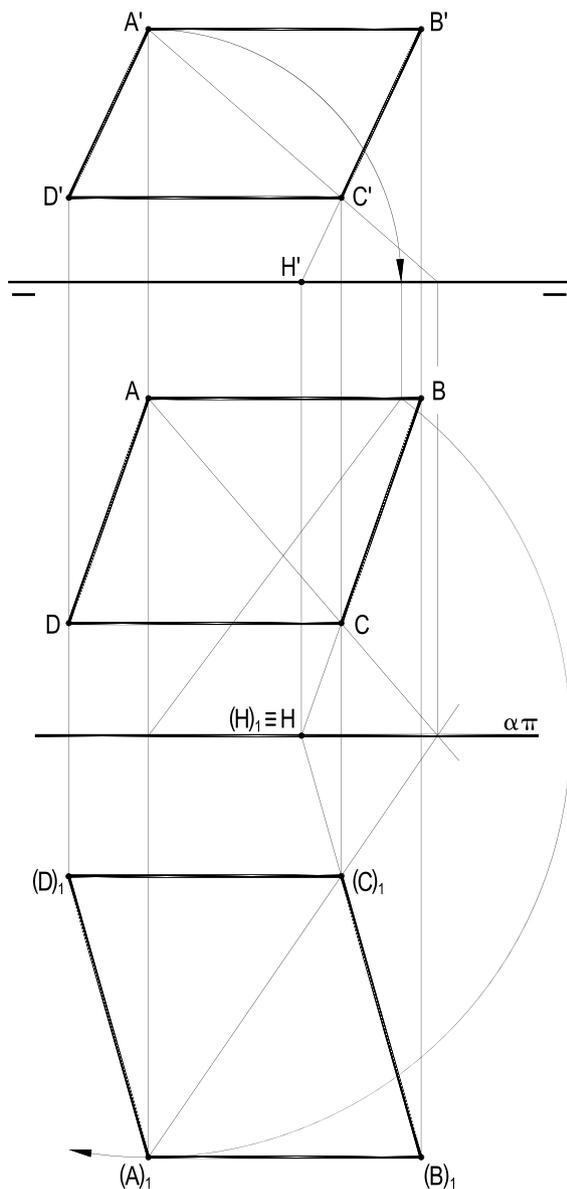


Figura 485

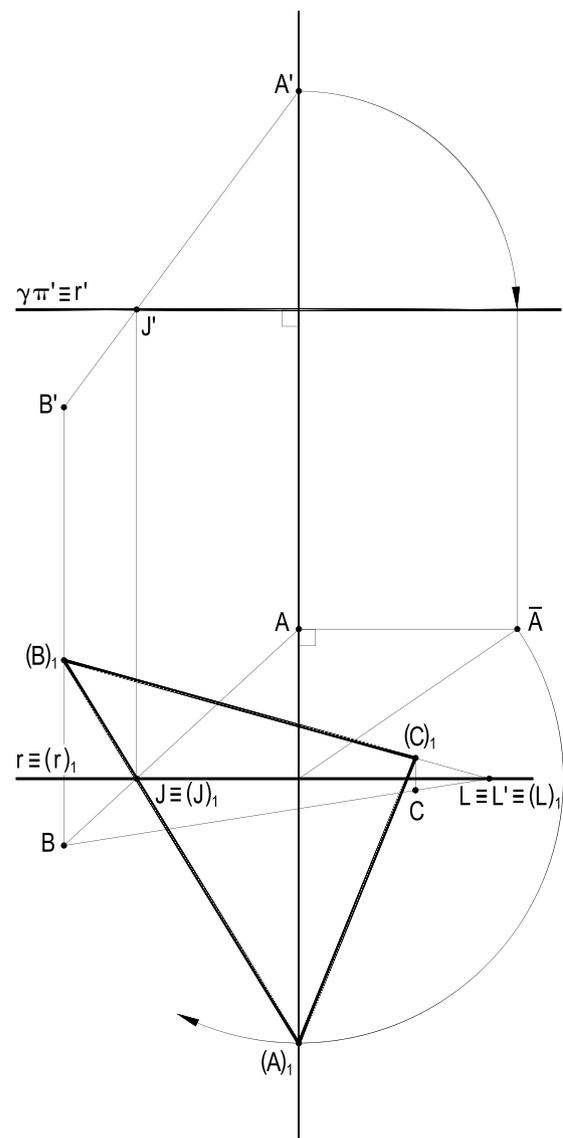


Figura 486

Por ser o primeiro plano não projetante, cujo estudo desenvolvemos, cabe um exemplo de resolução de um problema de construção geométrica, embora, ainda bem simples.

Então, dados, por seus traços, os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  e a projeção vertical  $A'$  de um ponto  $(A)$  de  $(\alpha)$ , pede-se construir as projeções do hexágono regular  $(ABCDEF)$ , pertencente a  $(\alpha)$ , sabendo que seu lado  $(AB)$  é paralelo ao plano  $(\beta)$ , medindo 15 mm, que  $(A)$  é o vértice de maior abscissa e que o hexágono se situa no primeiro diedro.

Para solucionar o problema, deve-se rebater o plano  $(\alpha)$  sobre um dos planos de projeção – escolhemos sobre  $(\pi)$  –, para operar em V.G., levando, ao rebatimento, o ponto  $(A)$  e a interseção  $(s)$  de  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , à qual deve ser paralelo o lado  $(AB)$  do hexágono pedido (Figura 487), cuja construção é, então, bem simples.

Há apenas uma solução, devido às restrições impostas.

O alçado foi realizado com auxílio da afinidade do rebatimento com a projeção horizontal, mediante a utilização da diagonal  $(C)(F)$  e do lado  $(D)(E)$ , paralelos a  $(A)(B)$ .

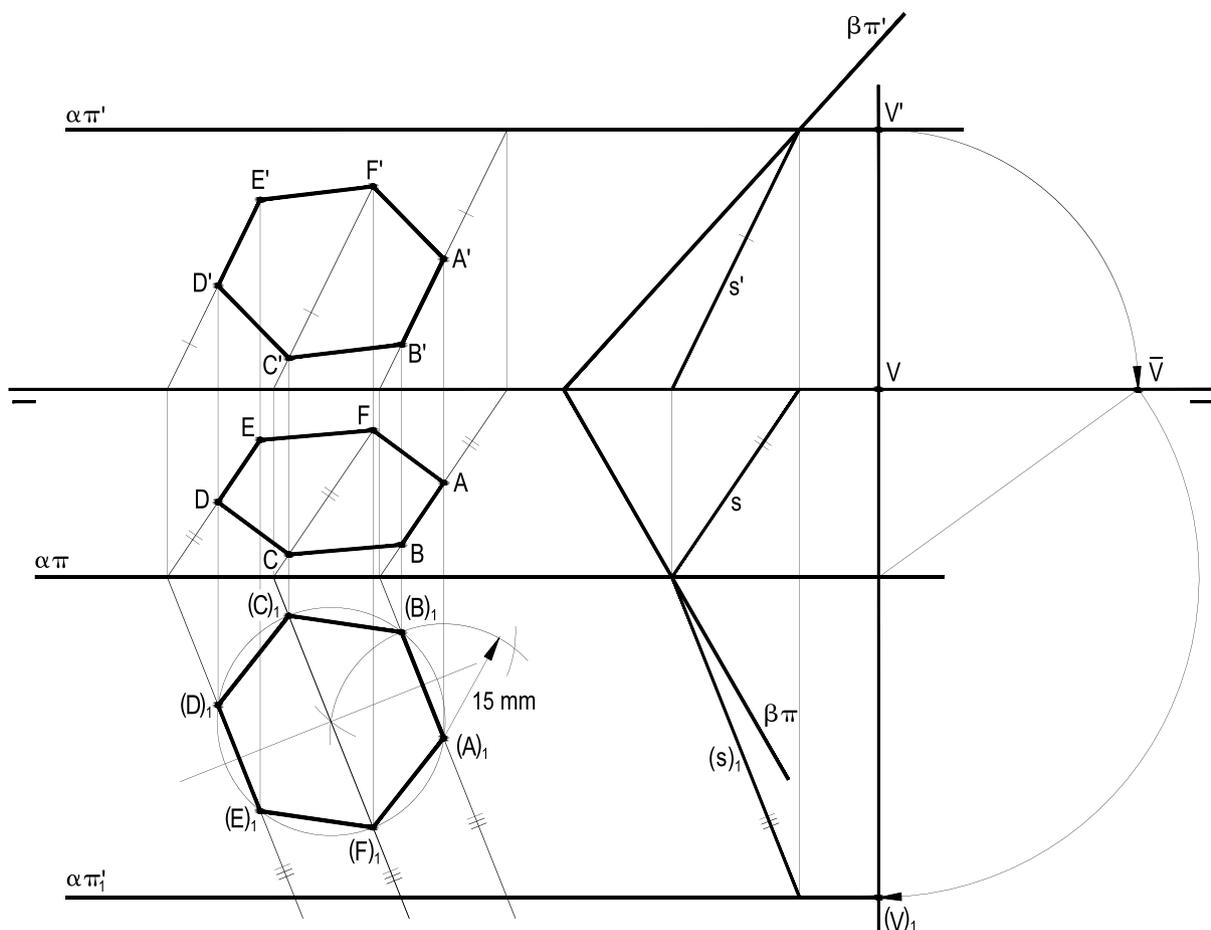


Figura 487

## 119 – Rebatimento do plano ( $\pi'\pi$ ) – (M)

São absolutamente semelhantes os rebatimentos de um plano ( $\pi'\pi$ )–(M) sobre ( $\pi$ ), ou sobre ( $\pi'$ ), funcionando como charneira, para ambos os casos, a própria linha de terra, devendo ser utilizado para tais movimentos ou o triângulo de rebatimento relativo ao ponto (M) (Figuras 488, 489 e 492) ou o rebatimento de um corte de perfil (Figuras 490 e 493).

Para o rebatimento, ou alçamento, de novos pontos do plano, devem ser utilizadas retas fronto-horizontais ou quaisquer do plano, como apresentado nas Figuras 490 e 493, respectivamente dos rebatimentos estudados, sobre ( $\pi$ ) e sobre ( $\pi'$ ).

As porções úteis, duas apenas, no caso, são, também, de obtenção imediata (Figuras 489 e 492).

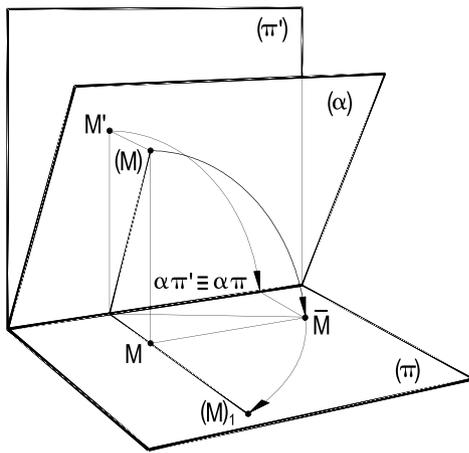


Figura 488

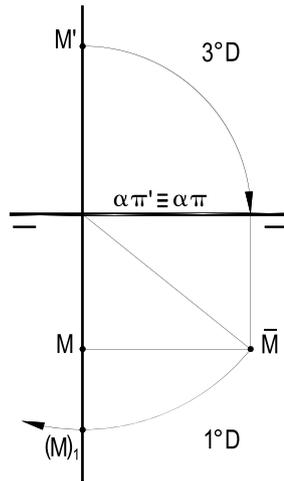


Figura 489

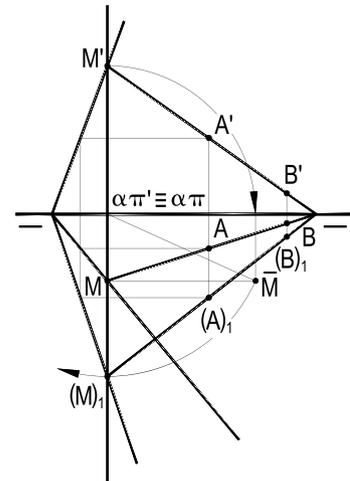


Figura 490

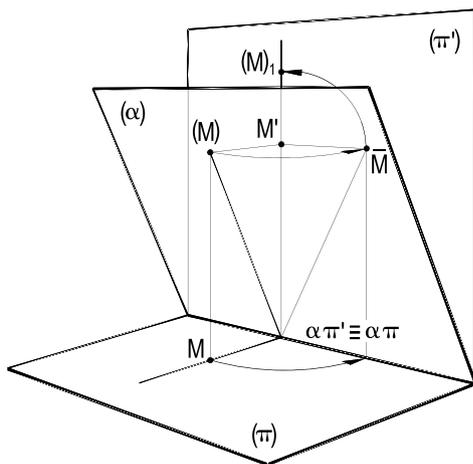


Figura 491

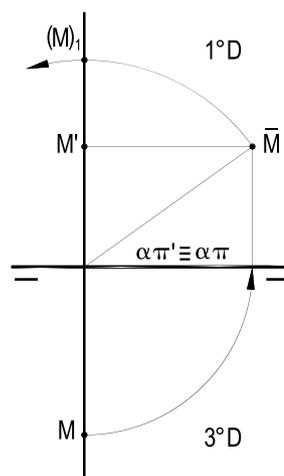


Figura 492

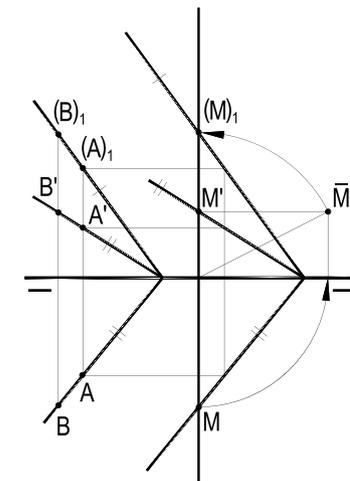


Figura 493



## 120 – Rebatimento do plano qualquer

Como diz seu próprio nome, o plano qualquer é o de mais genérica posição no sistema biprojetivo da Geometria Descritiva, não sendo projetante, estando, sempre, oblíquo à linha de terra. Tem, como vimos (número 40), ao contrário de todos os demais da classificação geral, quatro tipos de retas e seus traços são, ambos, oblíquos à linha de terra.

Por sempre atravessar todos os diedros, possui quatro porções úteis (Figuras 495 e 498), correspondendo, aos pares, a ângulos agudos e obtusos. Habitualmente, em épura, os planos quaisquer são apresentados apenas pelas porções de seus traços correspondentes ao primeiro diedro (Figuras 496 e 499), embora o mais correto fosse que eles viessem representados completamente (Figuras 497 e 500).

Aliás, diz-se que, quando, em épuras de primeiro diedro, os traços de um plano qualquer se voltam ambos para a direita, ou ambos para a esquerda, trata-se de um plano qualquer com traços de sentido direto (Figuras 495, 496 e 497) e, em caso contrário, (Figuras 498, 499 e 500), de sentido inverso. É claro, então, que, no primeiro diedro, é agudo o ângulo formado pelos traços do plano qualquer de sentido direto e obtuso, o existente entre os traços do de sentido inverso.

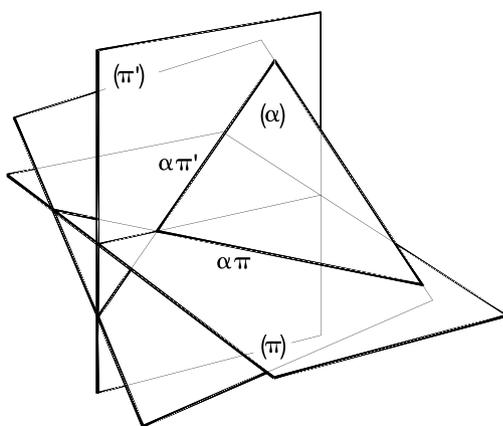


Figura 495

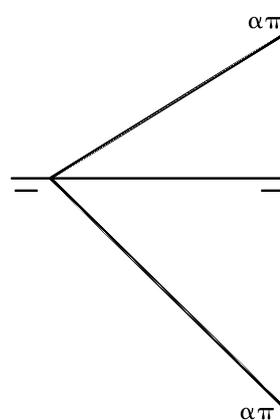


Figura 496

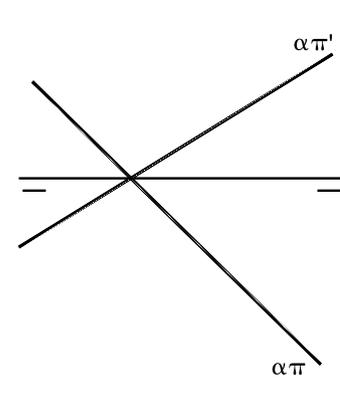


Figura 497

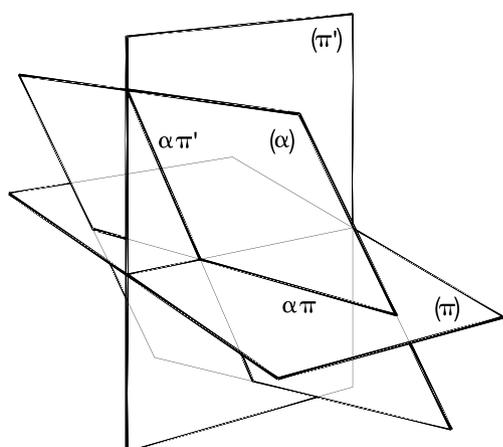


Figura 498

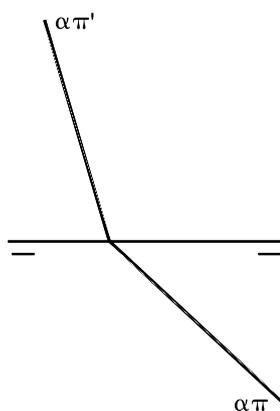


Figura 499

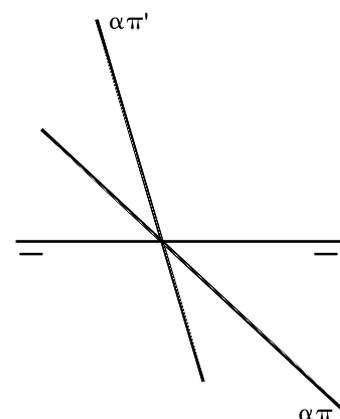


Figura 500

Por não existirem especiais diferenças entre suas posições em relação aos dois planos de projeção, são de procedimentos semelhantes os rebatimentos de um plano qualquer ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ), ou sobre ( $\pi'$ ), utilizando-se, em ambos os casos, um triângulo de rebatimento (Figuras 501, 502, 504 e 505), funcionando, como charneiras, respectivamente,  $\alpha\pi$  e  $\alpha\pi'$ .

A utilização dos triângulos de rebatimento contribui com o fornecimento das verdadeiras grandezas dos ângulos  $\gamma$  e  $\varphi$ , que o plano ( $\alpha$ ) forma, respectivamente, com ( $\pi$ ) e com ( $\pi'$ ).

E, com o rebatimento, obtém-se (Figuras 503 e 506) a verdadeira grandeza do ângulo  $\theta$  formado entre os traços do plano, no primeiro diedro.

Interessante observar que o segmento (J)(V) do traço vertical de ( $\alpha$ ), entre um ponto genérico (V) de  $\alpha\pi'$  e o traço do plano com a linha de terra, está em V.G. tanto em sua projeção vertical  $J'V'$  quanto em seu rebatimento  $(J)_1(V)_1$  sobre ( $\pi$ ) (Figura 503), o que permite, com o traçado de um arco de centro em  $J' \equiv J$  e raio  $J'V'$ , obter, rapidamente,  $(V)_1$  sobre a perpendicular  $V(V)_1$  à charneira  $\alpha\pi$ .

Motivo igual permite, no rebatimento sobre ( $\pi'$ ), obter o rebatimento  $(H)_1$  de um ponto (H) qualquer do traço horizontal  $\alpha\pi$  e, em consequência, o rebatimento  $\alpha\pi_1$  desse traço sobre ( $\pi'$ ) (Figura 506).

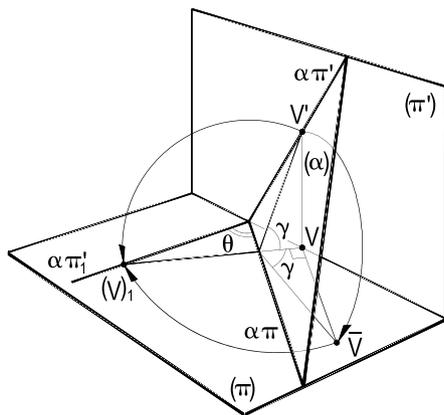


Figura 501

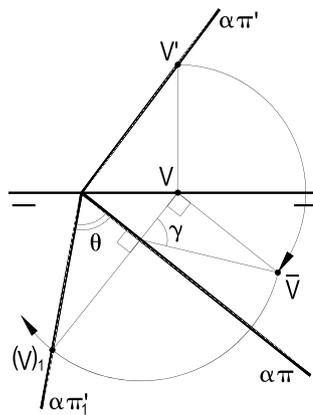


Figura 502

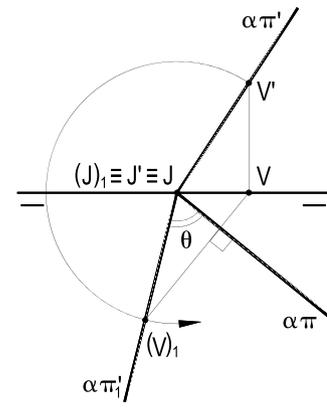


Figura 503

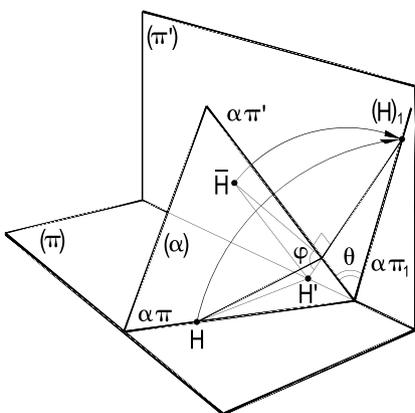


Figura 504

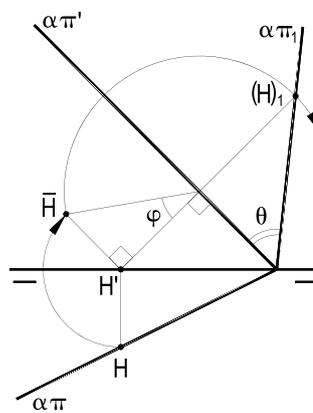


Figura 505

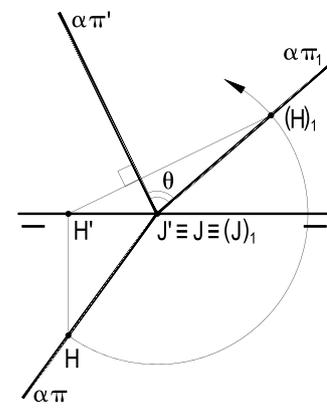


Figura 506

Imediata, também, é a demarcação das porções úteis do plano qualquer ( $\alpha$ ), tenha ele traços com sentido direto (Figura 507) ou inverso (Figura 508).

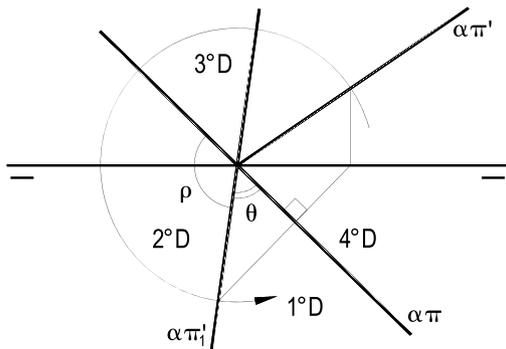


Figura 507

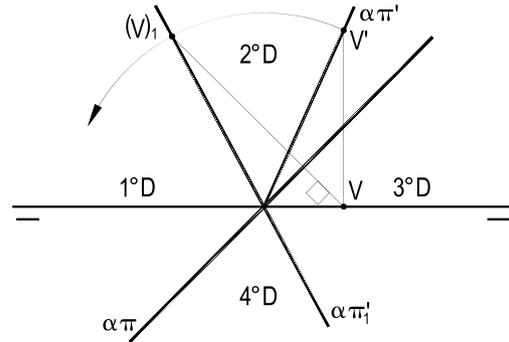


Figura 508

Simple, ainda, a obtenção dos rebatimentos das retas de um plano ( $\alpha$ ), qualquer, quando estão disponíveis seus traços (Figuras 509, 510, 511 e 512), destacando-se que as principais de ( $\alpha$ ), evidentemente, conservam seus paralelismos aos traços correspondentes.

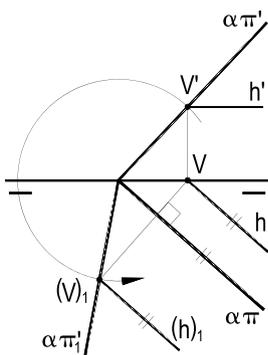


Figura 509

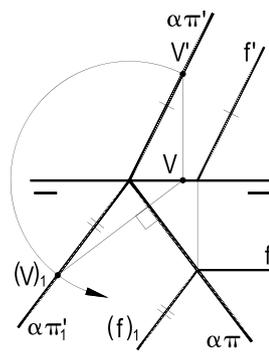


Figura 510

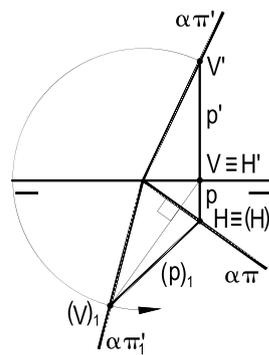


Figura 511

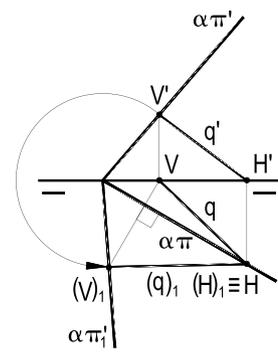


Figura 512

Para retas ( $w$ ) concorrentes com a linha de terra (Figura 513), ou quando ao menos um dos traços de uma reta ( $m$ ) (Figuras 514 e 515) resta inacessível, deve-se utilizar uma segunda reta de ( $\alpha$ ), concorrente ou paralela à estudada.

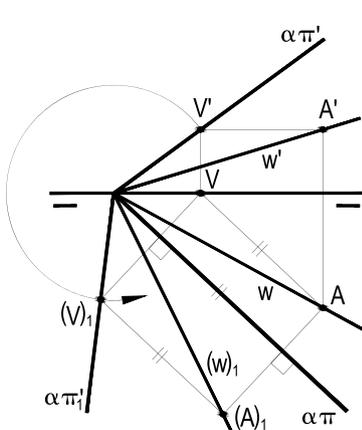


Figura 513

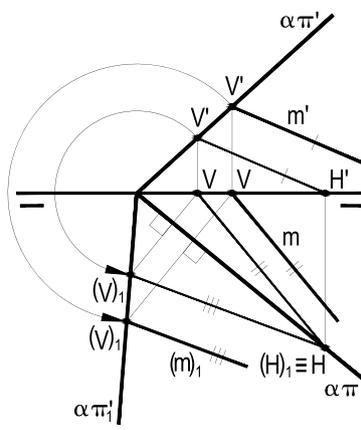


Figura 514

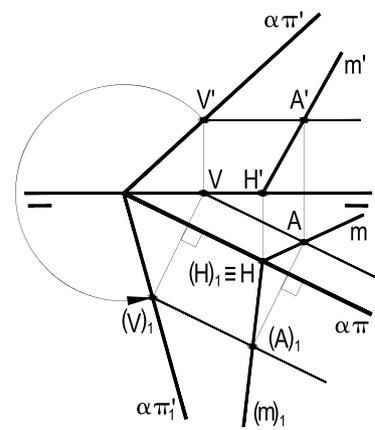


Figura 515

O rebatimento das retas (i) e (p), traços de um plano qualquer ( $\alpha$ ) com ( $\beta_{13}$ ) e com ( $\beta_{24}$ ), respectivamente, bem como das paralelas a elas, pertencentes a ( $\alpha$ ), enquadram-se neste caso, como indicado nas Figuras 516 e 517, abaixo.

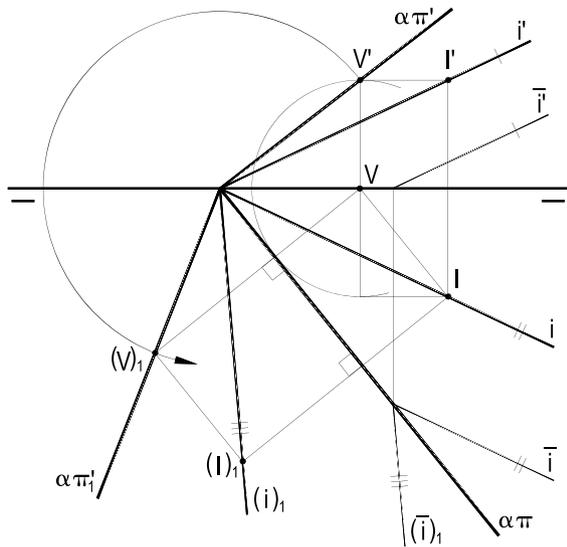


Figura 516

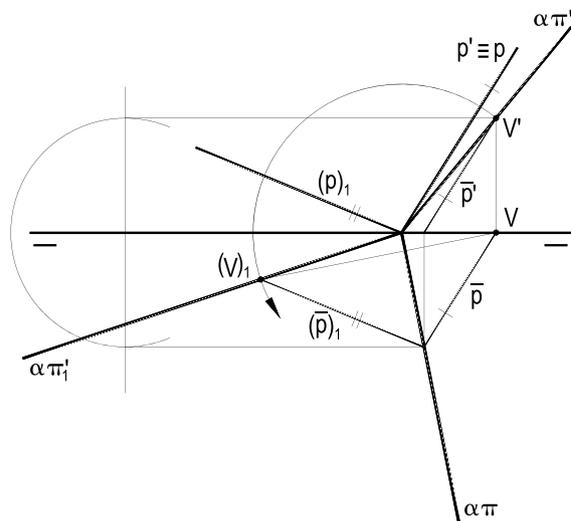


Figura 517

E, para rebater ou alçar figuras, retas ou pontos pertencentes a um plano qualquer ( $\alpha$ ), pode-se lançar mão da afinidade ortogonal existente entre o rebatimento e uma das projeções desses elementos, a horizontal, na Figura 518, visto ter-se rebatido ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ).

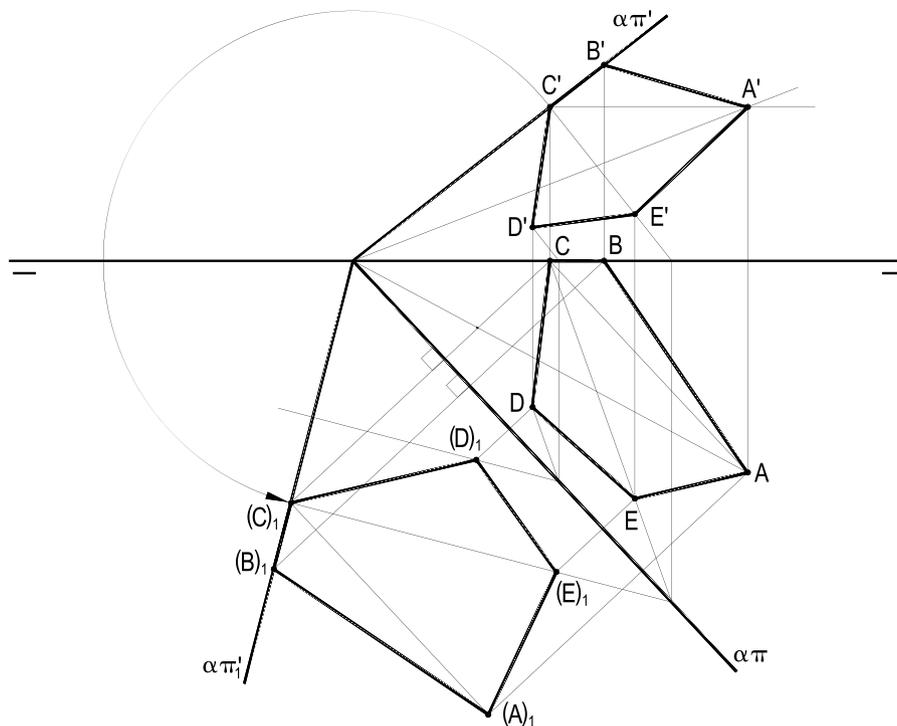


Figura 518

Quando o plano não é dados por seus traços, mas ao menos um deles pode ser construído, deve-se utilizar este como charneira e empregar o triângulo de rebatimento para um qualquer de seus pontos (M), como indicam as Figuras 519 e 520, em que os rebatimentos foram, respectivamente, efetuados sobre  $(\pi)$  e sobre  $(\pi')$ .

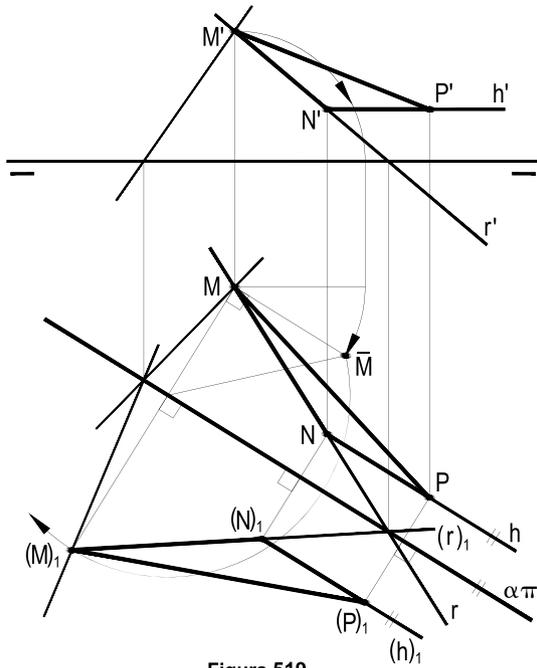


Figura 519

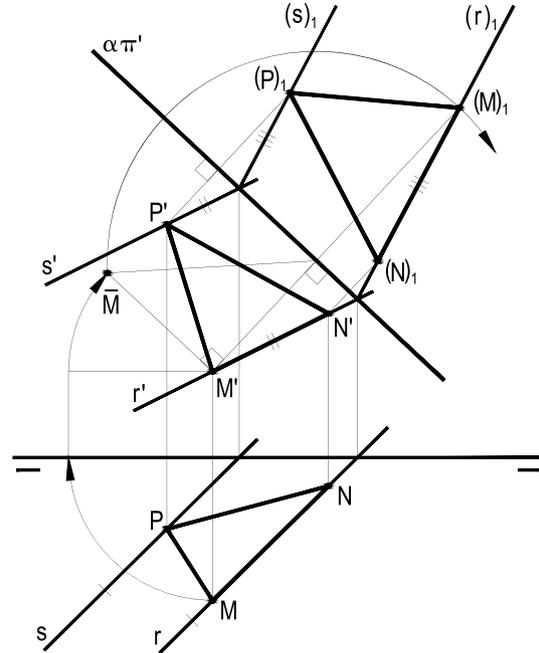


Figura 520

E, quando a linha de terra é suprimida, deve-se rebater o plano sobre um plano horizontal ( $\gamma$ ) Figura 521, ou, se mais conveniente, sobre um plano frontal, também auxiliar.

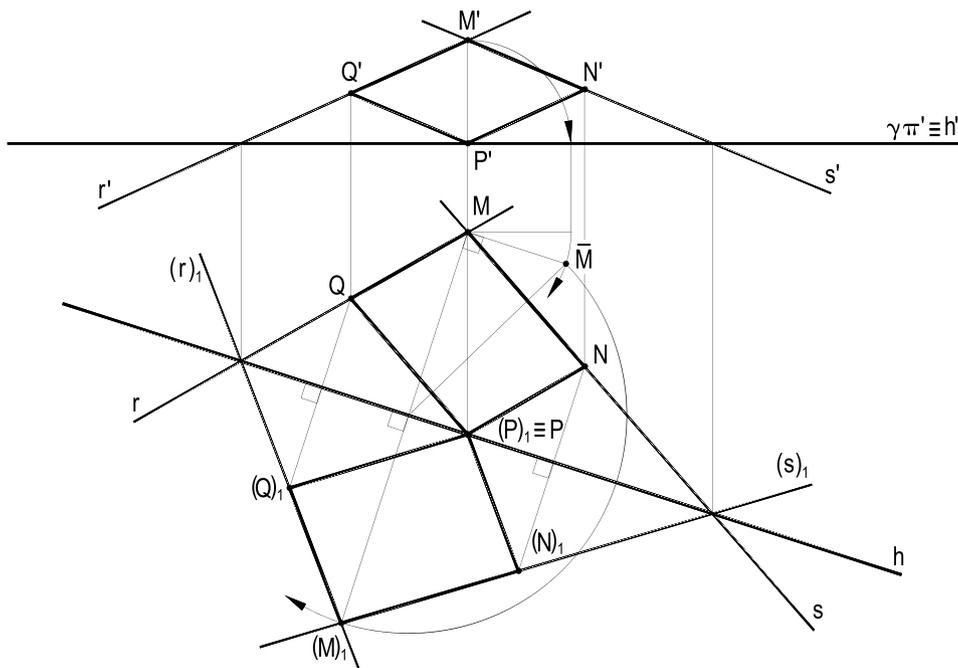


Figura 521

Tal como apresentado para os planos paralelos, ou pertencentes a  $(\pi'\pi)$ , incluímos um exemplo da utilização do rebatimento de um plano qualquer  $(\alpha)$ , para a construção, em V.G., de uma figura a ele pertencente.

Seja, assim, construir as projeções de um pentágono convexo regular  $(A)(B)(C)(D)(E)$ , pertencente ao plano qualquer  $(\alpha)$ , dado por seus traços, conhecendo a projeção vertical  $O'$  do centro do círculo, de raio igual a 2,8 cm que circunscreve o polígono, sabendo que seu lado  $(A)(B)$  é de perfil, com a maior abscissa possível e que a cota de  $(A)$  é menor que a de  $(B)$ .

Para a resolução, foi utilizada uma reta de perfil  $(V)(H)$  de  $(\alpha)$ , à qual o lado  $(A)(B)$  deve ser paralelo (Figura 522).

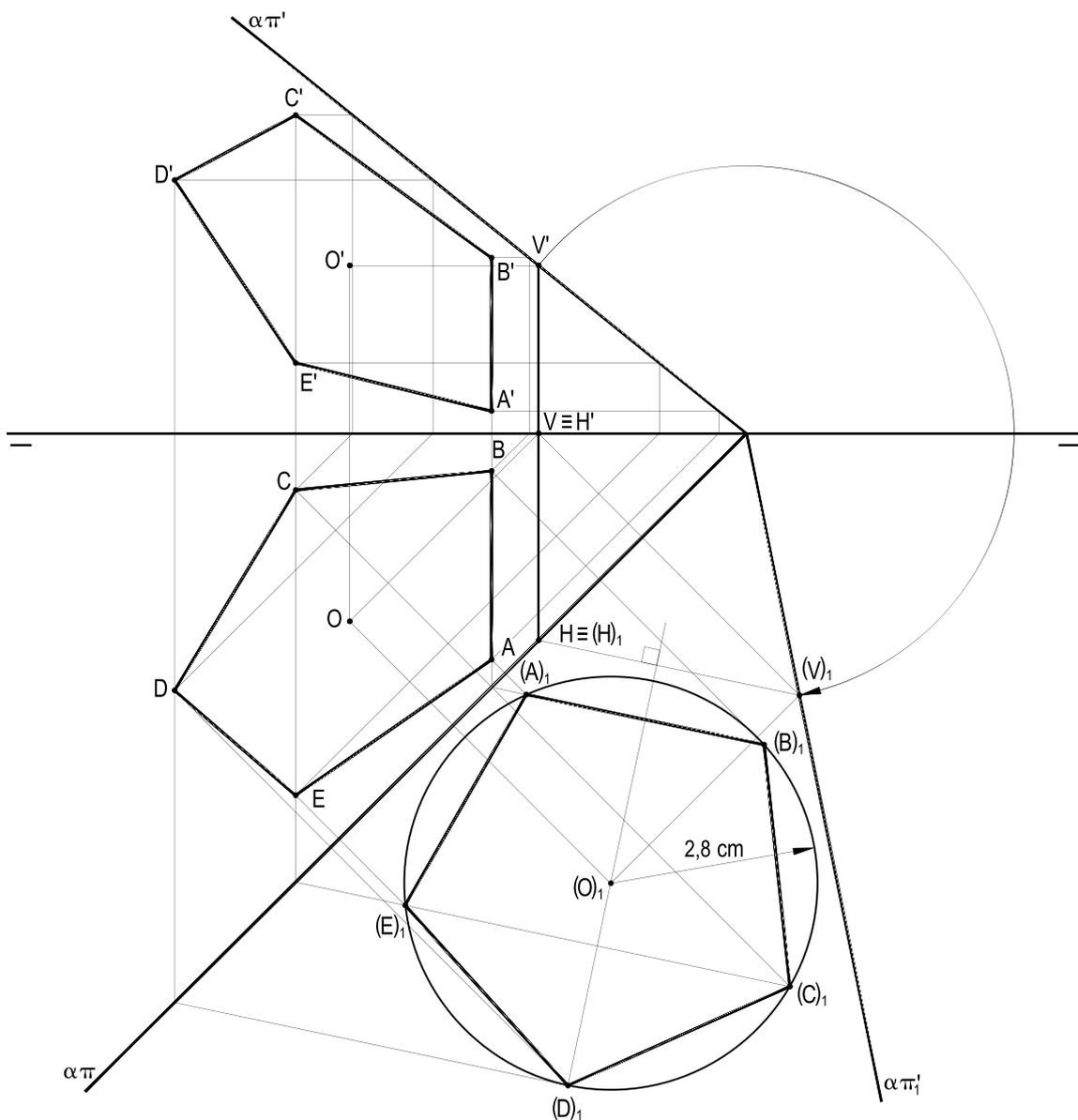


Figura 522

## 121 – Aplicação dos rebatimentos às rotações

Quando estudamos o método das rotações, vimos serem tanto mais simples as operações quanto mais particulares fossem os eixos utilizados. De fato, a grande maioria das aplicações então apresentadas utilizou eixos verticais ou de topo.

Vimos, também, no entanto, rotações de figuras em torno de outros eixos. Nestes casos, para retornar aos processos usuais, indicamos como auxílio geral o emprego de uma ou mais mudanças, que tornassem o eixo vertical ou de topo.

Quando apenas uma mudança é suficiente para levar o eixo a uma posição mais simples, a écura não é muito onerada, sendo razoável tal procedimento. Quando, no entanto, duas mudanças são indispensáveis para tornar vertical (ou de topo) o eixo, isto é, quando ele é qualquer, ou de perfil, em muitos casos, consegue-se simplificar o processo gráfico da écura pela utilização de um rebatimento, em substituição àquela dupla mudança.

Tal rebatimento será de um plano perpendicular ao eixo – aquele que contenha o círculo descrito pelo movimento de certo ponto em sua rotação. Assim, quando o eixo for qualquer, o plano que se irá rebater será também qualquer (Figura 523) e, quando o eixo for de perfil, o plano será paralelo ou pertencente à linha de terra (Figura 524).

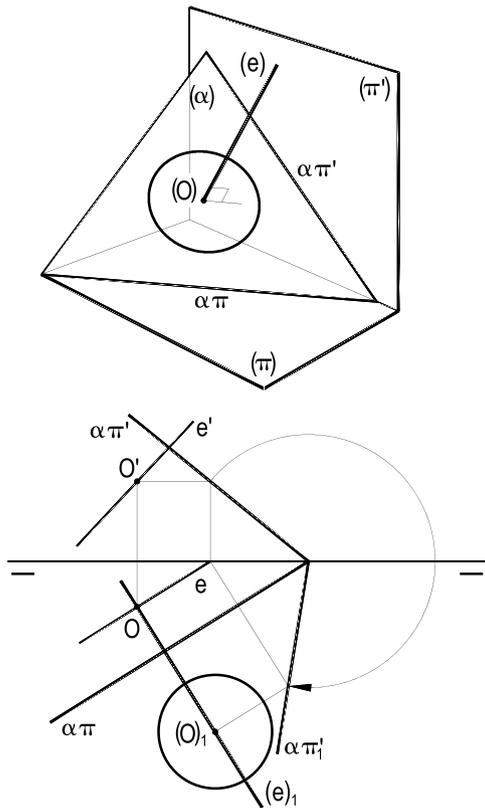


Figura 523

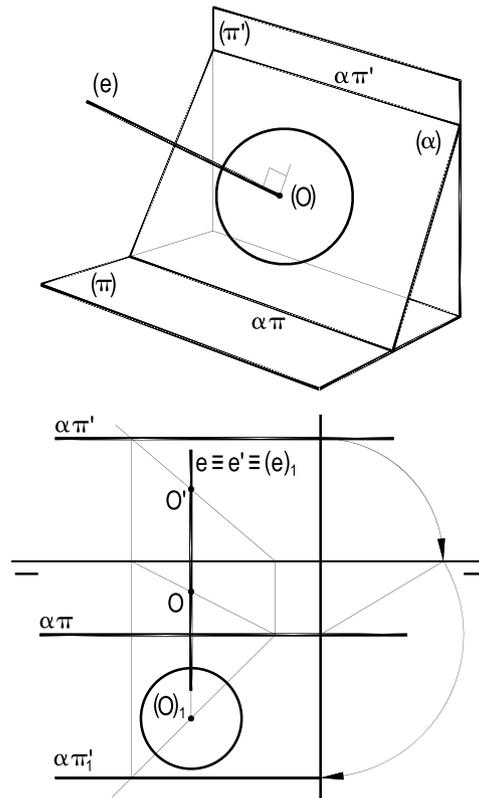


Figura 524

Vejam alguns exemplos:

121.1 – Seja girar o ponto (A) em torno da reta (r) até que ele venha a pertencer a ( $\pi$ ), sendo dados (A) e (r), por suas projeções.

Solução: Por (A), traça-se o plano ( $\alpha$ ), perpendicular a (r), com auxílio da horizontal (A)(V) (Figura 526).

O círculo descrito por (A) em sua rotação em torno de (r) pertencerá a este plano e terá para centro o ponto (O), interseção de (r) com ( $\alpha$ ) (Figura 525), o que se consegue com o auxílio do plano de topo ( $\gamma$ ), pertencente a (r). (Figura 526).

Obtido ponto (O), rebata-se ( $\alpha$ ) – sobre ( $\pi$ ), por exemplo – podendo-se, então, construir aquele círculo em verdadeira grandeza (Figura 526).

Porque queremos girar (A) até que ele pertença a ( $\pi$ ), os pontos (B) e (C), interseções do círculo de rotação com  $\alpha\pi$ , resolvem o problema.

E, como (B) e (C) pertencem à charneira do rebatimento, já estão alçados.

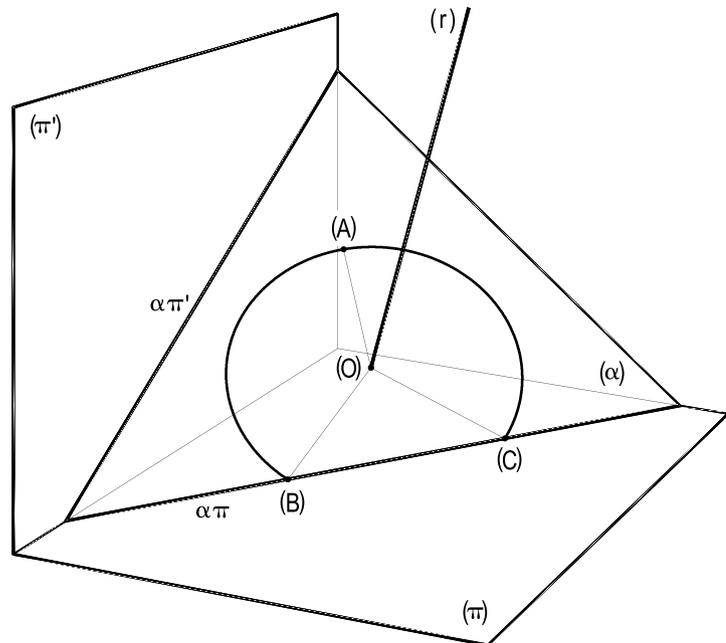


Figura 525

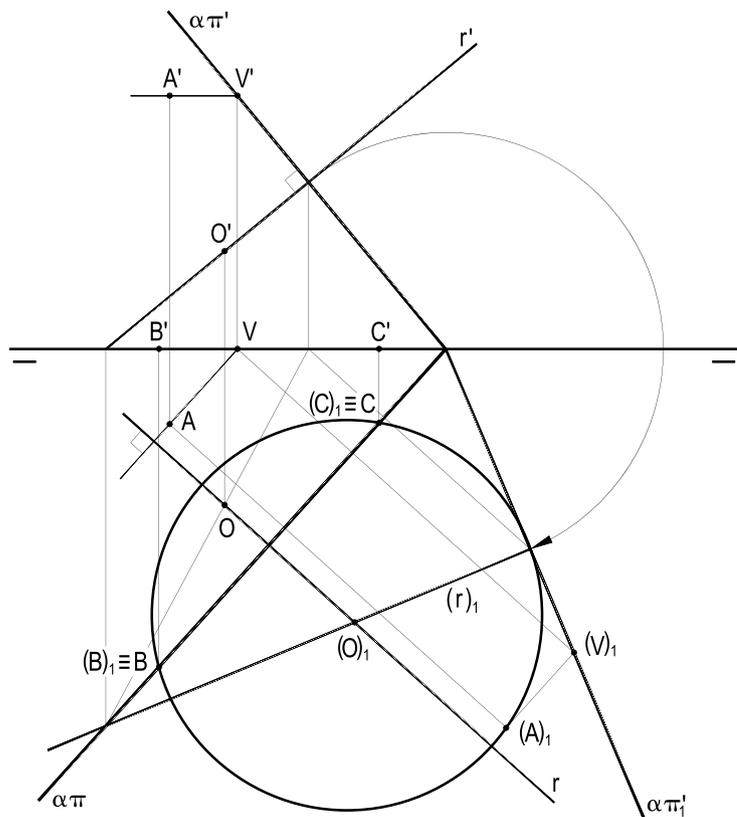


Figura 526

121.2 – Seja, agora, girar um ponto (A), dado por suas projeções, em torno da reta (r), de perfil, até que (A) venha a pertencer ao plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços.

A reta (r) é definida pelos pontos (E) e (F), dados por suas projeções.

Solução: Porque  $(r) \equiv (EF)$  é de perfil, (A) descreverá um círculo pertencente a um plano ( $\beta$ ), perpendicular a (E)(F) e, portanto, paralelo à linha de terra (Figura 527).

Assim, utilizando-se um corte de perfil, obtêm-se os traços de ( $\beta$ ), bem como o ponto (O), interseção deste plano com (E)(F).

(O) será o centro do círculo descrito por (A).

Como, em sua posição final, o ponto (A) terá de pertencer a ( $\alpha$ ), ele deverá estar sobre (V)(H), interseção de ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) (Figura 527).

Rebate-se, então, ( $\beta$ ) sobre ( $\pi$ ), a fim de determinar os pontos  $(B)_1$  e  $(C)_1$ , interseções de  $(V)_1(H)_1$ , com o círculo de rotação de  $(A)_1$ .

Para obter as projeções dos pontos (B) e (C), que resolvem a questão, basta alçar  $(B)_1$  e  $(C)_1$ , o que foi feito com o auxílio da própria reta (B)(C), que une esses pontos (Figura 528).

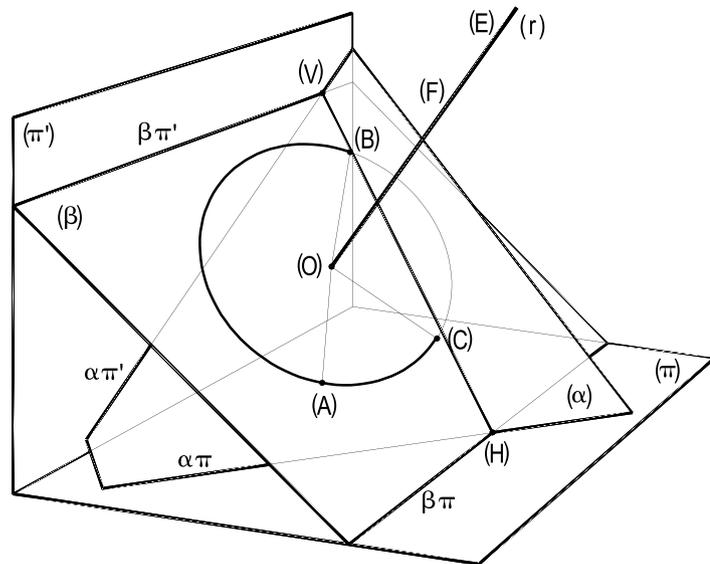


Figura 527

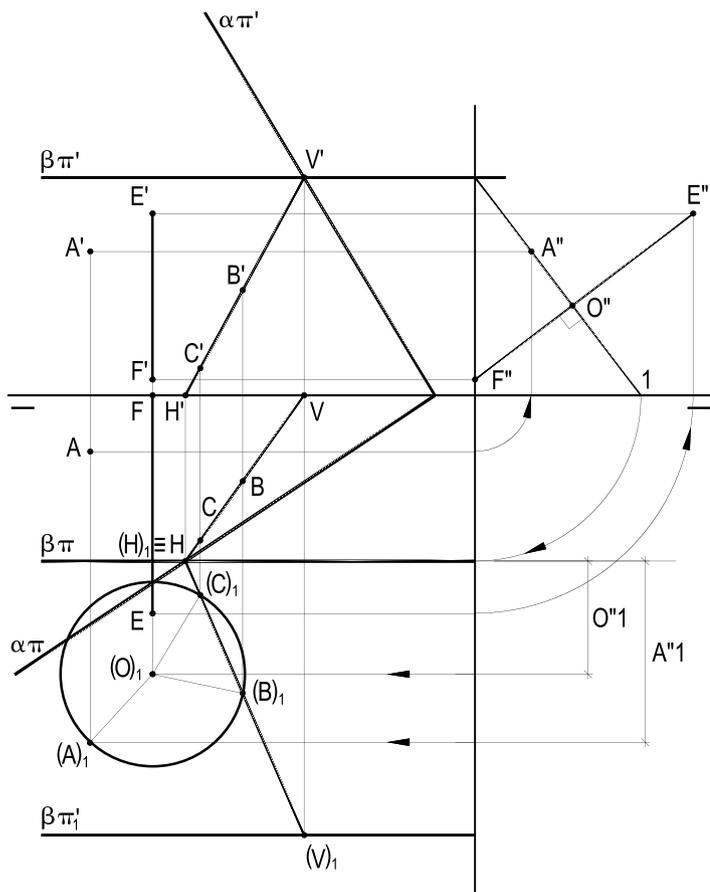


Figura 528

# CAPÍTULO XI

## PROBLEMAS MÉTRICOS DISTÂNCIAS

### 122 – Distâncias

A obtenção das verdadeiras grandezas de distâncias e de ângulos das figuras planas, bem como sua utilização na construção de figuras, principais objetivos da Geometria Descritiva, têm sido devidamente ressaltadas ao longo do presente trabalho.

Aqui, resumiremos os diversos modos antes abordados para as determinações das verdadeiras grandezas das distâncias entre pontos, retas e planos, bem como as resoluções de problemas inversos, quando tais grandezas são fornecidas, pedindo-se a construção de determinado ente geométrico que a possua e que atenda a outras condições impostas.

Adiante detalharemos estudos equivalentes para os ângulos, as equidistâncias e as igualdades de inclinações, completando os assim denominados problemas métricos.

### 123 – Distância entre dois pontos

A determinação da distância entre dois pontos dados é a obtenção da verdadeira grandeza do segmento que eles definem e foi devidamente estudada em capítulos anteriores.

Para o caso mais geral, em que os dois pontos dados (A) e (B) definem um segmento de reta qualquer, como antes visto (números 84.1, 97 e 24.2), a V.G. da distância  $d$  que os separa é obtida pela transformação do segmento (AB) em frontal, ou horizontal, mediante uma mudança de plano (Figura 529), ou de uma rotação (Figura 530), ou do rebatimento de um plano projetante que o contenha (Figura 531).

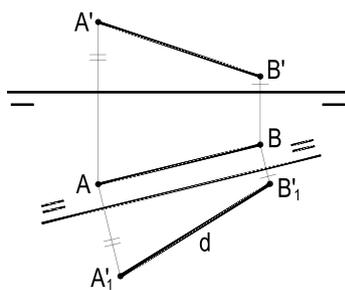


Figura 529

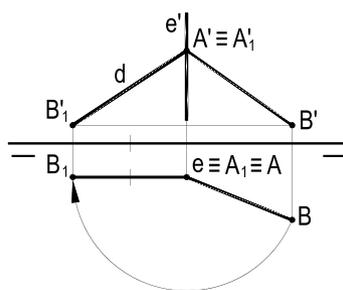


Figura 530

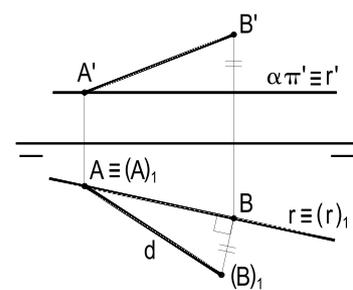


Figura 531

Como prontamente se nota, os procedimentos são bem simples e muito semelhantes, cabendo ao leitor a eleição de sua preferência.

Observe-se que a utilização da rotação, ou do rebatimento de um plano projetante pertencente ao segmento sobre um plano auxiliar horizontal (ou frontal), pode ser efetuada mesmo com a supressão da linha de terra.

## 124 – Problema inverso

O problema inverso consiste na construção das projeções de um segmento (AB), sendo dado o extremo (A), a V.G. do comprimento  $d$  desse segmento e condições a que o extremo procurado (B) deva atender.

Cabe, então, recordar (*Geometria Espacial*, número 183.4, e *Cônicas*, número 184.4) que o lugar geométrico dos pontos (B) distantes  $d$  de (A) é a superfície esférica de centro (A) e raio  $d$  e que, limitado (B) a pertencer a determinado plano ( $\alpha$ ), tal lugar geométrico é a circunferência (c), base do cone de revolução de vértice (A), eixo (AO) perpendicular a ( $\alpha$ ), (O) em ( $\alpha$ ), com geratrizes de comprimento  $d$  (Figura 532).

Vejamos alguns exemplos desse problema inverso:

124.1 – Construir as projeções do segmento (AB) de comprimento igual ao afastamento de (A), sabendo que o extremo (B) pertence ao plano ( $\alpha$ ) e que seu afastamento é o triplo de sua cota. São dados, em épura,  $A', A, \alpha\pi'$  e  $\alpha\pi$  (Figura 533).

Escolher a solução que corresponda à maior abscissa para (B).

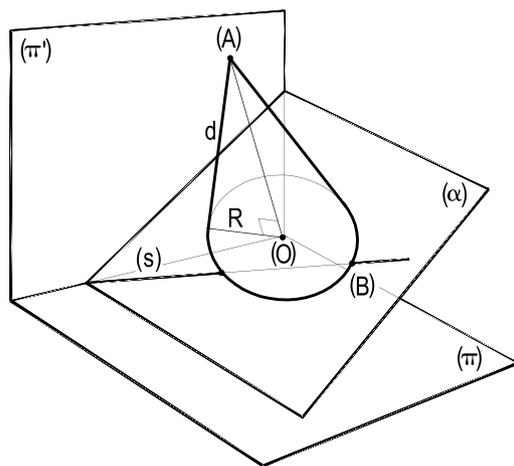


Figura 532

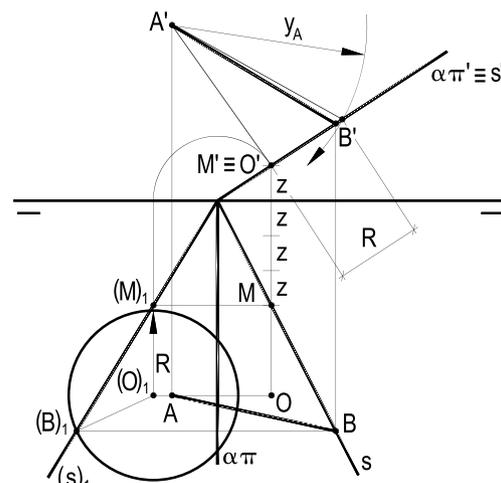


Figura 533

Na resolução, foi utilizada a reta (s), de ( $\alpha$ ), cujo pontos, por homotetia, atendem à condição enunciada de afastamento igual ao triplo da cota.

E o segundo ponto de interseção dessa reta com o círculo base do cone foi dispensado, para que o ponto (B) viesse a ter a maior abscissa possível.



124.3 – Construir as projeções do segmento (AB) de comprimento igual à cota do ponto (A), sabendo que (B) pertence ao plano ( $\alpha$ ), equidistante dos traços desse plano.

Dados o ponto (A), por suas duas projeções, e o plano ( $\alpha$ ), por seus traços.

Seguindo o procedimento padrão desse tipo de problema inverso, traçada a perpendicular (AO) a ( $\alpha$ ), (O) em ( $\alpha$ ), e determinada sua verdadeira grandeza  $\overline{AO} = d$ , mediante a construção auxiliar do triângulo retângulo 123, obtém-se o valor do raio R do círculo base do cone de revolução a ser utilizado.

Então, rebatido ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ), com centro ( $O_1$ ) e raio R, constrói-se o círculo base do cone, que intercepta a bissetriz de um dos ângulos formados pelos traços de ( $\alpha$ ) em dois pontos  $(B_1)_1$  e  $(B_2)_1$ , que, alçados, proporcionam as duas soluções para o problema (Figura 535).

Observe-se que a bissetriz externa ( $b_e$ ) do ângulo formado pelos traços do ( $\alpha$ ) não atinge aquele círculo, evitando que existam outras duas soluções para o segmento (AB) pedido.

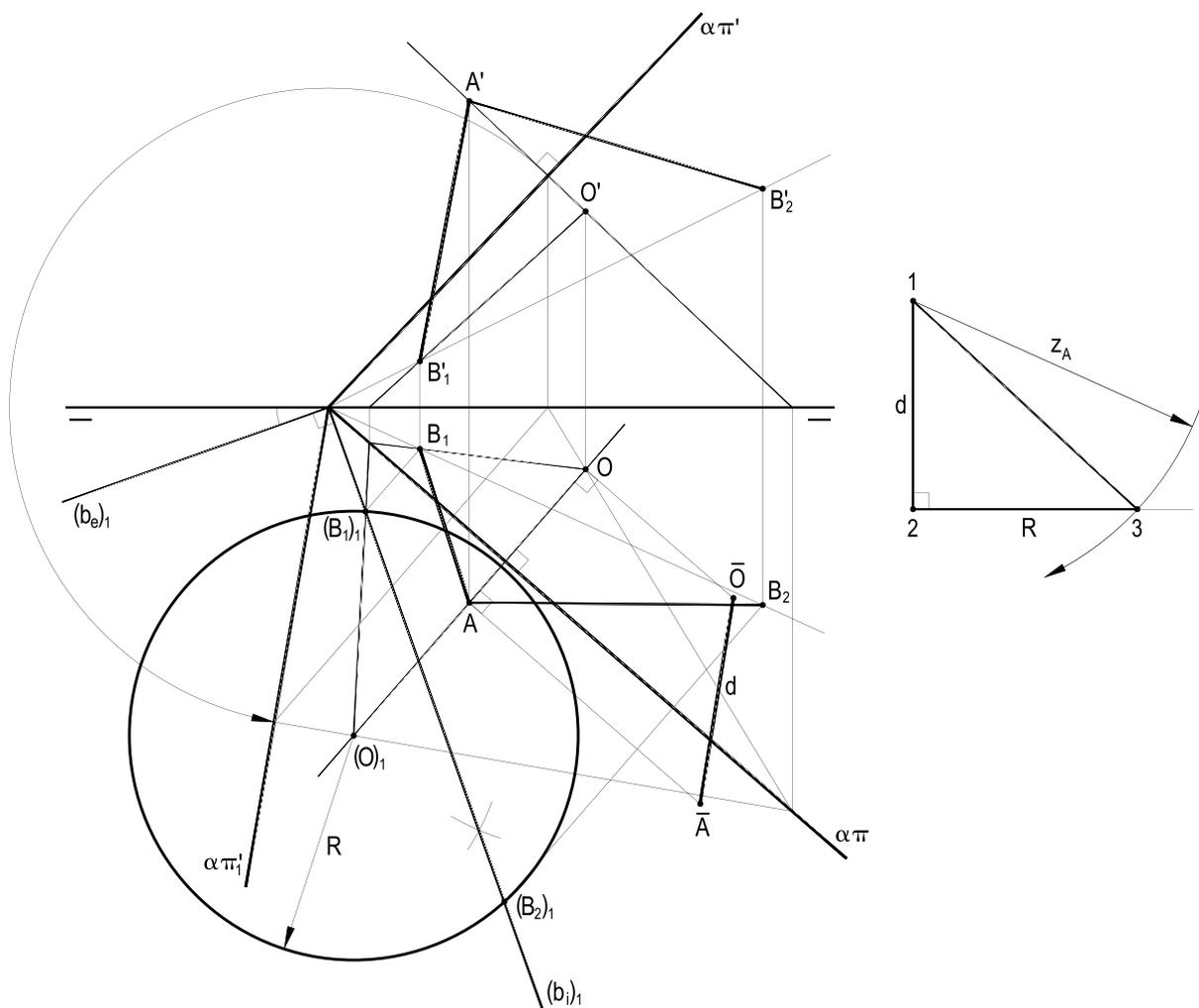


Figura 535

## 125 – Distância de ponto à reta

A perpendicular que mede a distância  $d$  de um ponto ( $A$ ) exterior a uma reta ( $r$ ) pertence ao plano formado por ( $A$ ) e ( $r$ ). Por isso, para obter a V.G. dessa distância, quando a reta é qualquer, basta rebater o plano formado pelo ponto e pela reta sobre um dos planos de projeção, ou sobre um plano paralelo a um deles. É o caso exemplificado na Figura 536, em que a V.G. da distância  $d$  do ponto ( $A$ ) à reta ( $r$ ) foi obtida com um rebatimento sobre o plano horizontal que contém ( $A$ ).

Idêntico é o procedimento quando a reta ( $r$ ) é de perfil, como no exemplo da Figura 537, em que ( $r$ ) vem dada por dois pontos ( $P$ ) e ( $Q$ ).

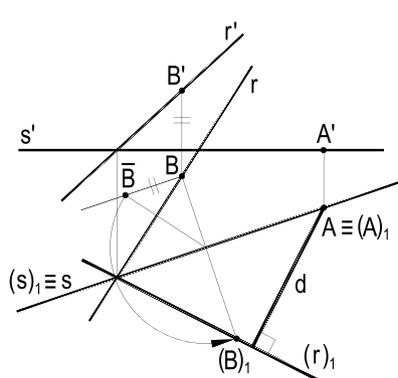


Figura 536

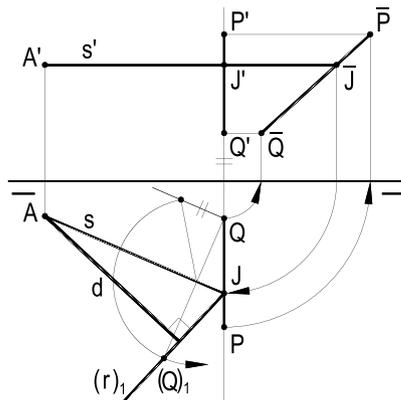


Figura 537

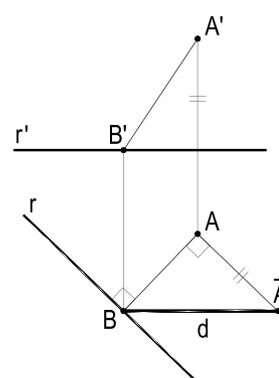


Figura 538

Quando, no entanto, a reta dada ( $r$ ) é paralela (Figuras 538 e 539), ou perpendicular (Figuras 540 e 541), a um dos planos de projeção, o problema fica muito simplificado, como mostram suas próprias épuras.

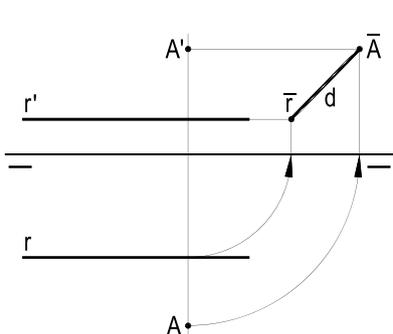


Figura 539

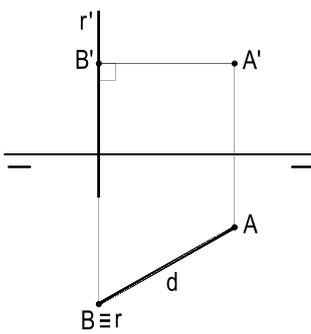


Figura 540

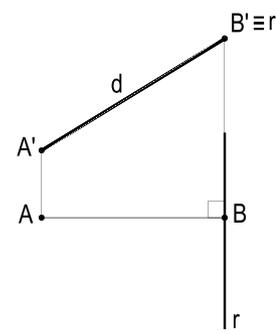


Figura 541

## 126 – Problema inverso

Há duas possibilidades: ou se dá uma reta ( $r$ ) e se pede determinar um ponto ( $A$ ), que dela diste um valor dado  $d$ , atendendo a alguma condição estabelecida, ou, ao contrário, se dá um ponto ( $A$ ), pedindo-se determinar uma reta ( $r$ ), distando um valor conhecido  $d$  daquele ponto, obediente a certas condições fixadas.

Na primeira hipótese, o lugar geométrico dos pontos (A) é (*Geometria Espacial*, número 183.1) a superfície cilíndrica de revolução de eixo (r) e raio d (Figura 542); na segunda, a reta procurada (r) há de ser tangente à superfície esférica de centro (A) e raio igual à distância dada (*Geometria Espacial*, números 183.4 e 187) (Figura 544).

Passemos a alguns exemplos:

126.1 – Dados um ponto (B) e uma reta (r), exteriores, pede-se construir o segmento (AB) ortogonal a (r), tal que a distância de (A) a (r) seja igual à cota de (B), sabendo que o ponto (A) corresponde à maior abscissa possível.

Solução: Para ser ortogonal à reta dada (r), o segmento (AB) tem de pertencer ao plano ( $\alpha$ ), traçado por (B) e perpendicular a (r).

Como visto, o lugar geométrico dos pontos (A) há de ser a superfície cilíndrica de revolução de eixo (r) e raio d, igual à cota de (B). E, para pertencer a ( $\alpha$ ), o ponto (A) deverá pertencer ao círculo (c), interseção deste plano com aquela superfície (Figura 542).

Assim, construído o plano ( $\alpha$ ) e obtida sua interseção (O) com (r), mediante seu rebatimento sobre ( $\pi$ ), pode-se traçar, em verdadeira grandeza, o círculo (c).

E para conseguir, sobre (c), o ponto de abscissa máxima, basta rebater uma reta (V)(H), de perfil, de ( $\alpha$ ) e buscar a tangente ao círculo (c)<sub>1</sub> que tenha sua direção, o que se consegue traçando, pelo seu centro, a perpendicular àquela direção (Figura 543) que produz (A)<sub>1</sub>, o rebatimento do ponto procurado.

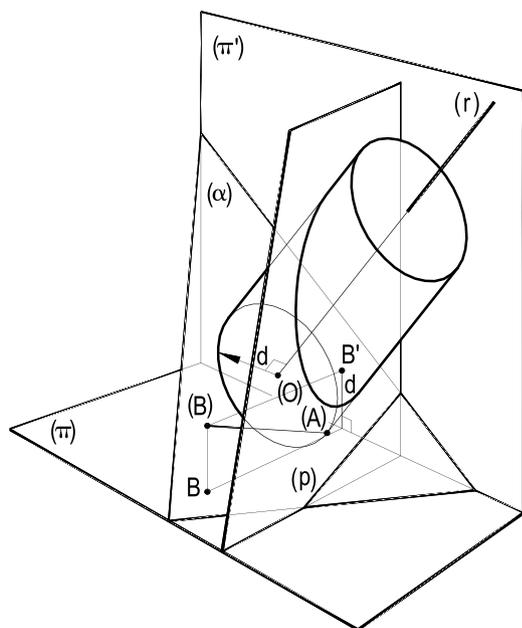


Figura 542

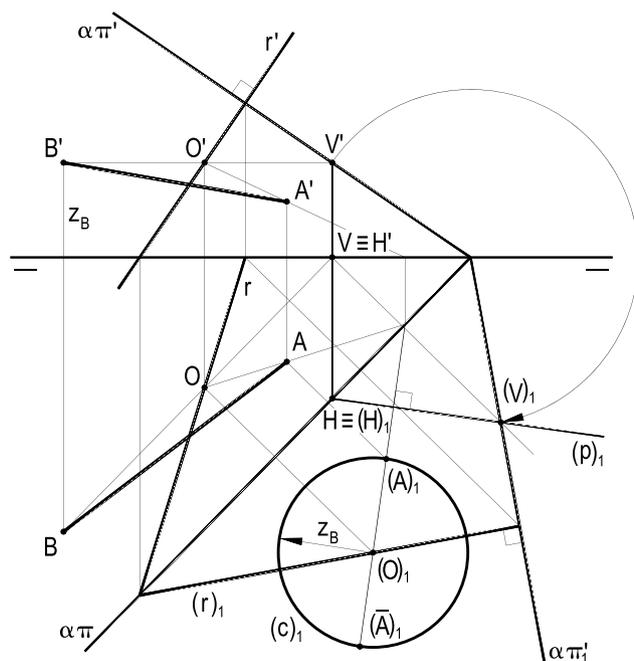


Figura 543

126.2 – Construir as projeções da reta ( $r$ ), distante do ponto dado ( $A$ ), tanto quanto o afastamento desse ponto, sabendo que ( $r$ ) deve pertencer ao plano vertical dado ( $\alpha$ ) e formar  $60^\circ$  com ( $\pi$ ). Basta apresentar uma solução.

Solução: Como visto anteriormente (número 126), a reta ( $r$ ) procurada deve ser tangente à superfície esférica de centro ( $A$ ) e raio igual ao afastamento  $y_A$  do ponto ( $A$ ). E, por ter de pertencer ao plano vertical ( $\alpha$ ), dado, ( $r$ ) deve tangenciar o círculo seção que este plano produz na superfície esférica (Figura 544). Para determinar o raio  $R$  desse círculo, foi construído o triângulo retângulo 123, com um cateto igual à distância  $d$ , de ( $A$ ) a ( $\alpha$ ), e hipotenusa igual a  $y_A$ .

Feito o rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi'$ ), é imediato o traçado do círculo seção  $e$ , com a construção, em V.G., de uma reta ( $t$ )<sub>1</sub> inclinada de  $60^\circ$  em relação a ( $\pi$ ), define-se a direção de uma das soluções ( $r$ )<sub>1</sub>, que, alçada, responde ao problema (Figura 545).

Note-se que há quatro soluções, as quatro tangentes àquele círculo, com a inclinação pedida, tendo sido construída e alçada apenas uma (Figura 545).

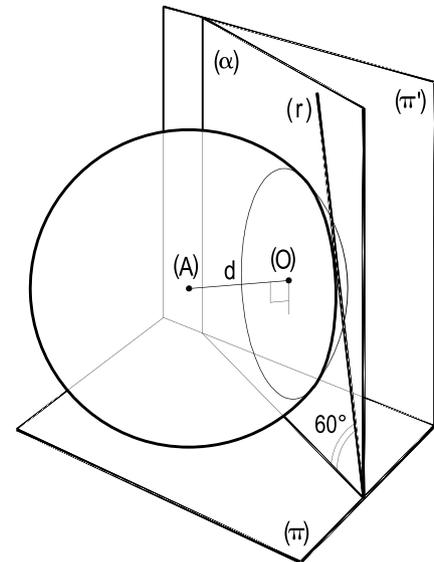


Figura 544

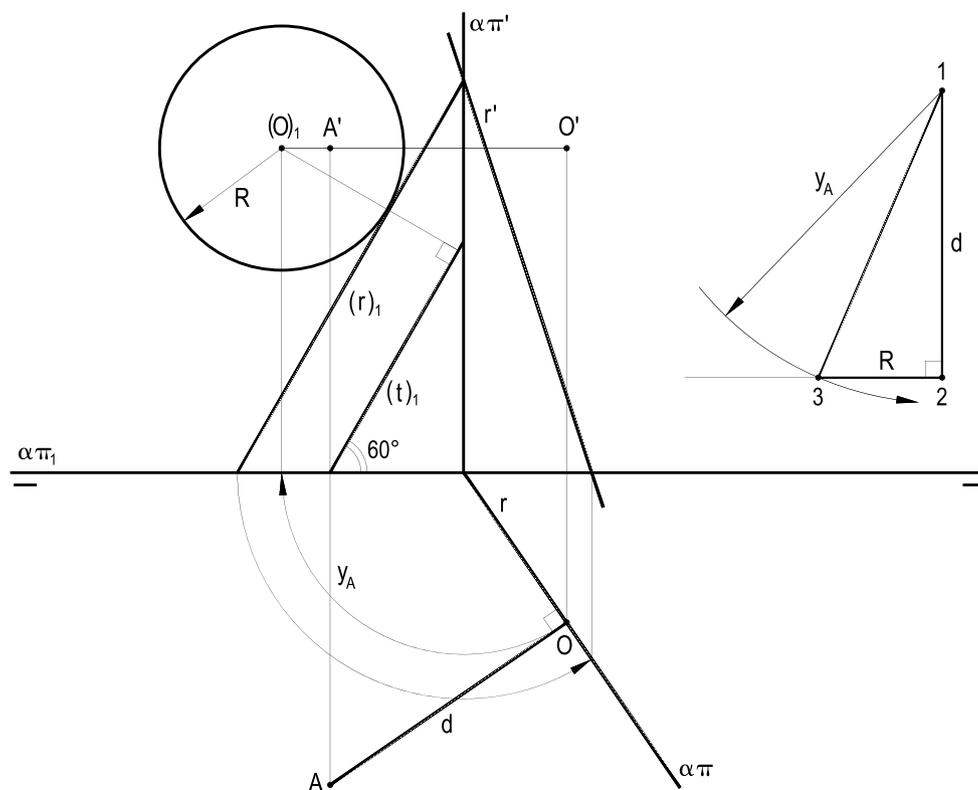


Figura 545

## 127 – Distância de ponto a plano

É bem simples a obtenção do valor da distância  $d$  de um ponto  $(A)$  a um plano  $(\alpha)$ , exteriores, residindo na construção da perpendicular  $(AO)$  do ponto ao plano –  $(O)$  em  $(\alpha)$  – e da determinação da V.G. do comprimento do segmento  $(AO)$  (Figuras 546 e 547).

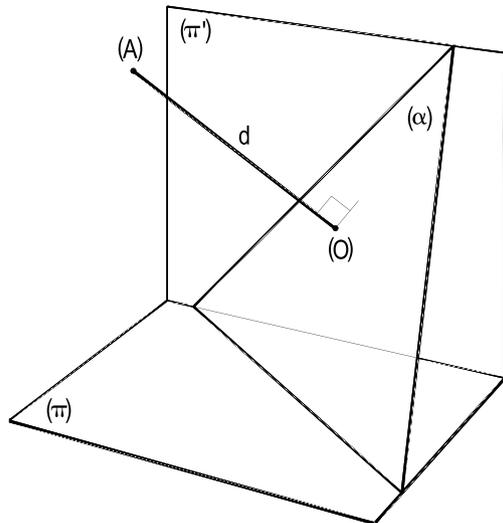


Figura 546

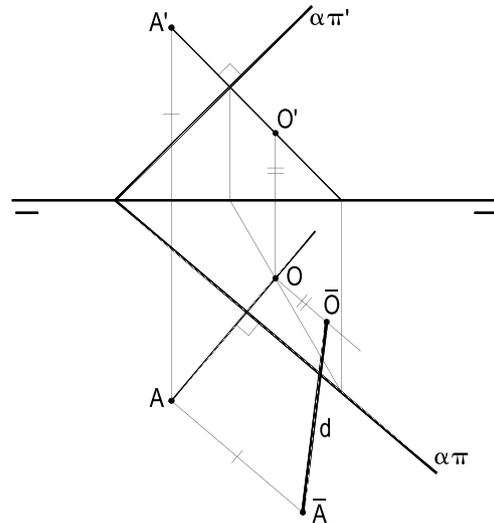


Figura 547

## 128 – Problema inverso

Há duas hipóteses para os problemas inversos, conforme seja dado o plano  $(\alpha)$ , ou o ponto  $(A)$ , além do valor da distância  $d$ , que os separa.

Quando o dado é o plano  $(\alpha)$ , o lugar geométrico dos pontos  $(A)$  que dele distam o valor constante  $d$  é o par de planos  $(\beta)$  e  $(\varphi)$  paralelos a  $(\alpha)$ , deles distantes  $d$  (Figura 548), de modo que, para determinar um ponto  $(A)$ , nessas condições, atendendo a alguma(s) condição(ções), basta construir  $(\beta)$  e  $(\varphi)$  e aplicar tal(is) condição(ções).

Para a segunda hipótese, qual seja a ter sido dado o ponto  $(A)$ , a distância  $d$  e algumas condições aplicáveis ao plano procurado  $(\alpha)$ , sabe-se (*Geometria Espacial*, número 213) que tais planos devem ser tangentes à superfície esférica de centro  $(A)$  e raio  $d$ , o que conduz à resolução da questão.

Vejamos dois exemplos:

128.1 – Determinar as projeções do ponto  $(A)$ , distante 7 mm do plano  $(\alpha)$ , dado por seus traços, sabendo que  $(A)$  pertence à reta  $(r)$ , dada por suas projeções.

Solução: Inicialmente, mediante uma mudança de  $(\pi')$ , são construídos os planos  $(\beta)$  e  $(\varphi)$ , paralelos a  $(\alpha)$  e deste distantes o valor estipulado (Figura 549), para, a seguir, determinar os traços  $(A_1)$  e  $(A_2)$  de  $(r)$  com estes planos, resolvendo o problema (Figura 549).

Naturalmente, seria possível, também, levar a reta dada ( $r$ ) ao novo sistema biprojetivo após a mudança e, ali, determinar seus traços ( $A'_1$ ) e ( $A'_2$ )<sub>1</sub>, para, em seguida, retorná-los ao sistema original, tal como apresentado na Figura 550.

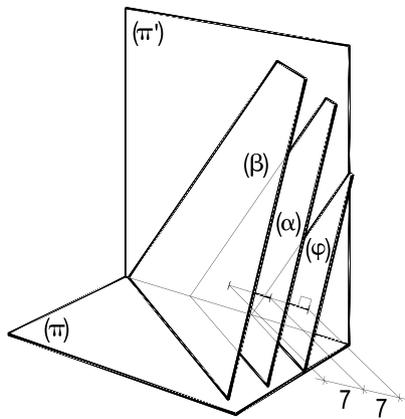


Figura 548

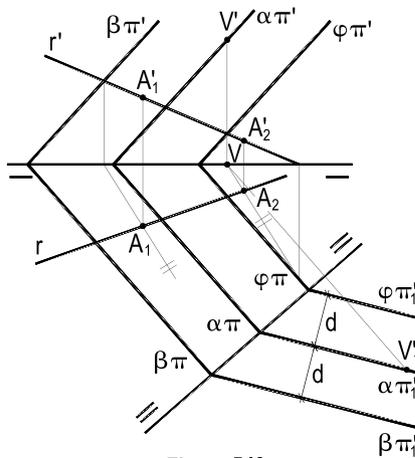


Figura 549

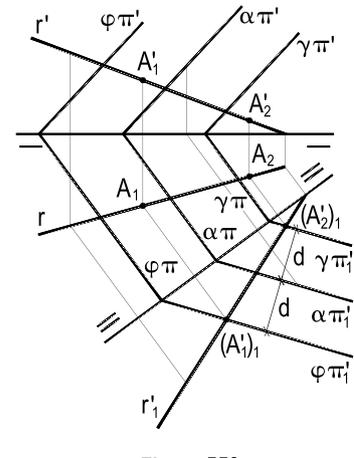


Figura 550

128.2 – Construir o plano ( $\alpha$ ), distante 13 mm do ponto ( $A$ ), dado por suas projeções, sabendo que ele é paralelo às retas ( $h$ ) e ( $f$ ), dadas ambas por suas projeções.

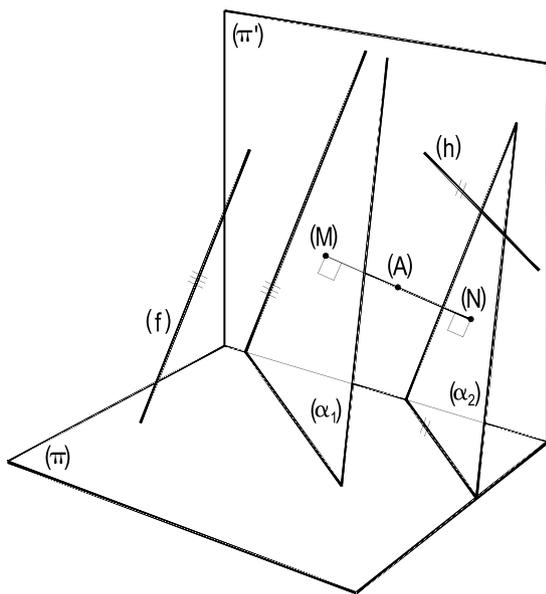


Figura 551

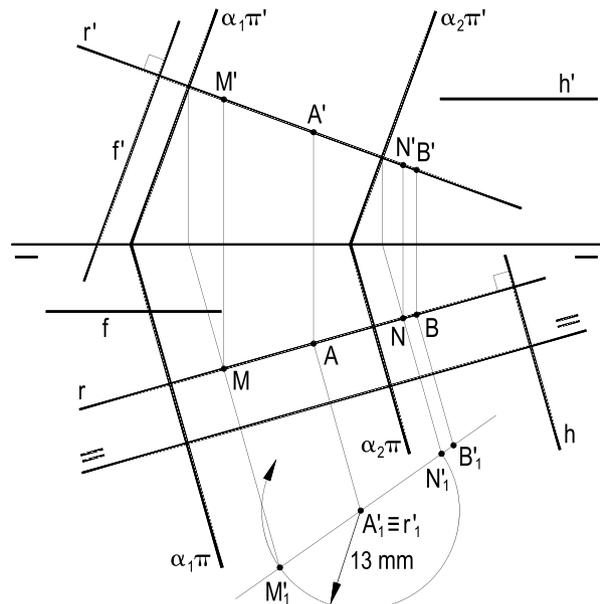


Figura 552

A solução é, em muito, simplificada por serem as retas dadas ( $h$ ) e ( $f$ ) paralelas às principais do plano pedido ( $\alpha$ ). Para obtê-lo, basta traçar, por ( $A$ ), a reta ( $r$ ) ortogonal às dadas e, mediante uma mudança de ( $\pi'$ ), que a transforma em frontal, marcar nela, nos dois sentidos, a distância dada, conseguindo definir os pontos ( $M$ ) e ( $N$ ), aos quais pertencerão os dois planos ( $\alpha_1$ ) e ( $\alpha_2$ ) que resolvem o problema.

### 129 – Distância entre duas retas paralelas

O problema é exatamente o mesmo que o analisado no número 125, visto que a distância entre um ponto e uma reta exteriores é a mesma entre duas retas paralelas, uma delas contendo aquele ponto.

### 130 – Distância entre duas retas reversas

A simples determinação da distância entre duas retas reversas se faz pela obtenção da V.G. da distância de uma delas a um plano a ela paralelo e pertencente à outra reversa, ou, o que é o mesmo, da V. G.  $d$  da distância de um ponto de uma das retas ao plano a ela paralelo, contendo a outra. E, com isso, recai-se no abordado no item 127.

### 131 – Distância entre reta e plano, paralelos

A determinação da distância  $d$  entre uma reta ( $r$ ) e um plano ( $\alpha$ ) a ela paralelo é a mesma que a estudada no item 127, anterior, da distância de um ponto a um plano, alcançada pela obtenção da V. G.  $d$  do segmento de perpendicular ao plano baixado por um ponto ( $A$ ) qualquer da reta (Figura 553) e limitado pelo plano.

### 132 – Distância entre planos paralelos

Também a obtenção da distância  $d$  entre dois planos paralelos recai no mesmo estudo anterior (número 127), quando da determinação da V. G.  $d$  da distância entre ponto e plano, exteriores, como ( $A$ ) e ( $\alpha$ ), na Figura 554.

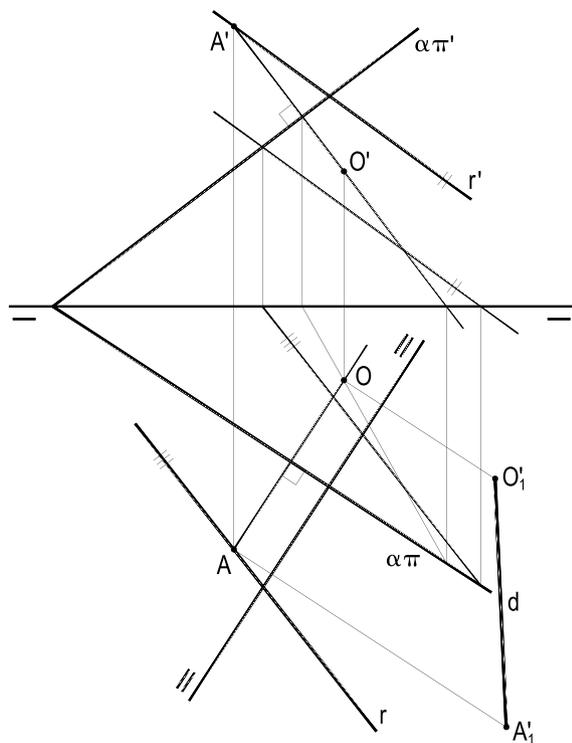


Figura 553

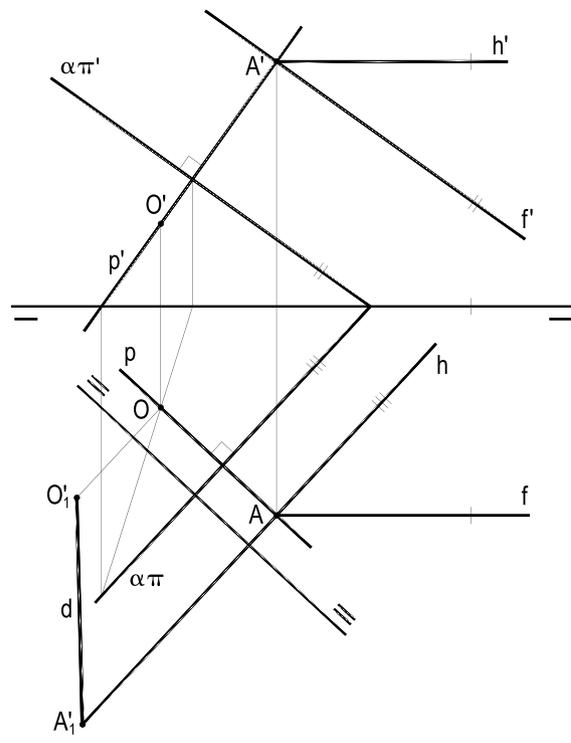


Figura 554

# CAPÍTULO XII

## PROBLEMAS MÉTRICOS ÂNGULOS

**133** – Tão importante quanto a determinação das verdadeiras grandezas de distâncias é a equivalente para os ângulos, já parcialmente abordada em capítulo anteriores, que, agora, passamos a detalhar em maior profundidade.

### 134 – Ângulo de reta com cada plano de projeção

Como visto (números 84.1, 97 e 24.2), cada um dos métodos descritivos oferece solução à obtenção das verdadeiras grandezas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , que uma reta qualquer forma, respectivamente, com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$ .

Assim são os exemplos apresentados para resolver a questão, utilizando mudanças de planos (Figura 555), rotações (Figura 556) e rebatimentos (Figura 557).

Deixamos a escolha ao leitor, função de sua preferência.

Nas duas últimas figuras abaixo, destaque-se o fato de os métodos utilizados independentem da existência da linha de terra, em suas épuras.

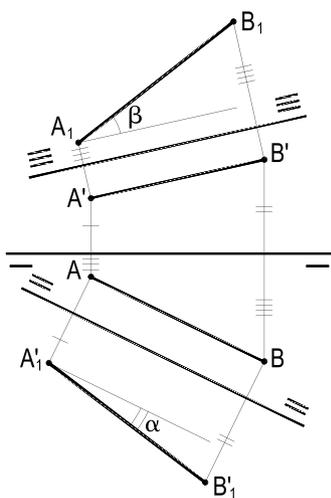


Figura 555

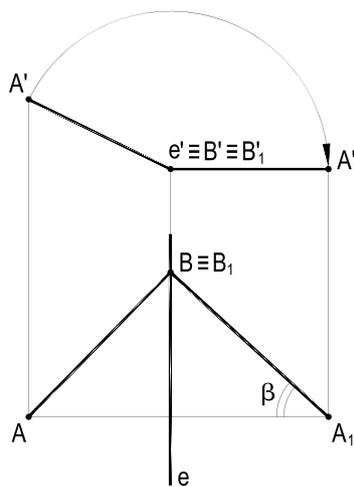


Figura 556

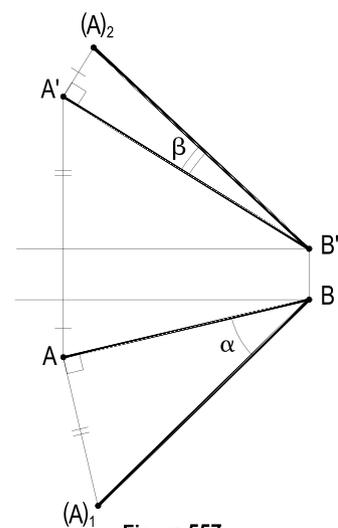


Figura 557

### 135 – Ângulo de plano com cada plano de projeção

Com a aplicação do método das mudanças, transformando um plano qualquer ( $\gamma$ ) em de topo, ou vertical, como antes apresentado (número 86), ficam imediatas as obtenções, respectivamente, dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que ele forma com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$  (Figura 558), o que também é imediato (número 120) com a utilização de triângulos de rebatimento (Figura 559), mesmo para planos não dados por seus traços (Figura 560).

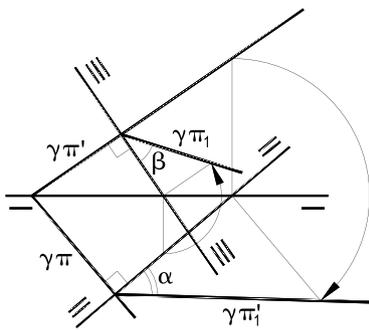


Figura 558

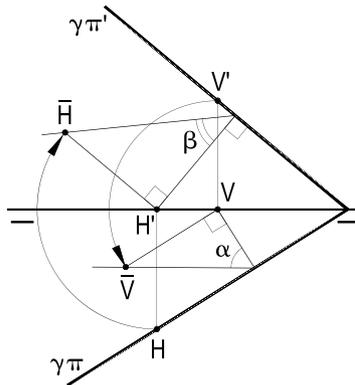


Figura 559

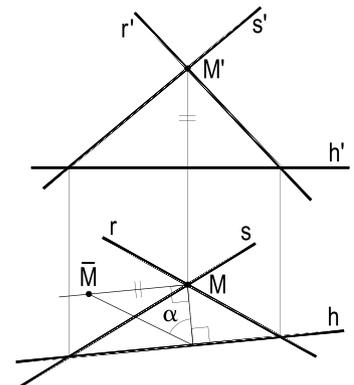


Figura 560

### 136 – Ângulos de reta e de plano com plano de perfil e com a linha de terra

Com procedimentos semelhantes, bem simples aliás, consegue-se obter as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\rho$  e  $\varphi$  que um plano qualquer ( $\gamma$ ), ou que uma reta qualquer ( $r$ ), formam, respectivamente, com os planos de perfil e com a linha de terra.

Para o caso do plano, a reta escolhida deve, naturalmente, ser uma de maior declive desse plano, em relação ao de perfil (Figuras 561 e 562).

A construção se aplica mesmo para planos não dados por seus traços (Figura 563), pela utilização de um plano ( $\theta$ ) paralelo ao dado.

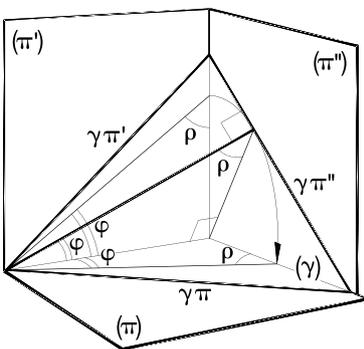


Figura 561

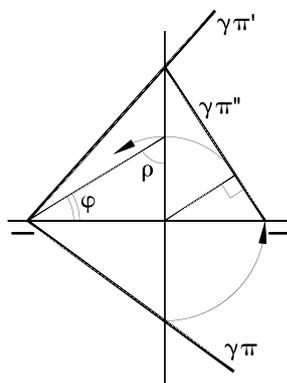


Figura 562

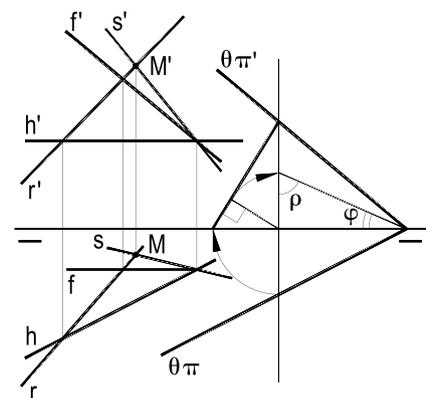


Figura 563

Para determinar as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\varphi$  e  $\rho$  que uma reta qualquer ( $r$ ) forma, respectivamente, com a linha de terra e com os planos de perfil, basta girar uma reta ( $s$ ), paralela a ( $r$ ) e concorrente com  $(\pi'\pi)$ , em torno de  $(\pi'\pi)$ , até que tais ângulos venham em V.G. sobre qualquer dos planos de projeção (Figuras 564 e 565).

O procedimento aplica-se mesmo com a supressão da linha de terra, utilizando-se, então, como eixo para a rotação, uma fronto-horizontal ( $f$ ) arbitrariamente escolhida (Figura 566), mas concorrente com ( $r$ ).

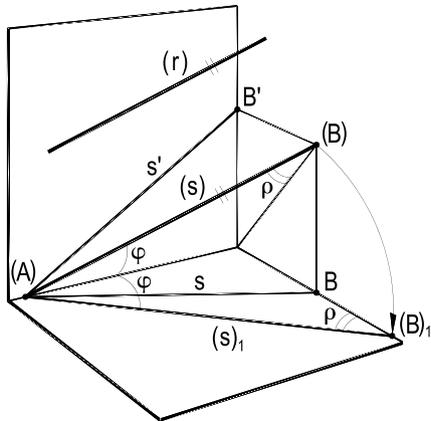


Figura 564

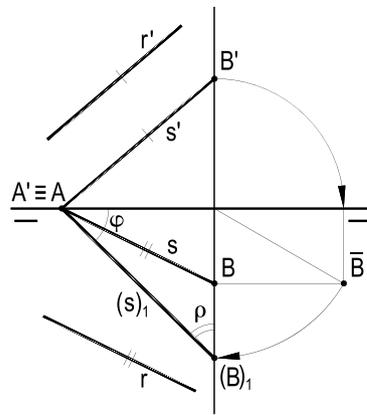


Figura 565

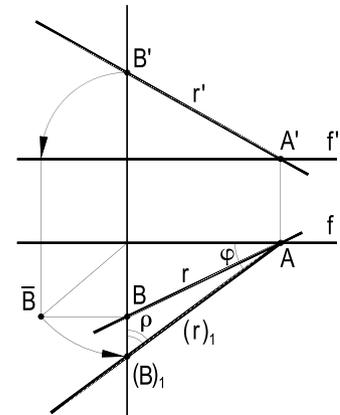


Figura 566

### 137 – Ângulo de duas retas

Para a obtenção da V.G. do ângulo  $\alpha$  formado entre duas retas concorrentes ( $r$ ) e ( $s$ ), basta rebater o plano por elas formado sobre um referencial adequado, horizontal (Figura 567), ou frontal. Se as duas retas dadas ( $r$ ) e ( $s$ ) forem reversas, o traçado, por um ponto ( $M$ ) qualquer de ( $r$ ), de uma reta ( $t$ ), paralela a ( $s$ ) (Figura 568), faz retornar a questão às condições anteriores.

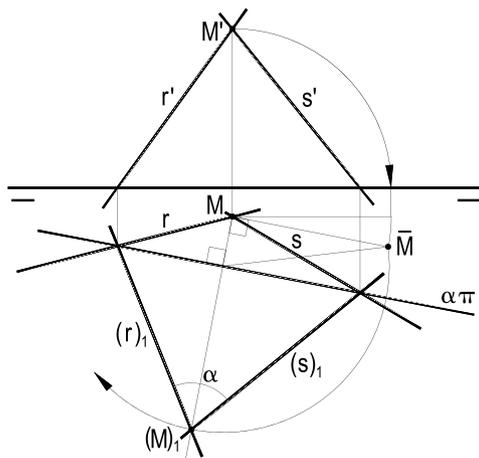


Figura 567

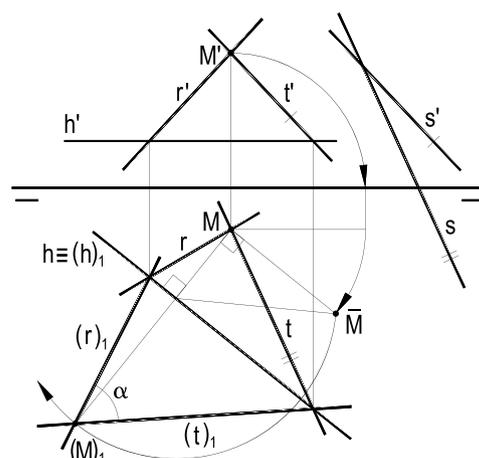


Figura 568

## 138 – Ângulo de reta com plano

Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 44) que, por definição, ângulo que uma reta forma com um plano é o ângulo que ela forma com sua projeção ortogonal sobre o plano.

Consideremos, então, uma reta ( $r$ ) e um plano ( $\gamma$ ) quaisquer e baixemos, por um ponto ( $M$ ), genérico, de ( $r$ ), a perpendicular ( $p$ ) a ( $\gamma$ ), para ter a projeção ortogonal ( $s$ ) de ( $r$ ) sobre ( $\gamma$ ) e, então, o ângulo  $\alpha$  que ( $r$ ) forma com ( $\gamma$ ). Observe-se que tal ângulo  $\alpha$  (Figura 569) é o complemento do ângulo  $\varphi$  formado entre as retas ( $r$ ) e ( $p$ ).

Assim, para obter a verdadeira grandeza do ângulo  $\alpha$  que uma reta ( $r$ ) forma com um plano ( $\gamma$ ), basta traçar, por um ponto ( $M$ ), qualquer, de ( $r$ ), a perpendicular ( $p$ ) a ( $\gamma$ ) e determinar a V.G. do ângulo  $\varphi$  entre essas duas retas, como detalhado no item anterior. O ângulo procurado será o complemento  $\alpha$  desse ângulo  $\varphi$  (Figuras 569 e 570).

Mesmo que o plano ( $\gamma$ ) venha definido por duas de suas retas ( $a$ ) e ( $b$ ), permanece válido o procedimento (Figura 571).

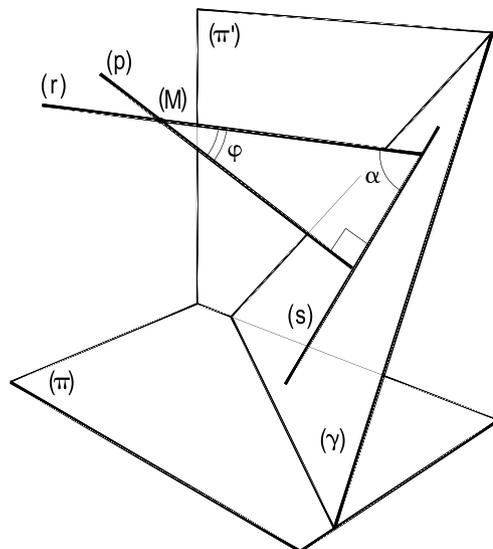


Figura 569

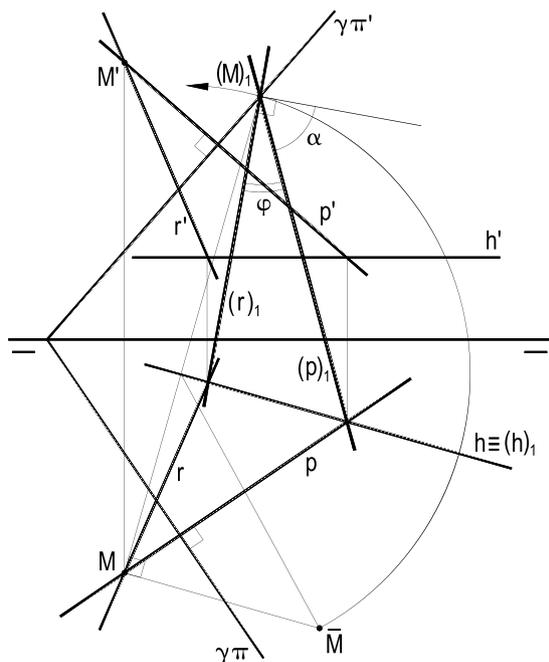


Figura 570

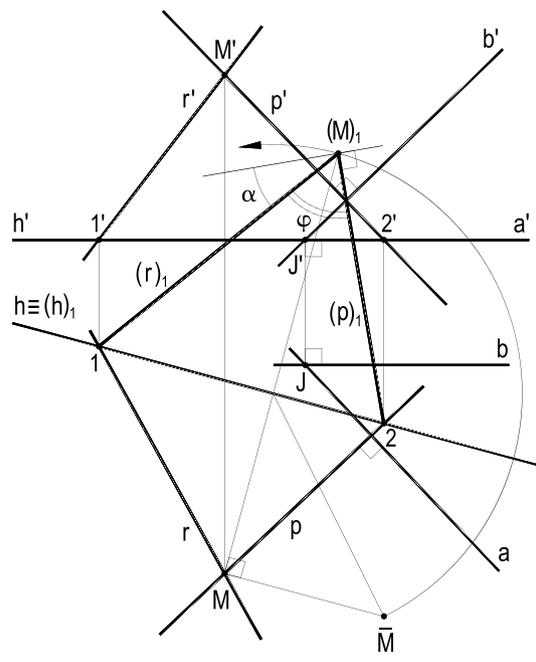


Figura 571

### 139 – Problema inverso

O problema inverso, clássico, consiste em, dados um plano ( $\gamma$ ) e um ponto ( $A$ ), construir uma reta ( $r$ ) que, pertencendo a ( $A$ ) e formando um ângulo dado  $\alpha$  com ( $\gamma$ ), atenda a alguma(s) condição(ões) imposta(s).

A solução geral deve considerar a superfície cônica de revolução que tenha vértice ( $A$ ), eixo perpendicular ao plano dado ( $\gamma$ ) e semiângulo no vértice igual ao complemento de  $\alpha$ , que, sabe-se (*Geometria Espacial*, número 183.3), é o lugar geométrico das retas que podem responder ao pedido.

Tudo, então, se passará pela determinação das geratrizes que atendam às condições impostas.

Vejamos alguns exemplos:

139.1 – Construir as projeções das retas ( $r$ ) e ( $s$ ), pertencentes ao ponto ( $A$ ), sabendo que elas formam  $60^\circ$  com o plano ( $\alpha$ ) e que seus traços horizontais pertencem a ( $\alpha$ ).

Dados o ponto ( $A$ ), por suas projeções, e o plano ( $\alpha$ ), por seus traços.

Solução: Traça-se a perpendicular ( $A$ )( $O$ ) a ( $\alpha$ ), ( $O$ ) em ( $\alpha$ ) e, mediante a construção de um triângulo retângulo de ângulos  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , obtém-se, a partir da V.G. de  $\overline{(A)(O)}$ , o valor  $R$  do raio do círculo base do cone que resolve a questão.

Rebate-se, então, ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ), para a construção, em V.G., desse círculo, bem como suas interseções com  $\alpha\pi$ , para atender à condição de pertinência dos traços horizontais ( $P$ ) e ( $Q$ ) das retas pedidas a ( $\alpha$ ) (Figuras 572 e 573), que são, então, as retas ( $A$ )( $P$ ) e ( $A$ )( $Q$ ).

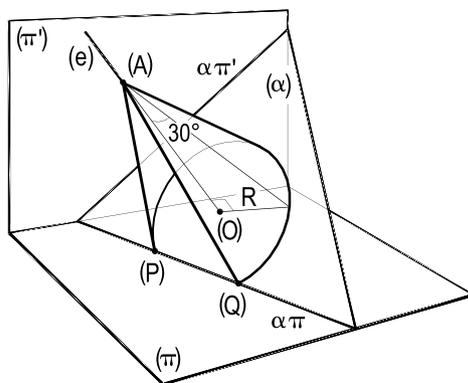


Figura 572

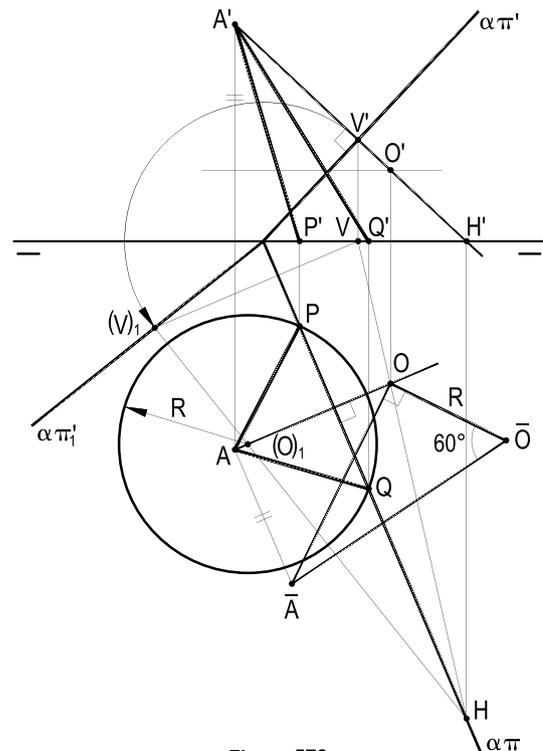


Figura 573

139.2 – Construir as projeções da reta ( $r$ ), pertencente ao ponto ( $A$ ) e inclinada de  $45^\circ$ , em relação ao plano ( $\alpha$ ), sabendo que o traço de ( $r$ ) em ( $\alpha$ ) pertence ao bissetor ímpar.

Dados ( $A$ ), por suas projeções, e ( $\alpha$ ), por seus traços.

Solução: A reta ( $r$ ) pedida há de ser uma geratriz do cone de revolução de vértice ( $A$ ), assente pela base em ( $\alpha$ ), com semiângulo no vértice igual a  $45^\circ$ . Deve-se, então, construir a perpendicular ( $p$ ), de ( $A$ ) a ( $\alpha$ ), bem como seu traço ( $O$ ) em ( $\alpha$ ), que será o centro do círculo base do cone procurado, além da interseção ( $i$ ) de ( $\alpha$ ) com ( $\beta_{13}$ ), à qual terá de pertencer o traço ( $B$ ) da reta ( $r$ ) procurada com ( $\alpha$ ) (Figura 574).

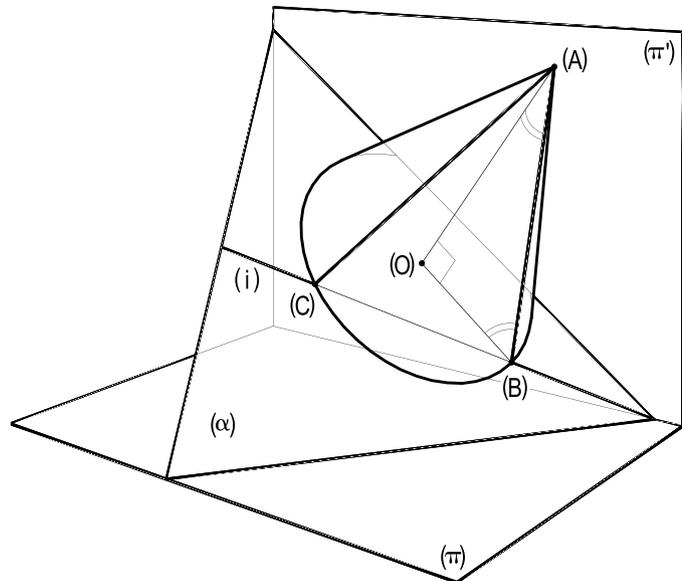


Figura 574

Devido ao ângulo especial de  $45^\circ$ , o raio  $R$  da base do cone tem de ser igual à V.G.  $A\bar{A}$  da distância de ( $A$ ) a ( $\alpha$ ) (Figura 575). Assim, rebatido ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ), inclusive com  $(i)_1$ , rebatimento da interseção ( $i$ ) de ( $\alpha$ ) com ( $\beta_{13}$ ), basta traçar o círculo de centro  $(O)_1$  e raio  $R$ , para obter o rebatimento  $(B)_1$  do ponto ( $B$ ) procurado e alçá-lo, para ter as projeções da reta ( $r$ ) pedida (Figura 575).

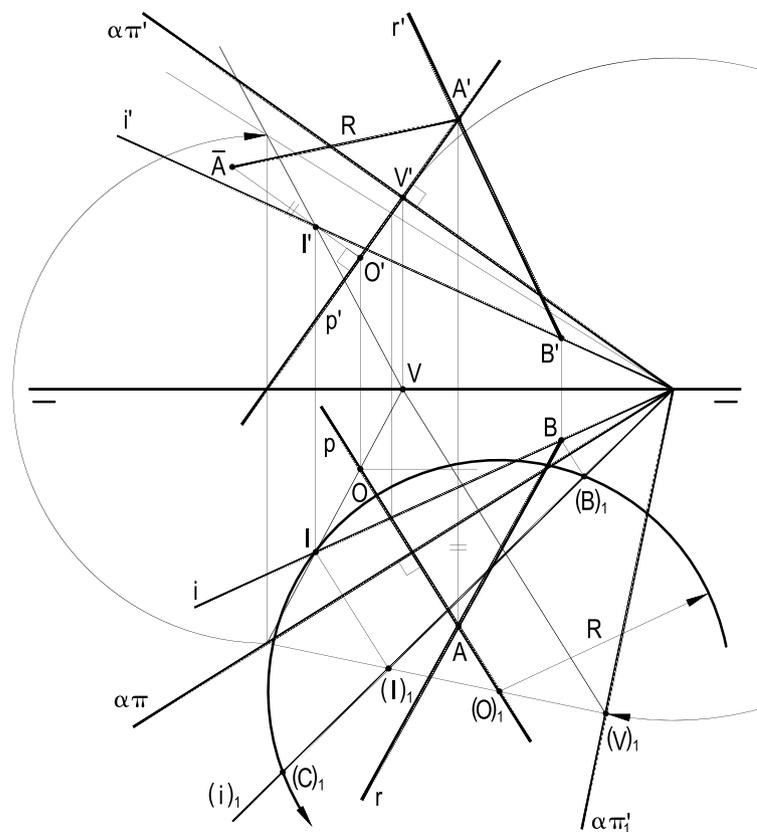


Figura 575

Observe-se que o problema oferece uma segunda solução,  $(A)(C)$ , não representada na épura.

## 140 – Ângulo de dois planos

Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 36.3) que, dados dois planos oblíquos ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ), as perpendiculares ( $r$ ) e ( $s$ ) a cada um deles, traçadas por um ponto ( $M$ ), qualquer, formam, entre si, ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  iguais aos formados entre os planos (Figura 576).

Assim, dados dois planos quaisquer ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ), por seus traços, para obter a V.G. do ângulo entre eles formado, basta, por um ponto arbitrado ( $M$ ), baixar as perpendiculares ( $r$ ) e ( $s$ ) a cada um deles e determinar a V.G. do ângulo  $\alpha$  formado por essas duas retas (Figura 577), recaindo-se, assim, no detalhado no item 137.

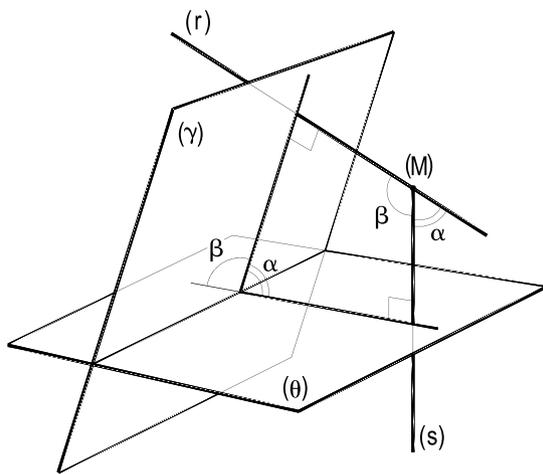


Figura 576

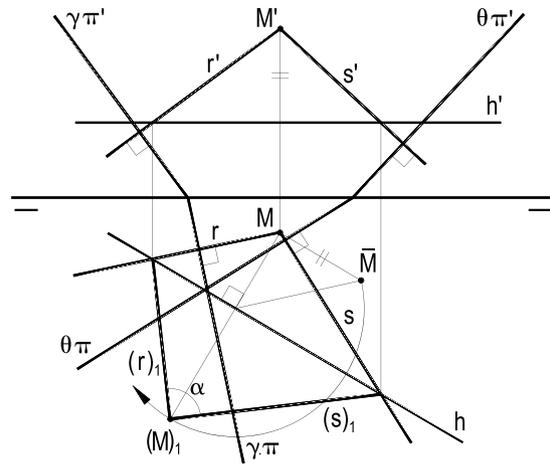


Figura 577

Mesmo que um dos planos, ou até mesmo os dois, não venha dado por seus traços, mas por duas de suas retas, como (a) e (b) e como ( $r$ ) e ( $s$ ) na Figura 578, basta construir suas principais, para trabalhar com suas direções, às quais serão perpendiculares as retas ( $r$ ) e ( $s$ ), que irão responder à questão proposta.

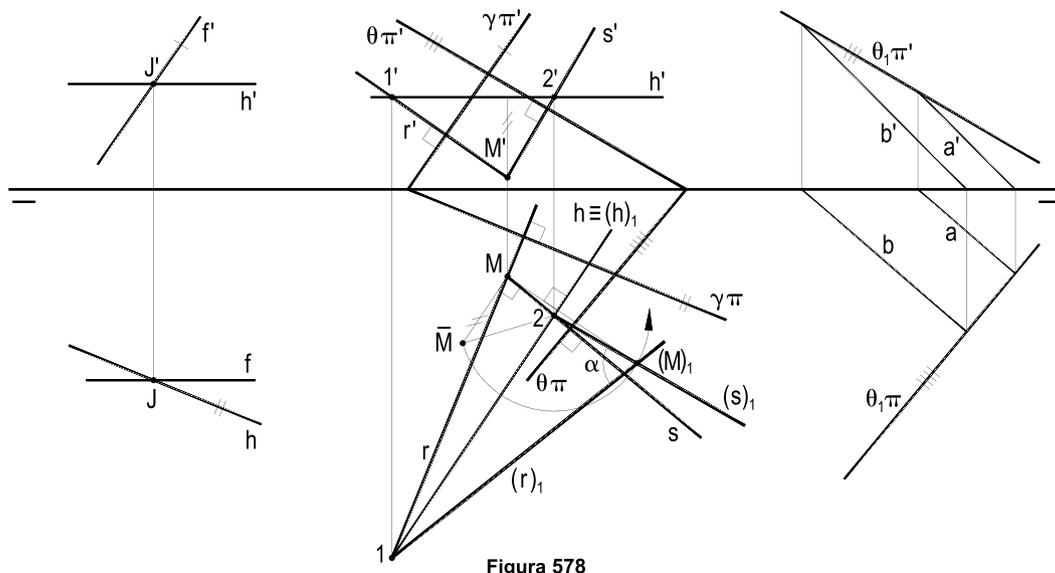


Figura 578

Quando os dois planos ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ) são perpendiculares a um dos planos de projeção (Figuras 579, 580 e 581), devido a essas situações particulares, as verdadeiras grandezas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que eles formam apresentam-se entre os traços nos planos aos quais são perpendiculares.

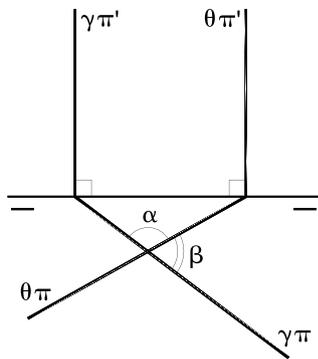


Figura 579

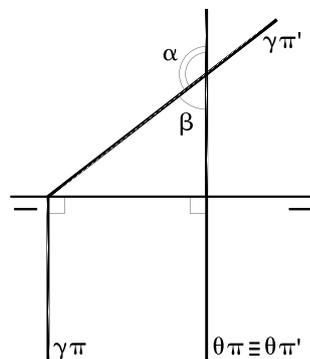


Figura 580

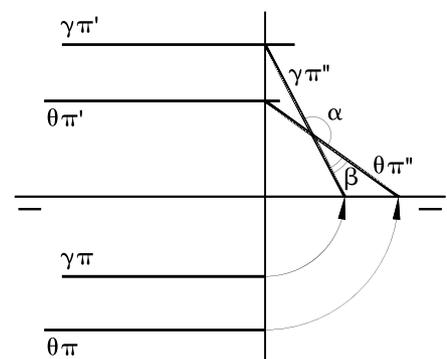


Figura 581

Ainda como casos particulares, quando os dois planos dados ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ) têm um par de traços de mesmo nome paralelos (Figuras 582 e 583), uma simples mudança de plano de projeção os transforma em verticais, ou de topo, recaindo a questão nas condições acima abordadas. Tal pode acontecer mesmo quando um dos planos não se apresenta por seus traços (Figura 584).

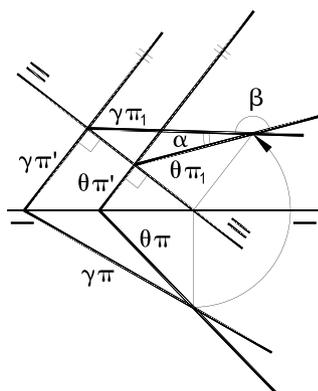


Figura 582

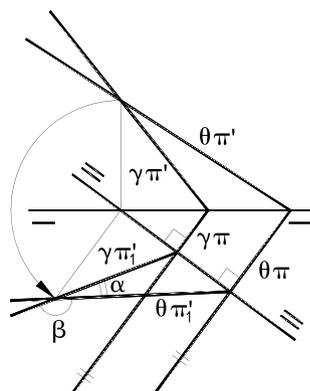


Figura 583

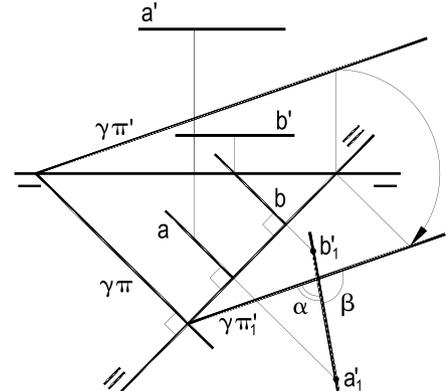


Figura 584

Há, ainda, outro procedimento, muito interessante, para a determinação da V.G. do ângulo formado por dois planos secantes quaisquer ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ), que consiste no rebatimento sobre um dos planos de projeção da seção por um plano ( $\phi$ ) perpendicular à interseção ( $i$ ) dos dois planos dados, em busca de apreciar, em V.G., seu ângulo diedro (Figura 585).

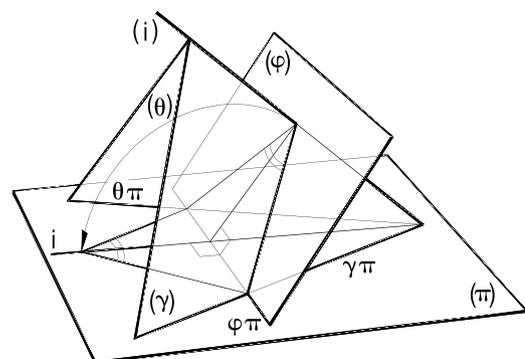


Figura 585

Nestas condições, o traço horizontal  $\varphi\pi$  do plano auxiliar utilizado há de ser perpendicular à projeção horizontal  $i$  da interseção  $(i)$  dos dois planos dados  $(\gamma)$  e  $(\theta)$  (Figuras 586 e 587).

Para o rebatimento  $(i)_1$  de  $(i)$  sobre  $(\pi)$ , utilizou-se um de seus pontos  $(J)$  (Figuras 587 e 588) e seu triângulo de rebatimento.

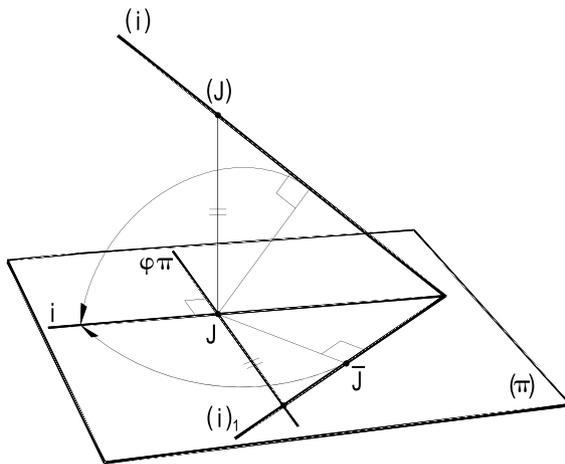


Figura 586

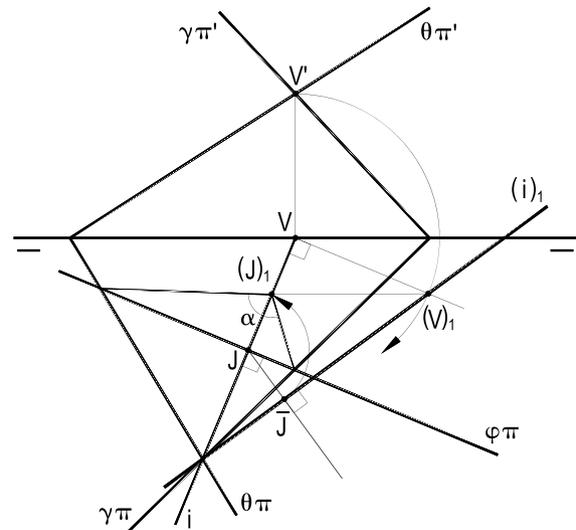


Figura 587

## 141 – Problema inverso

Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 186) que todos os planos que passam por um ponto  $(A)$  e que formam o mesmo ângulo  $\alpha$  com um plano  $(\gamma)$ , exterior a  $(A)$ , são tangentes à superfície cônica de revolução de vértice  $(A)$ , eixo  $(e)$ , perpendicular a  $(\gamma)$ , e semiângulo no vértice igual ao complemento de  $\alpha$  (Figura 588).

O problema inverso clássico consiste em construir um plano que, passando por um ponto dado, forme com um plano dado, exterior àquele ponto, determinado ângulo, obedecendo a alguma condição imposta.

Tal plano há de ser, então, tangente a essa superfície cônica de revolução.

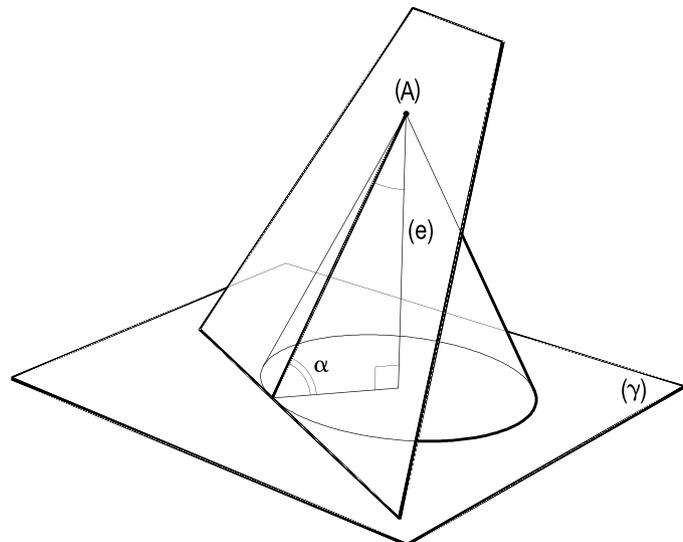


Figura 588



141.2 – Dados um ponto (A), por suas projeções, e um plano ( $\gamma$ ), por seus traços, pede-se construir os traços do plano ( $\alpha$ ), pertencente a (A) e inclinado de  $45^\circ$  em relação a ( $\gamma$ ), sabendo que os traços horizontais dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) cortam-se num ponto de abscissa nula.

Solução: Baixa-se a perpendicular (A)(C) ao plano ( $\gamma$ ), (C) em ( $\gamma$ ) e, devido ao ângulo de  $45^\circ$ , o círculo base do cone utilizado tem raio igual à distância  $d$  de (A) a ( $\gamma$ ) (Figura 591).

Rebate-se, então, ( $\gamma$ ) sobre ( $\pi$ ), constrói-se, em V.G., o círculo de centro  $(C)_1$  e raio  $d$  (Figura 591) e, porque os traços horizontais do plano ( $\gamma$ ) e do pedido ( $\alpha$ ) devem se cruzar num ponto de abscissa nula, é do ponto H, de  $\gamma\pi$ , com tal abscissa, que se deve traçar a tangente (H)(V) à base do cone, pois é esta reta que, com o ponto dado (A), define o plano pedido ( $\alpha$ ).

A horizontal (A)(J) facilita a obtenção do traço horizontal  $\alpha\pi$ .

Observe-se que há uma segunda solução, não apresentada na épura da Figura 591, correspondendo à segunda tangente de  $H \equiv (H)_1$  ao círculo  $(c)_1$ .

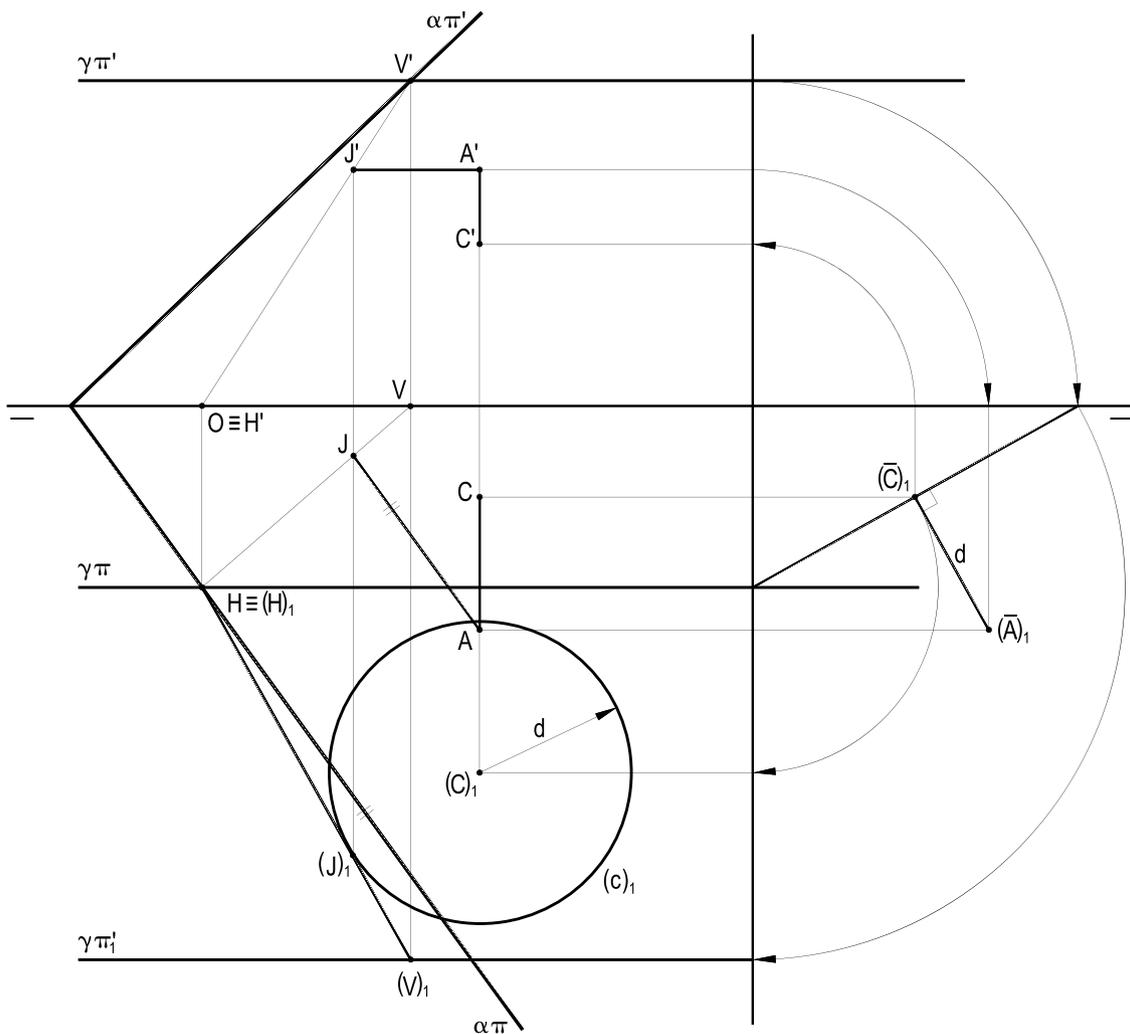


Figura 591

## 142 – Construção da reta a partir de seus ângulos com $(\pi)$ e com $(\pi')$

É um problema clássico a construção das projeções de uma reta ( $r$ ) que, passando por um ponto dado ( $A$ ), forme ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , dados, respectivamente, com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$ .

Trata-se, assim, de problema inverso ao abordado no item 134, anterior.

Para efeito de análise, consideremos resolvida a questão e que ( $A$ ), dado, e ( $B$ ), procurado, sejam os dois pontos que definem a reta ( $r$ ). Sabe-se (número 139) que, para formar o ângulo  $\alpha$  com  $(\pi)$ , ( $AB$ ) deve ser geratriz de um cone de revolução de vértice ( $A$ ) e eixo vertical ( $AO$ ) (Figura 592).

Consideremos, no plano que projeta ( $AB$ ) sobre  $(\pi')$ , o triângulo retângulo  $A'B'(J)$ , com a hipotenusa  $(J)B'$  paralela a  $(A)(B)$ , cujo ângulo  $\beta$  (Figura 592) é o próprio ângulo que a reta ( $AB$ ) forma com  $(\pi')$ .

Como se conhece o valor da hipotenusa  $(J)B'$  desse triângulo, igual às geratrizes do cone considerado, a simples construção desse triângulo retângulo fornecerá o comprimento da projeção vertical  $A'B'$  do segmento ( $AB$ ) procurado.

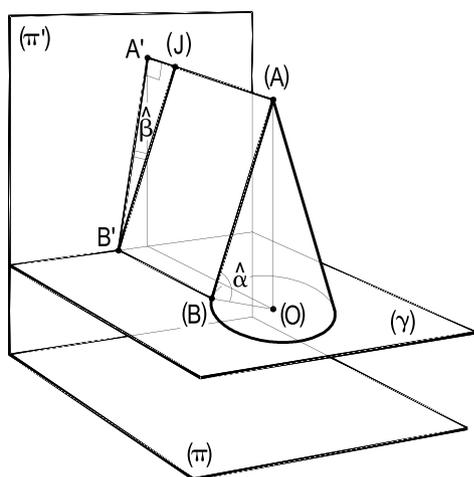


Figura 592

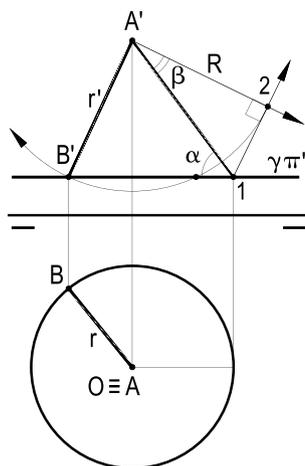


Figura 593

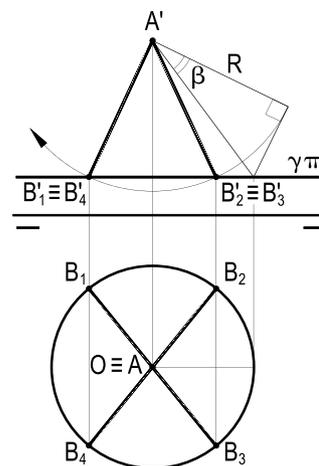


Figura 594

Assim, com a construção do triângulo retângulo  $A'12$ , a partir das verdadeiras grandezas da geratriz  $A'1$  e do ângulo  $\beta$ , obtém-se o comprimento  $R$  da projeção procurada  $A'B'$  (Figura 593) que soluciona a questão.

Observe-se que, para os valores considerados dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , a construção oferece quatro soluções – as retas  $(AB_1)$ ,  $(AB_2)$ ,  $(AB_3)$  e  $(AB_4)$  (Figura 594), o que ocorrerá sempre que a soma  $\alpha + \beta$  for menor que  $90^\circ$ . Quando tal soma igualar um ângulo reto, serão duas, apenas, as soluções (Figura 595) e as retas soluções serão, ambas, de perfil. O problema, naturalmente, resta impossível para ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , cuja soma ultrapasse  $90^\circ$  (Figura 596).

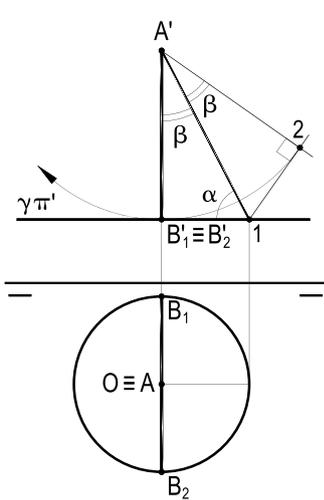


Figura 595

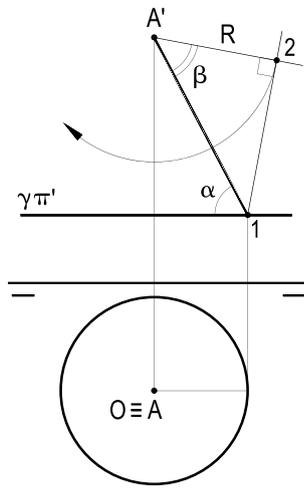


Figura 596

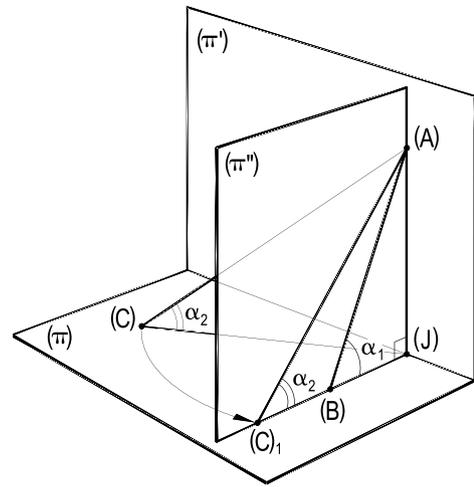


Figura 597

Esta impossibilidade, quando a soma  $\alpha + \beta$  dos ângulos atribuídos à reta ( $r$ ) ultrapassa  $90^\circ$ , é de compreensão imediata, pela simples observação (Figura 597) de duas retas (A)(B) de perfil, e (A)(C), qualquer e, após a rotação de (A)(C), em torno da vertical (A)(J), que assegura (*Geometria Plana*, número 65.1) que  $\alpha_1 > \alpha_2$ . E, como são complementares os ângulos que uma reta de perfil forma com os planos de projeção, tais ângulos, para uma reta qualquer, hão de oferecer soma inferior a  $90^\circ$ .

Interessante variação desse problema inverso é o que propõe a construção das projeções de uma reta ( $r$ ) que, pertencendo a um ponto dado (A), forme ângulos conhecidos com um dos planos de projeção e com os planos de perfil. A resolução é idêntica à acima apresentada e efetuada após uma mudança de ( $\pi'$ ) (Figura 598), quando são dados os ângulos  $\alpha$  e  $\varphi$ , com ( $\pi$ ) e com um plano de perfil, ou de ( $\pi$ ) (Figura 599), quando os ângulos dados são  $\beta$  com ( $\pi'$ ) e  $\varphi$ , com os planos de perfil.

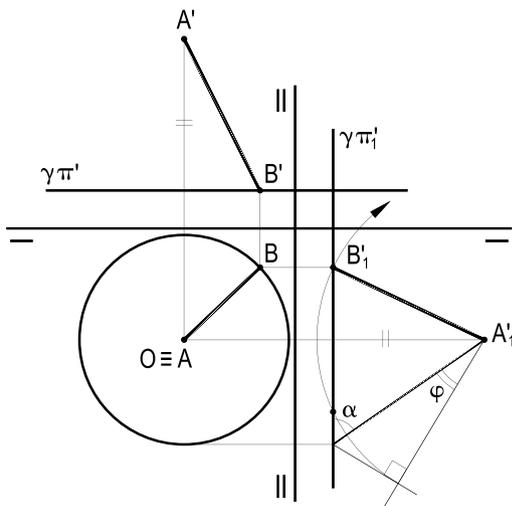


Figura 598

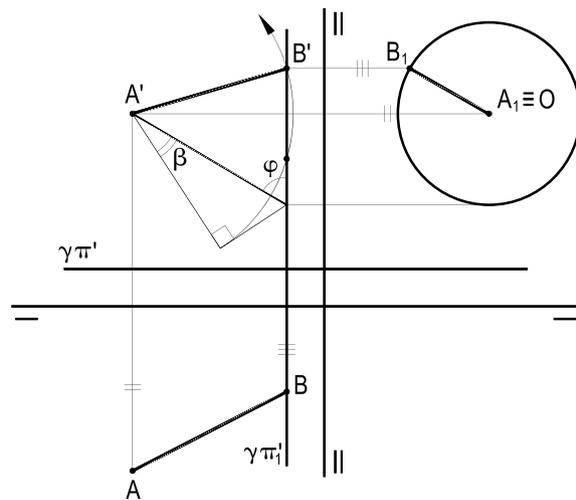


Figura 599

### 143 – Construção do plano a partir de seus ângulos com $(\pi)$ e com $(\pi')$

Vimos (número 138) que, quando uma reta e um plano são perpendiculares, os ângulos que eles formam com um outro plano, a eles oblíquo, são complementares.

Assim, consideradas uma reta qualquer  $(r)$ , perpendicular a um plano qualquer  $(\gamma)$ , os ângulos  $\alpha$  e  $\alpha'$ , que eles formam com  $(\pi)$  (Figura 600), são complementares, como também o são os ângulos  $\beta$  e  $\beta'$  (Figura 601) que eles formam com  $(\pi')$ .

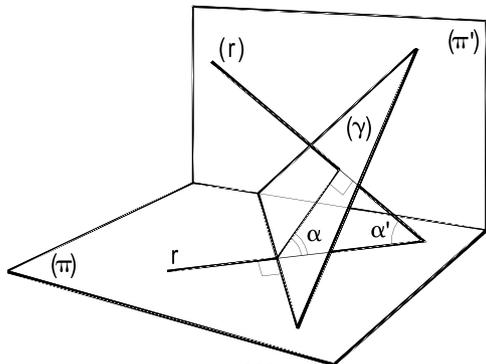


Figura 600

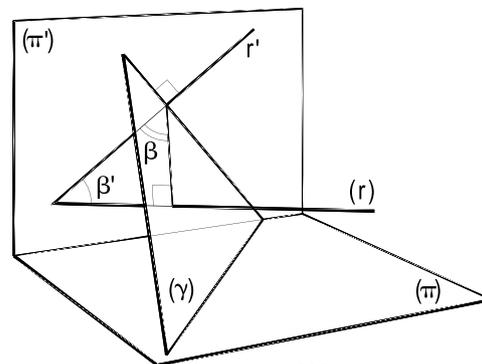


Figura 601

Dessas propriedades decorre o processo natural para construir, por um ponto dado  $(A)$ , um plano  $(\gamma)$  que forme ângulos conhecidos  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, com  $(\pi)$  e com  $(\pi')$ , que consiste em construir (número 142), por um ponto qualquer  $(J)$ , uma reta  $(r)$  que forme, com os planos de projeção, ângulos  $90^\circ - \alpha$  e  $90^\circ - \beta$ , complementos dos destinados ao plano.

A simples construção, por  $(A)$ , do plano  $(\gamma)$ , perpendicular a  $(r)$ , resolve a questão.

Note-se que o plano  $(\gamma)$  pode ser construído por seus traços (Figura 602) ou por suas principais (Figura 603).

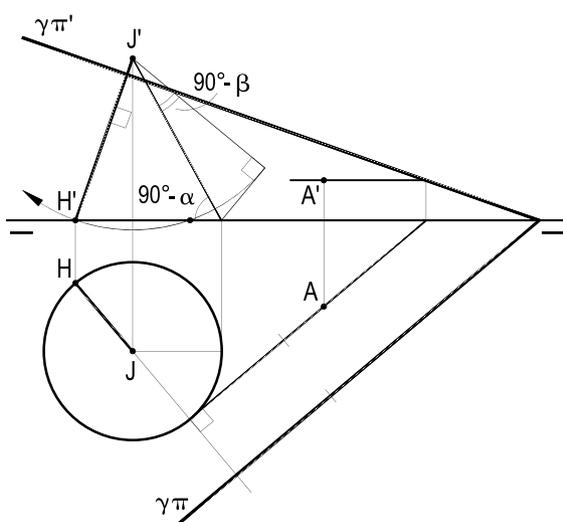


Figura 602

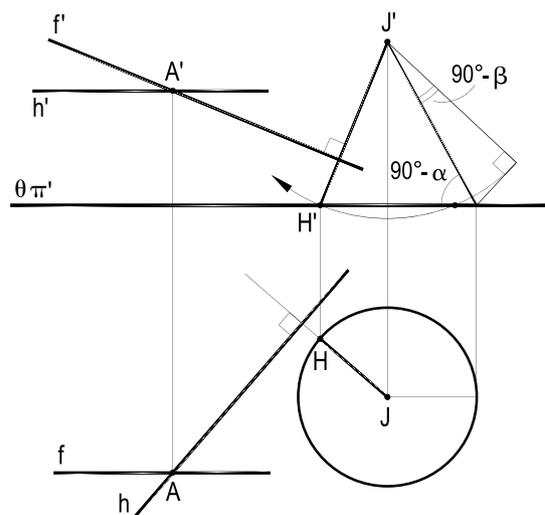


Figura 603

## 144 – Observações

144.1 – É claro que, nos procedimentos apresentados, a reta auxiliar (JH) poderia ter sido construída diretamente pelo ponto (A), ao qual ( $\gamma$ ) deve pertencer. Preferimos, no entanto, utilizar um outro ponto (J) para aliviar a épora.

144.2 – Tal como visto (número 142) para a construção de uma reta, conhecidos os ângulos que ela forma com os dois planos de projeção, a questão aqui abordada pode oferecer quatro soluções, todas para quaisquer planos (Figura 604), para ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  cuja soma  $\alpha + \beta$  ultrapasse  $90^\circ$ ; ou apenas duas (Figura 605), se esses ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  somarem  $90^\circ$ , com planos paralelos ou pertencentes à linha de terra; ou nenhuma, se tal soma  $\alpha + \beta$  for inferior a  $90^\circ$ .

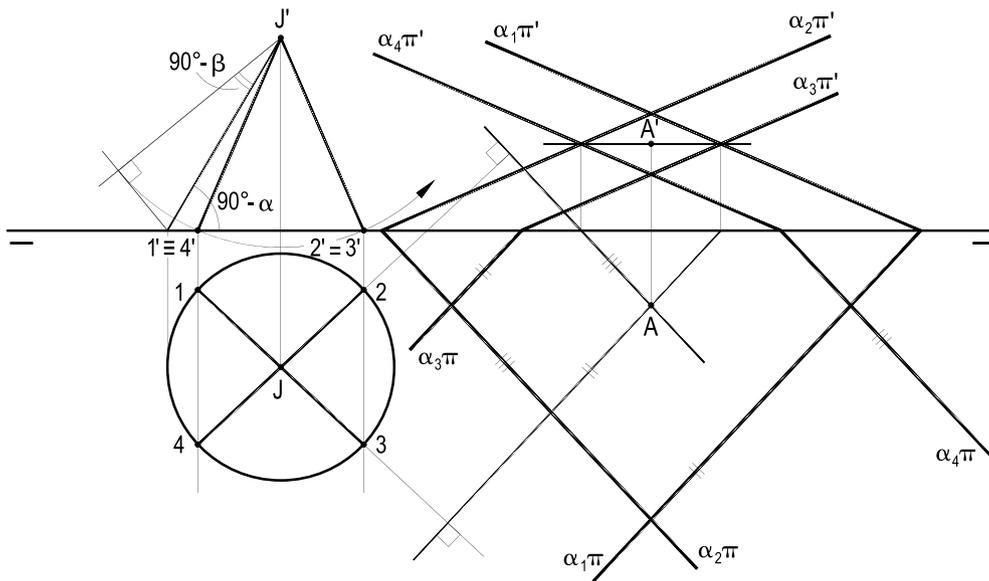


Figura 604

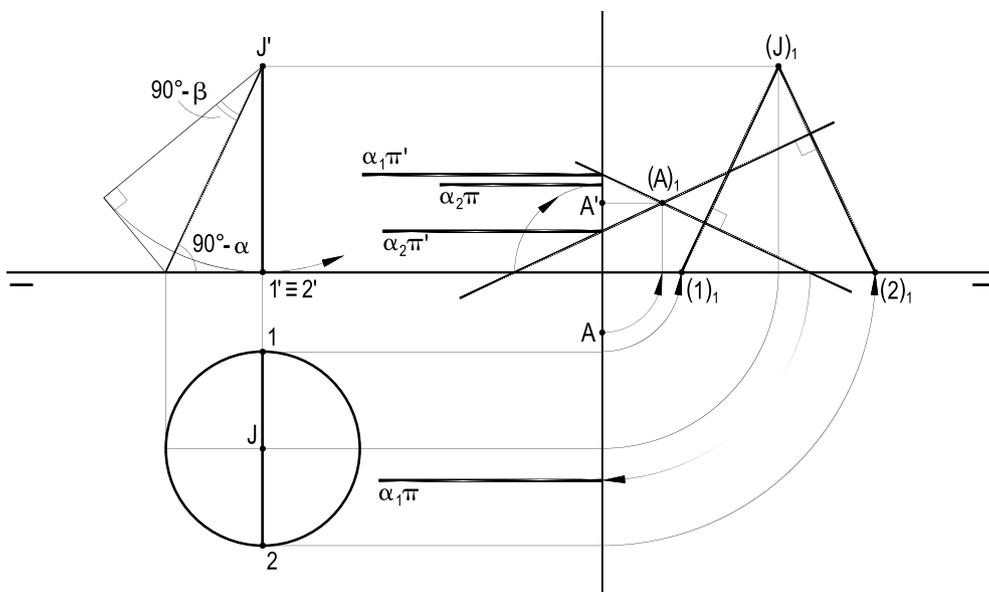


Figura 605



# CAPÍTULO XIII

## EQUIDISTÂNCIAS E EQUIINCLINAÇÕES

### 145 – Plano mediador de um segmento de reta

Plano mediador de um segmento de reta é aquele que contém o ponto médio do segmento e que lhe é perpendicular.

Sabe-se (*Geometria Espacial*, números 33 e 34) que, para o plano ( $\alpha$ ), mediador de um segmento (A)(B), cabem as seguintes propriedades:

145.1 – O plano ( $\alpha$ ), mediador de um segmento (A)(B), é o lugar geométrico das mediatrizes (m) do segmento (Figura 608).

145.2 – O plano ( $\alpha$ ), mediador de um segmento (A)(B), é o lugar geométrico dos pontos (J), equidistantes de (A) e de (B) (Figura 608).

145.3 – O lugar geométrico dos pontos equidistantes dos três vértices de um triângulo (A)(B)(C) é a reta (p) perpendicular ao plano do triângulo e pertencente ao seu circuncentro (O) (Figura 609).

Porque tal reta é a interseção comum dos mediadores dos três lados do triângulo.

145.4 – Dessa forma, essa reta (p) (Figura 609) é o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que passam pelos vértices (A) (B) e (C) do triângulo.

145.5 – Por quatro pontos não coplanares passa apenas uma superfície esférica – aquela, única, comum a todos os pares de planos mediadores dos diversos segmentos formados pelos quatro pontos (*Geometria Espacial*, número 34.3).

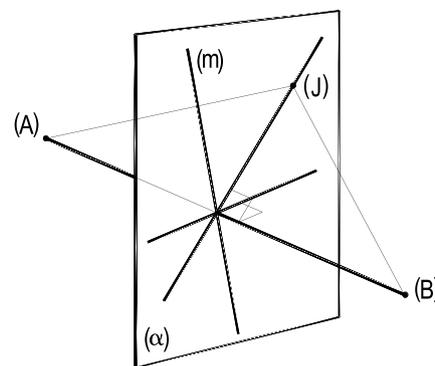


Figura 608

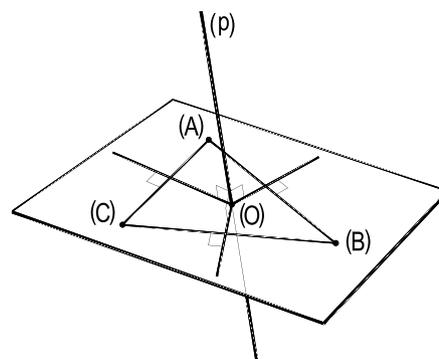


Figura 609

## 146 – Aplicações

A utilização do plano mediador de um segmento, muitíssimo frequente, está sempre associada à busca de pontos equidistantes de dois pontos dados, seja para as construções de triângulos isósceles ou equiláteros, seja para a determinação dos centros dos círculos que os contêm, seja, enfim, para a busca das mediatrizes desse segmento.

Vejamos alguns exemplos:

146.1 – Dados dois pontos (B) e (C), por suas projeções, construir as projeções do triângulo isósceles (A)(B)(C), de base (B)(C), sabendo que (A) pertence à linha de terra.

Solução: Basta construir o plano ( $\gamma$ ), mediador de (B)(C), e obter seu traço (A) com ( $\pi'\pi$ ) (Figuras 610 e 611).

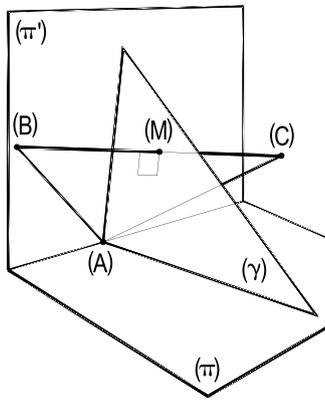


Figura 610

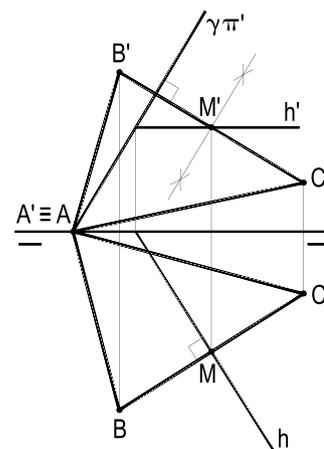


Figura 611

146.2 – Determinar as projeções do ponto (J), centro da superfície esférica pertencente aos pontos (A), (B), (C) e (D), dados por suas projeções.

Solução: Pelo circuncentro (O) do triângulo (A)(B)(C), traça-se a perpendicular (p) a seu plano, no caso, de perfil (Figura 612). O ponto (J) procurado (número 145.5) é a interseção de (p) com o mediador ( $\gamma$ ) de (A)(D) (Figuras 612 e 613).

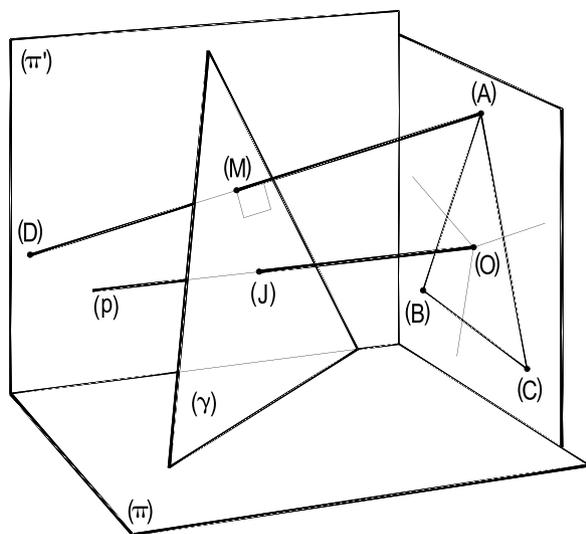


Figura 612

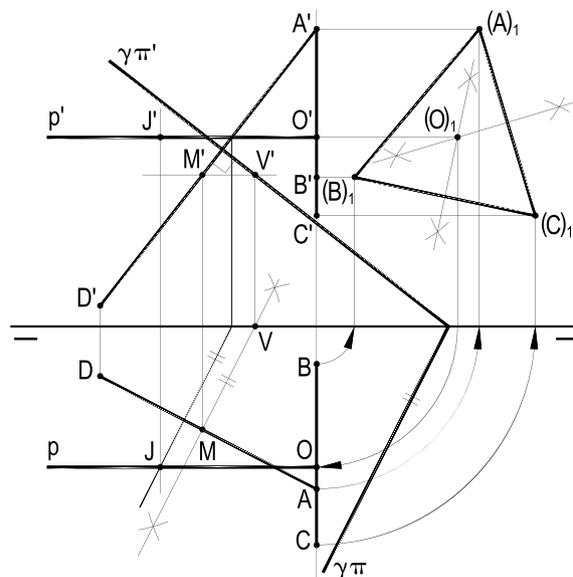


Figura 613

## 147 – Plano bissetor de duas retas concorrentes

Dadas duas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$ , os dois planos  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$  pertencentes a cada uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas duas retas e perpendiculares ao seu plano são denominados planos bissetores dos ângulos formados por  $(r)$  e  $(s)$ , ou, simplesmente, bissetores de  $(r)$  e  $(s)$  (Figura 614).

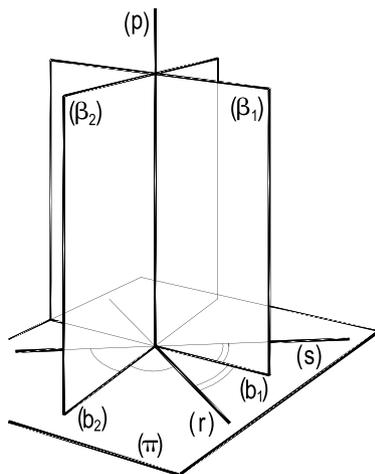


Figura 614

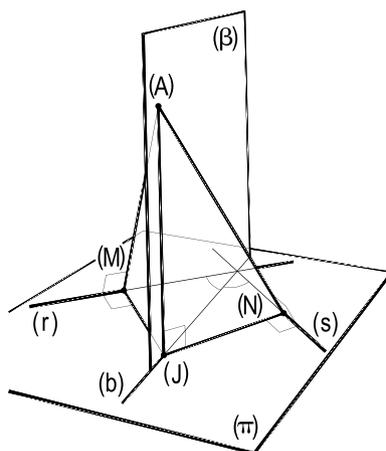


Figura 615

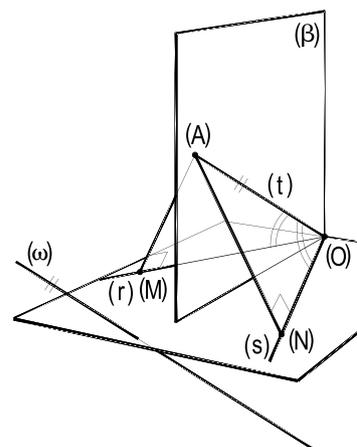


Figura 616

## 148 – Propriedades

148.1 – Os bissetores dos ângulos de duas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$  ficam determinados pelas bissetrizes  $(b_1)$  e  $(b_2)$  desses ângulos e pela perpendicular  $(p)$  ao plano das retas, traçada pelo ponto comum a elas (Figura 614).

148.2 – Os dois bissetores são perpendiculares entre si (*Geometria Espacial*, número 62.2).

148.3 – O lugar geométrico dos pontos  $(A)$  equidistantes de duas retas concorrentes  $(r)$  e  $(s)$  é constituído pelo par de planos bissetores  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$  dos ângulos formados pelas retas (*Geometria Espacial*, número 63) (Figura 615).

148.4 – É condição necessária e suficiente para que uma reta forme ângulos iguais com duas retas concorrentes que ela pertença, ou seja paralela, a um dos bissetores dos ângulos formados pelas retas (*Geometria Espacial*, número 66.1) (Figura 616).

148.5 – A condição necessária e suficiente para que uma reta forme ângulos iguais com duas reversas  $(r)$  e  $(s)$  é que ela pertença, ou seja paralela, a um dos bissetores dos ângulos formados por duas retas concorrentes  $(r_1)$  e  $(s_1)$ , respectivamente, paralelas àquelas reversas (*Geometria Espacial*, número 66.2) (Figura 617).

148.6 – O lugar geométrico das retas pertencentes a um ponto (A) e igualmente inclinadas em relação a duas retas reversas (r) e (s), exteriores a (A), é o par de bissetores dos ângulos formados pelas paralelas ( $r_1$ ) e ( $s_1$ ), respectivamente, a (r) e a (s), traçadas por (A) (*Geometria Espacial*, número 66.3) (Figura 617).

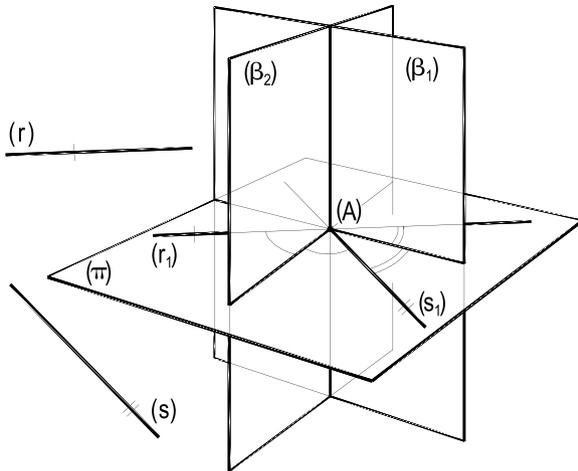


Figura 617

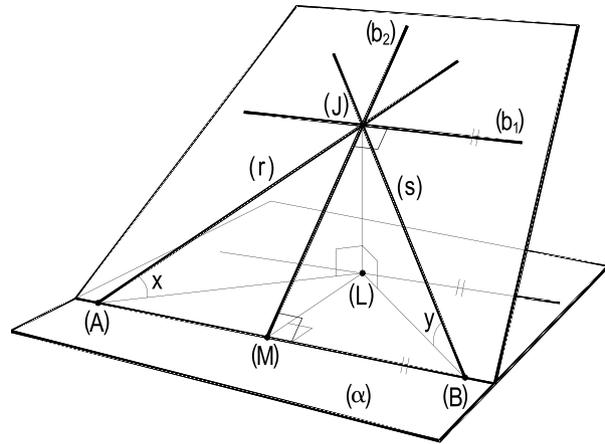


Figura 618

148.7 – Todo plano paralelo, ou pertencente, à bissetriz de um dos ângulos formados por duas retas concorrentes inclina-se igualmente em relação às duas retas (*Geometria Espacial*, número 67) (Figura 618).

148.8 – A condição necessária e suficiente para que um plano forme ângulos iguais com duas retas concorrentes é que ele pertença, ou seja paralelo, a uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas (*Geometria Espacial*, número 69.1) (Figura 618).

148.9 – A condição necessária e suficiente para que um plano forme ângulos iguais com duas retas reversas é que ele pertença, ou seja paralelo, a uma das bissetrizes dos ângulos formados por duas retas concorrentes, respectivamente, paralelas a cada uma das reversas (*Geometria Espacial*, número 69.2).

## 149 – Aplicações

As utilizações dos planos bissetores dos ângulos formados por duas retas concorrentes, em problemas que procurem pontos delas equidistantes ou retas igualmente inclinadas em relação a elas, ou até a duas reversas, respectivamente, paralelas a elas, são de especial importância para a Geometria Descritiva.

São também de grande valia as utilizações de planos paralelos a uma das bissetrizes dos ângulos formados por duas retas concorrentes.

Os exemplos seguintes mostram bem tais aplicações.

149.1 – Dadas, por suas projeções, as retas (A)(B) e (A)(C), pede-se determinar as projeções do ponto (J), pertencente a  $(\pi)$  e equidistante das duas retas dadas e também equidistante dos pontos (B) e (C).

Solução: Para equidistar das retas (A)(B) e (A)(C), o ponto procurado (J) tem de pertencer a um dos bissetores ( $\beta$ ) dos ângulos formados por aquelas retas e, para equidistar dos pontos (B) e (C), de  $(\pi)$ , pertencendo a este plano ( $\pi$ ), o ponto (J) tem de pertencer à mediatriz (m) do segmento (B)(C), todos situados em  $(\pi)$  (Figura 619).

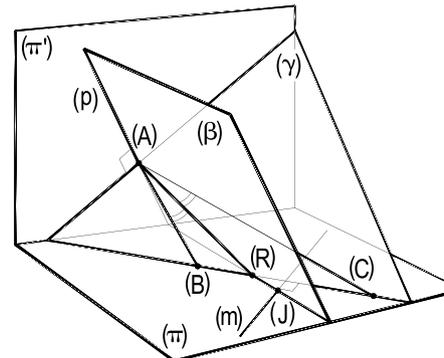


Figura 619

Assim, deve-se construir o bissetor ( $\beta$ ), perpendicular ao plano ( $\gamma$ ) das retas dadas (A)(B) e (A)(C), o que se faz, mediante o rebatimento de ( $\gamma$ ) sobre ( $\pi$ ) (Figura 620) e a construção das bissetrizes  $(A)_1(R)_1$  e  $(A)_1(T)_1$  de seus ângulos, além, é claro, da reta (p), traçada, por (A), perpendicularmente a ( $\gamma$ ) (Figura 620), embora, na épura apresentada, só se tenha utilizado a bissetriz (A)(R).

Obtido o plano bissetor ( $\beta$ ), e construído seu traço horizontal  $\beta\pi$ , basta, então, determinar o ponto (J), em que esse traço encontra a mediatriz m do segmento BC, situados em  $(\pi)$  (Figura 620). (J) é uma das duas soluções do problema, tendo sido a segunda, correspondente à outra bissetriz  $(A)_1(T)_1$ , dispensada, no alçamento.

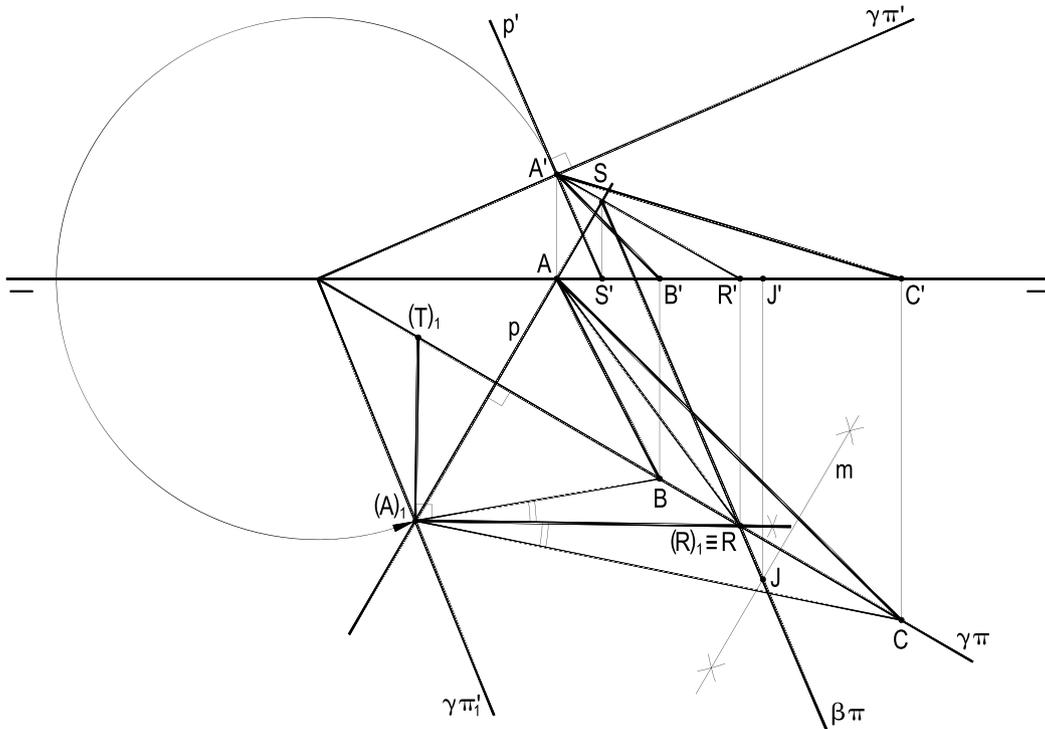


Figura 620

149.2 – Dadas duas semirretas ( $Ax$ ) e ( $Ay$ ), por suas projeções, deseja-se construir as projeções de um triedro de vértice ( $A$ ), tendo aquelas semirretas por arestas, sabendo que sua terceira aresta ( $Az$ ) deve ter projeções paralelas entre si e formar ângulos iguais com as duas semirretas dadas.

Solução: Como as semirretas dadas ( $Ax$ ) e ( $Ay$ ) são as principais de seu plano, para obter a V.G. do ângulo que elas formam e construir sua bissetriz ( $Ab$ ), procedeu-se ao rebatimento desse plano em torno da charneira ( $Ay$ ), sobre o plano horizontal dessa semirreta, com auxílio do triângulo de rebatimento  $J\bar{J}1$  de um ponto ( $J$ ) arbitrado sobre ( $Ax$ ) (Figura 621).

Alçada essa bissetriz ( $Ab$ ) e construída a reta ( $p$ ) por ( $A$ ), perpendicular ao plano das semirretas dadas, fica formado por ( $Ab$ ) e ( $p$ ) o plano bissetor do ângulo das duas semirretas dadas, ao qual, sabe-se (número 148.4), há de pertencer a aresta procurada ( $Az$ ), a qual, para ter projeções paralelas, como proposto, tem de ser paralela a ( $\beta_{24}$ ).

Por isso, determina-se a interseção ( $BP$ ) do plano bissetor construído com ( $\beta_{24}$ ) (Figura 621) para, enfim, traçar, por ( $A$ ), a semirreta ( $Az$ ), paralela a ( $BP$ ), que proporciona o triedro ( $A-xyz$ ) pedido.

Observe-se que há uma segunda solução, considerando-se, sobre a reta ( $Az$ ), a semirreta ( $A\bar{z}$ ) de sentido oposto ao de ( $Az$ ) (Figura 622), correspondendo ao triedro ( $A-xy\bar{z}$ ) adjacente do ( $A-xyz$ ), escolhido.

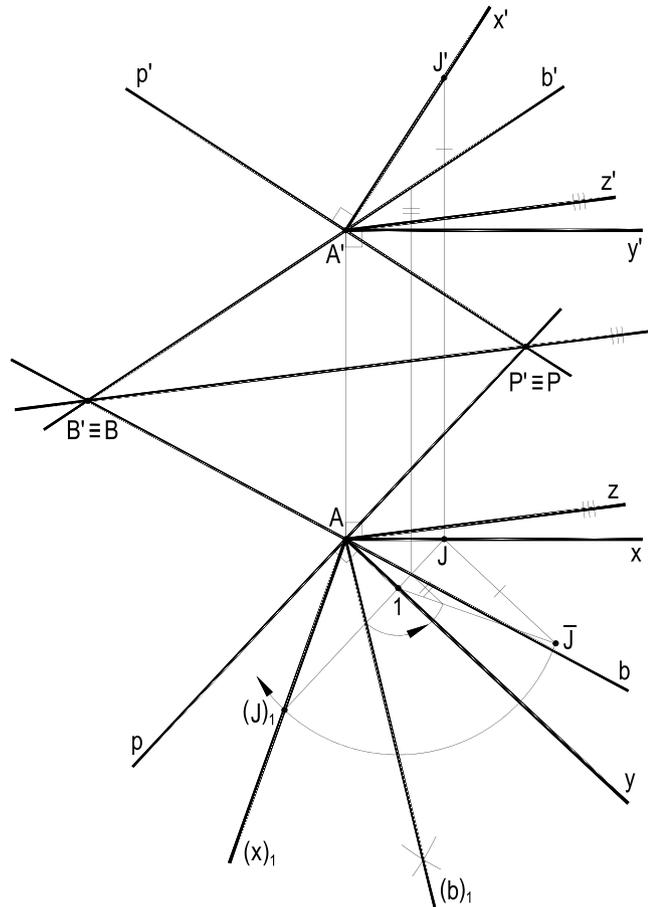


Figura 621

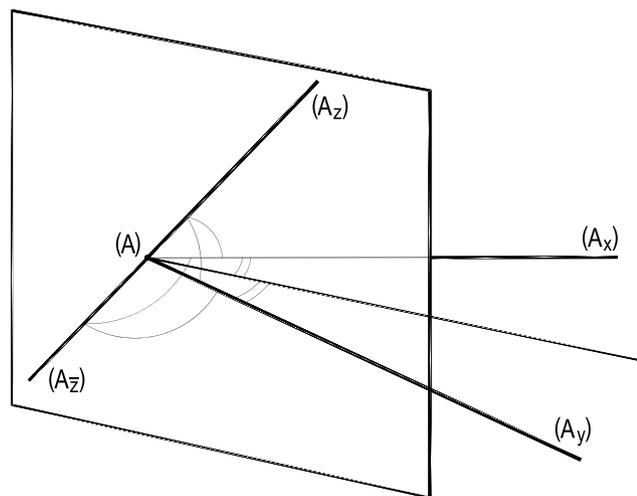


Figura 622



149.4 – Dadas duas retas concorrentes (J)(A) e (J)(B), além de um ponto exterior (M), todos por suas projeções, construir os traços do plano ( $\alpha$ ), paralelo à linha de terra, pertencente ao ponto (M), sabendo-se que ele forma ângulos iguais com as duas retas dadas.

Solução: Para poder formar ângulos iguais com as concorrentes (J)(A) e (J)(B), sabe-se que o plano ( $\alpha$ ) procurado deve ser paralelo a uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas concorrentes (número 148.8).

Assim, basta, mediante o rebatimento do plano formado pelas concorrentes, sobre ( $\pi$ ), obter a V.G. do ângulo (A)(J)(B) e construir uma de suas bissetrizes (J)(I) (Figura 625).

Por ser paralelo à linha de terra, a determinação dos traços do plano ( $\alpha$ ) é, então, imediata, pela construção, pelo ponto dado (M), da paralela (V)(H) àquela bissetriz (J)(I).

Note-se que há uma segunda solução, correspondente à bissetriz externa ( $b_e$ ) do ângulo dado, não alçada na Figura 625 e apenas indicada por seu rebatimento ( $(b_e)_1$ ).

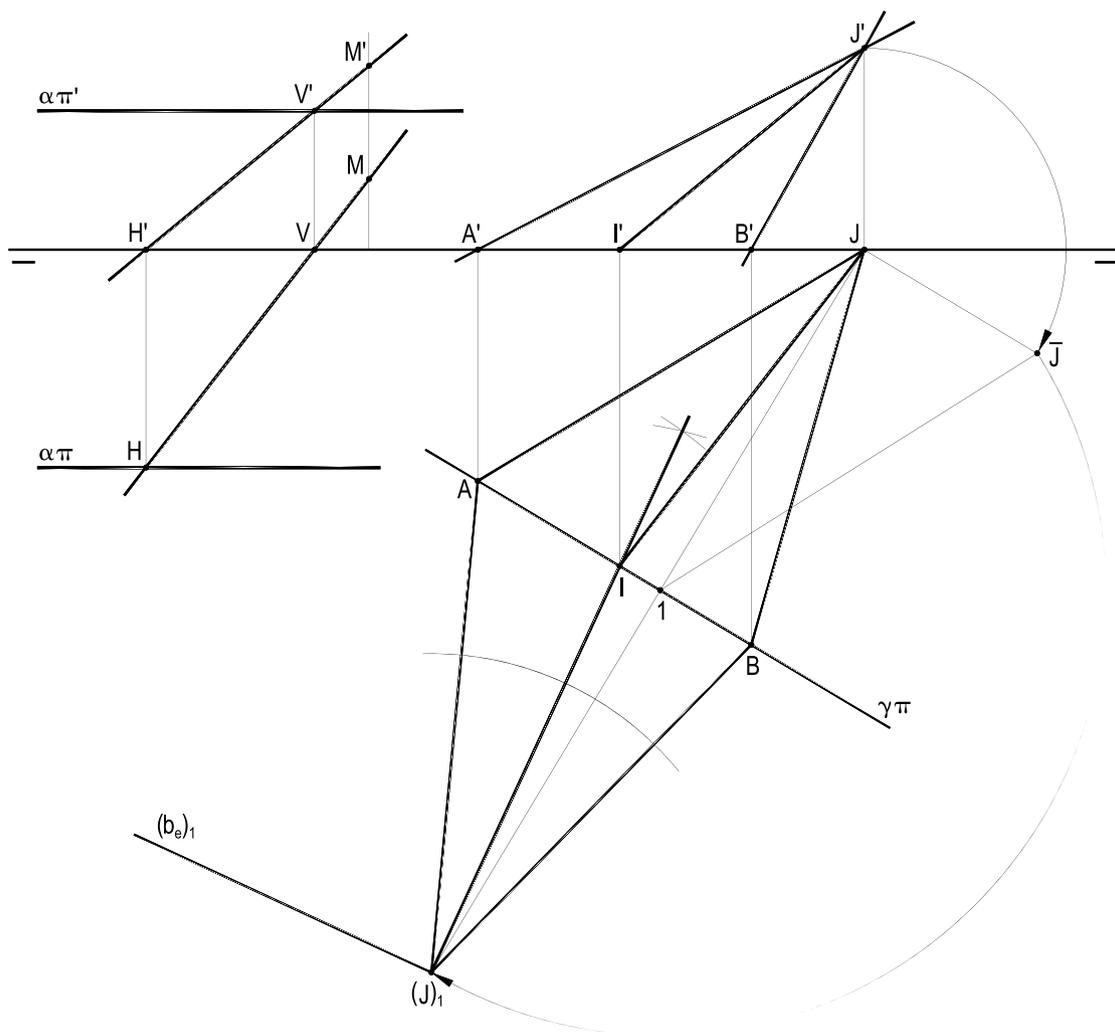


Figura 625

149.5 – Dadas, por suas projeções, as retas concorrentes (m) e (n) e as retas (r) e (s), reversas entre si e também reversas a (m) e a (n), pede-se construir o plano ( $\alpha$ ) pertencente ao ponto (J), dado por suas projeções, sabendo que ( $\alpha$ ) forma dois ângulos iguais com (m) e com (n) e outros dois ângulos também iguais entre si com as reversas (r) e (s).

Solução: Para formar ângulos iguais com as concorrentes (m) e (n), o plano procurado ( $\alpha$ ) deve ser paralelo a uma das bissetrizes do ângulo por elas formado (número 148.8) e, para se inclinar igualmente em relação às reversas (r) e (s), deve ser paralelo a uma das bissetrizes do ângulo formado por (r) e por uma paralela ( $s_1$ ) a (s), concorrente com (r) (número 148.9).

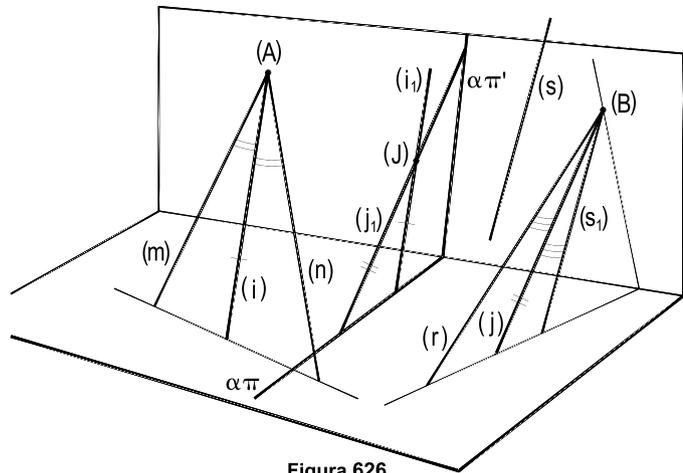


Figura 626

Assim, para construir o plano pedido ( $\alpha$ ), deve-se obter a bissetriz (i) de um dos ângulos formados pelas retas (m) e (n) (Figuras 626 e 627), assim como a bissetriz (j) de um dos ângulos formados por (r) e por uma paralela ( $s_1$ ) a (s), concorrente com (r) (Figura 628). As retas ( $i_1$ ) e ( $j_1$ ), traçadas por (A) e respectivamente paralelas àquelas duas bissetrizes, definem (Figuras 626 e 627) o plano ( $\alpha$ ), numa das quatro soluções possíveis, pelas combinações das bissetrizes.

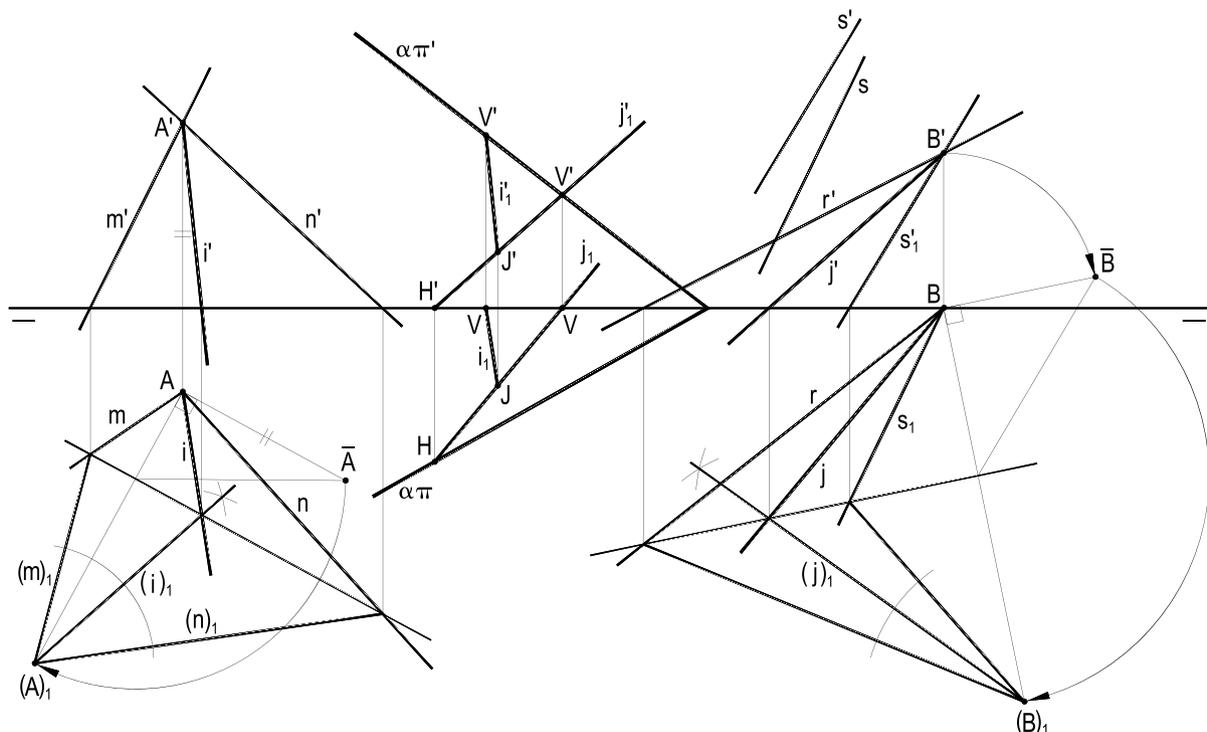


Figura 627

## 150 – Bissetor de um diedro

Por definição, bissetor de um diedro é o semiplano interior ao diedro que, tendo por reta origem a aresta do diedro, o divide em outros dois iguais, isto é, o que forma ângulos iguais com suas faces (Figura 628).

## 151 – Bissetores de dois planos secantes

Considerados dois planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) secantes, sabe-se (*Geometria Espacial*, número 54) que os bissetores dos diedros opostos pela aresta que eles formam são, aos pares, coplanares e que os bissetores de dois quaisquer dos diedros adjacentes, assim formados, são perpendiculares entre si.

Os dois planos ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ), assim constituídos (Figura 629), são denominados bissetores dos ângulos formados pelos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), ou, de modo mais simples, bissetores de ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ).

Cabe observar que (*Geometria Espacial*, número 54), se seccionarmos todos esses quatro planos por um outro ( $\theta$ ) perpendicular à sua interseção comum, ficarão formados os ângulos retilíneos dos diversos diedros entre ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), com a obtenção das bissetrizes ( $a_1$ ), ( $a_2$ ), ( $b_1$ ) e ( $b_2$ ) desses ângulos planos (Figura 630).

Assim, dados dois planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), existem dois planos bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) que, contendo sua interseção, formam ângulos iguais com eles. São seus bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ), necessariamente perpendiculares entre si, que ficam perfeitamente definidos por aquela interseção comum ( $i$ ) e, cada um, por uma bissetriz dos ângulos retilíneos dos diedros formados por ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) (Figura 630).

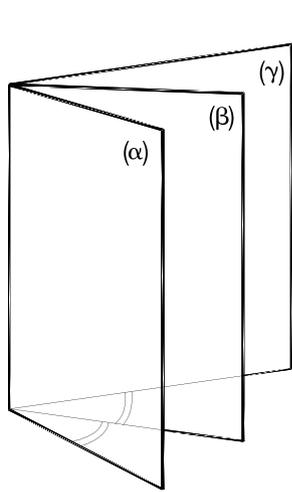


Figura 628

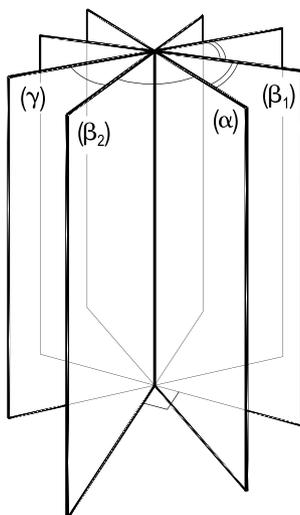


Figura 629

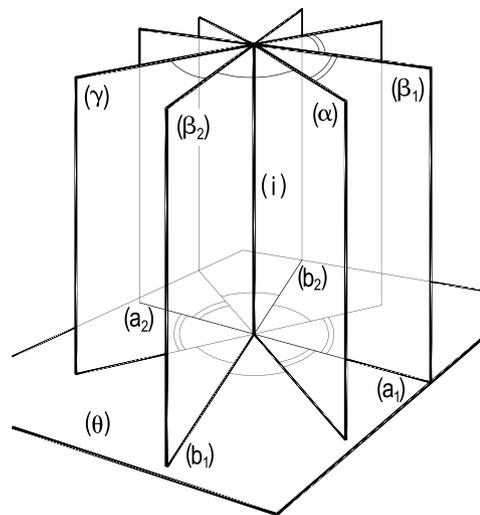


Figura 630

## 152 – Construção dos bissetores de dois planos dados

152.1 – Quando os dois planos dados ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) são ambos perpendiculares a um dos planos de projeção, ou a planos de perfil, é de aproveitar a V.G. dos ângulos que eles formam, para definir os dois bissetores. Assim são os exemplos abaixo, que reúnem pares de planos projetantes em relação a ( $\pi$ ), a ( $\pi'$ ) e planos paralelos ou pertencentes a ( $\pi'\pi$ ) e, por isso, perpendiculares a planos de perfil.

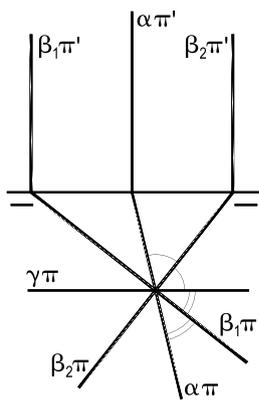


Figura 631

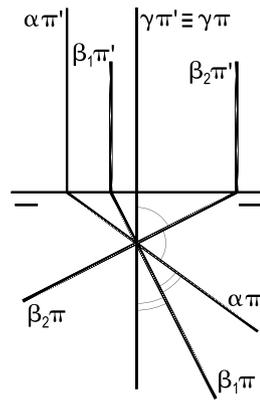


Figura 632

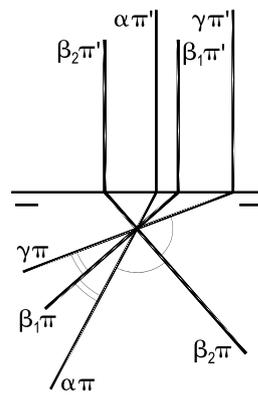


Figura 633

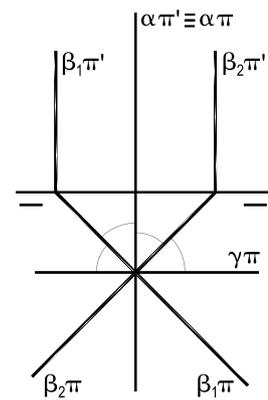


Figura 634

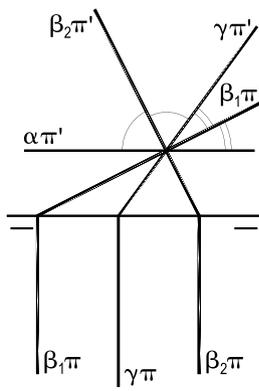


Figura 635

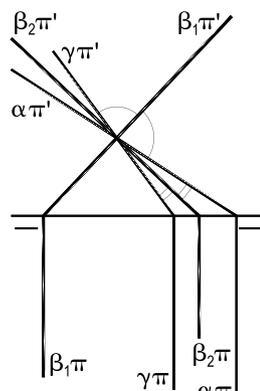


Figura 636

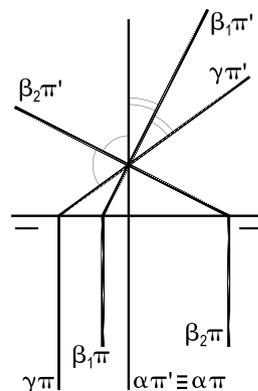


Figura 637

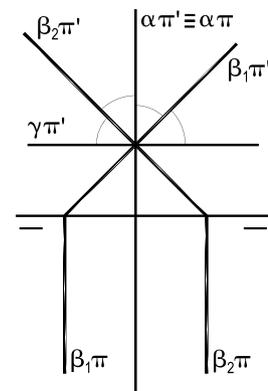


Figura 638

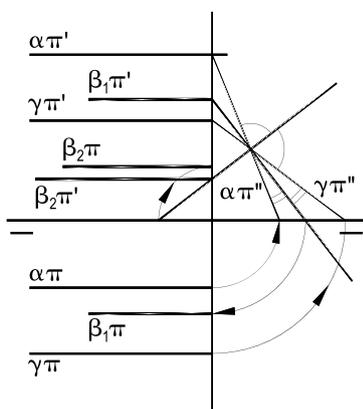


Figura 639

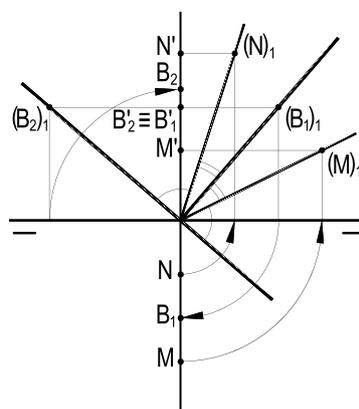


Figura 640

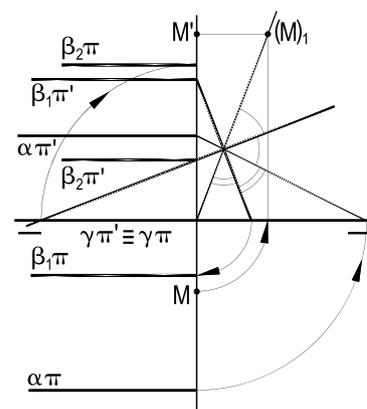


Figura 641

152.2 – Para o caso de um par de planos quaisquer ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) que tenham os traços horizontais paralelos (Figura 642), ou traços verticais paralelos (Figura 643), com uma mudança de plano, de ( $\pi'$ ), ou de ( $\pi$ ), respectivamente, os planos são transformados em de topo, ou verticais, recaindo-se, então, nas condições do item anterior.

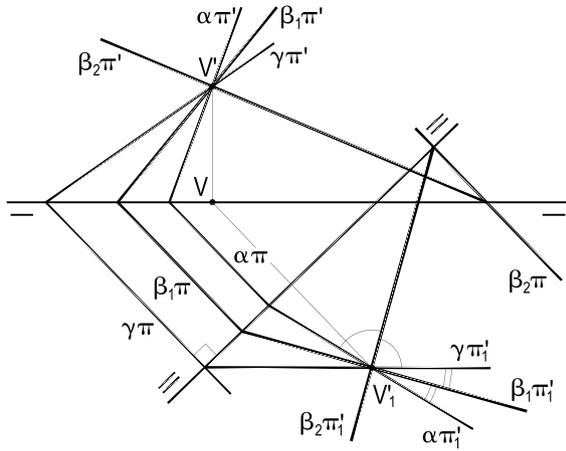


Figura 642

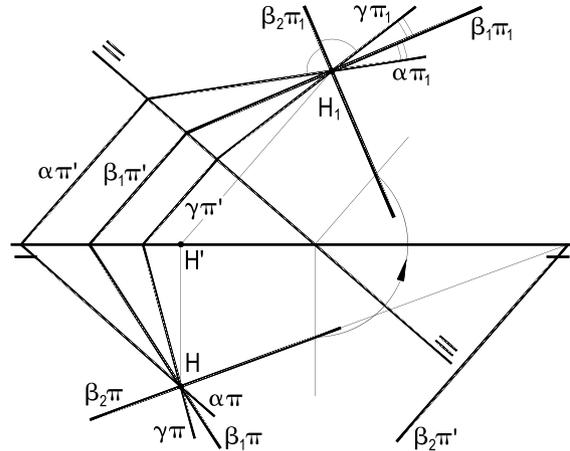


Figura 643

152.3 – Quando os dois planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) são dados pelos traços e sua interseção ( $i$ ) é acessível, pode-se utilizar um plano ( $\varphi$ ), perpendicular a ( $i$ ), para, mediante um rebatimento, obter as verdadeiras grandezas dos ângulos formados pelos dois planos dados e construir suas bissetrizes, que conduzem, enfim, aos traços dos bissetores (Figuras 644 e 645).

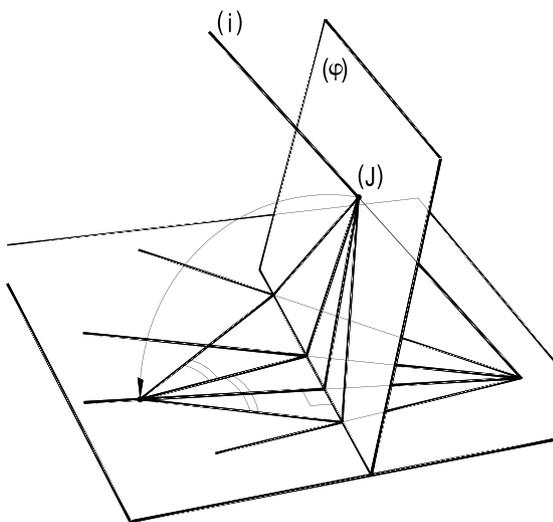


Figura 644

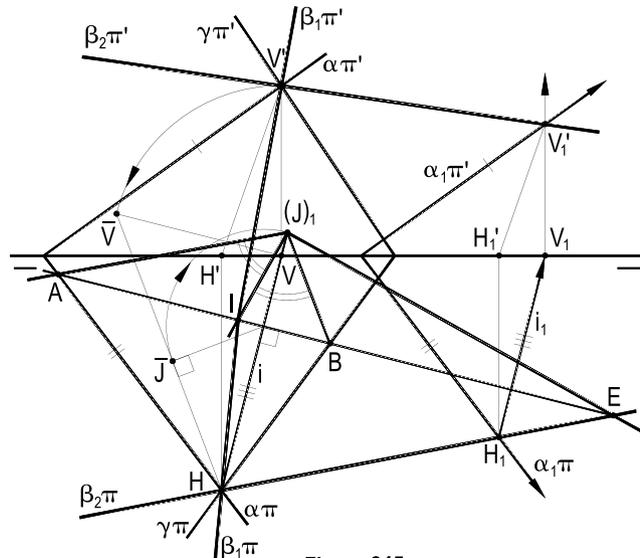


Figura 645

Para construir o traço vertical  $\beta_2\pi'$  do segundo bissetor, foi utilizado um plano auxiliar ( $\alpha_1$ ), paralelo ao dado ( $\alpha$ ) e sua interseção ( $i_1$ ), paralela a ( $i$ ), com um segundo plano ( $\beta_1$ ), paralelo a ( $\beta$ ), dispensado de ser construído (Figura 645).

## 153 – Propriedades

153.1 – O bissetor de um diedro é o lugar geométrico das bissetrizes dos ângulos planos do diedro (*Geometria Espacial*, número 55.1) (Figura 646).

153.2 – O bissetor de um diedro é o lugar geométrico dos pontos interiores ao diedro e equidistantes de suas faces (*Geometria Espacial*, número 55.3) (Figura 647).

153.3 – O lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos secantes é o par de planos bissetores de seus diedros (*Geometria Espacial*, número 55.4) (Figura 648).

153.4 – Se, ao contrário, os dois planos são paralelos, o lugar geométrico dos pontos deles equidistantes é um terceiro plano paralelo a eles e deles equidistante (*Geometria Espacial*, número 55.5) (Figura 649).

153.5 – A condição necessária e suficiente para que uma reta forme ângulos iguais com dois planos secantes é que ela pertença, ou seja paralela, a um dos bissetores daqueles dois planos (*Geometria Espacial*, número 58) (Figura 650).

153.6 – A condição necessária e suficiente para que um plano ( $\theta$ ) forme ângulos iguais com dois planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) é que ele seja perpendicular a, pelo menos, um de seus planos bissetores ( $\beta$ ) (*Geometria Espacial*, número 60) (Figura 651).

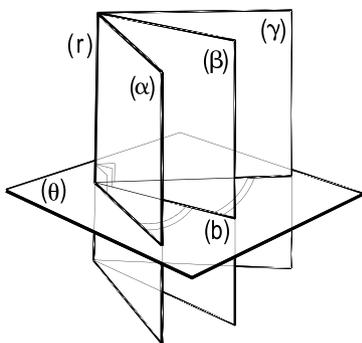


Figura 646

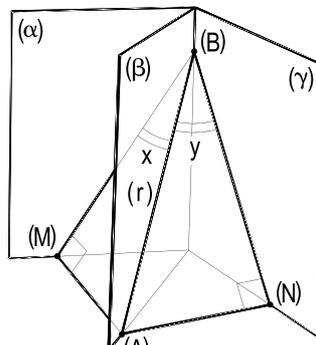


Figura 647

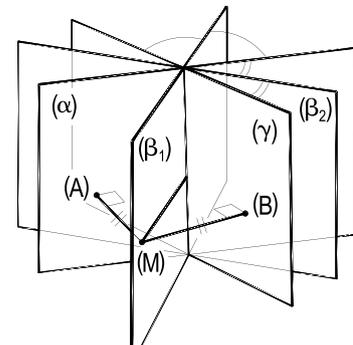


Figura 648

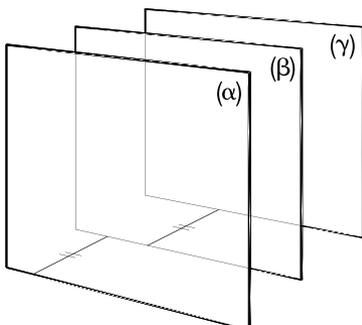


Figura 649

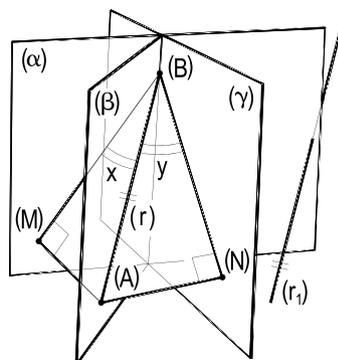


Figura 650

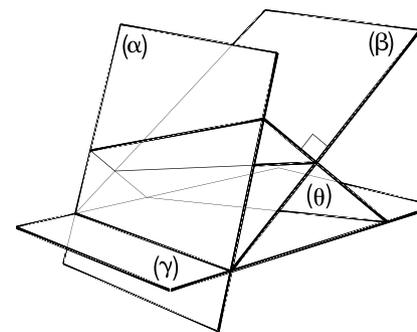


Figura 651

## 154 – Aplicações

154.1 – A utilização da propriedade da equidistância de pontos de cada bisetor de dois planos secantes a eles (número 153.3) proporciona um processo para a obtenção dos bissetores  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$  de dois planos secantes dados  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , pela construção de planos auxiliares  $(\alpha_1)$ ,  $(\alpha_2)$ ,  $(\gamma_1)$  e  $(\gamma_2)$ , paralelos a cada um dos dois planos dados e situados a uma mesma distância  $R$ , arbitrada, de cada um deles e pelo traçado de suas interseções (Figuras 652, 653 e 654), que, convenientemente combinadas, proporcionam os bissetores  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$  procurados.

Na épora da Figura 654, apresentamos apenas um bisetor  $(\beta_1)$ , por seus traços, mas as combinações adequadas dos planos paralelos aos dados, a distância iguais deles, proporcionam a obtenção do segundo bisetor  $(\beta_2)$ , como indicado no corte pelo plano auxiliar  $(\theta)$  (Figuras 652 e 653).

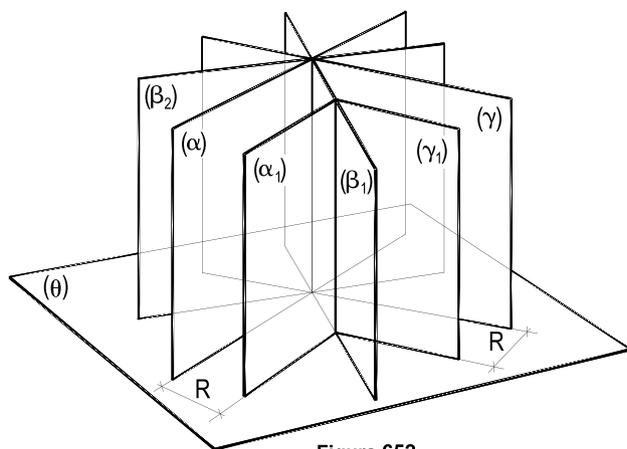


Figura 652

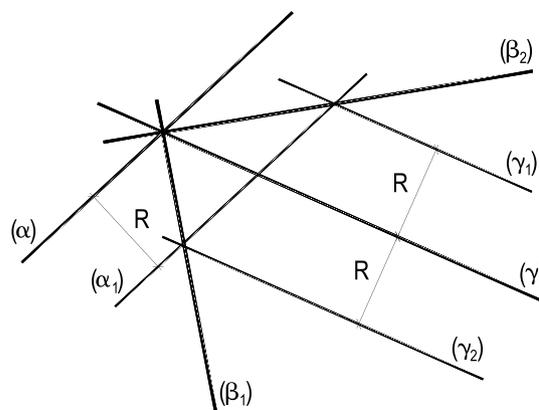


Figura 653

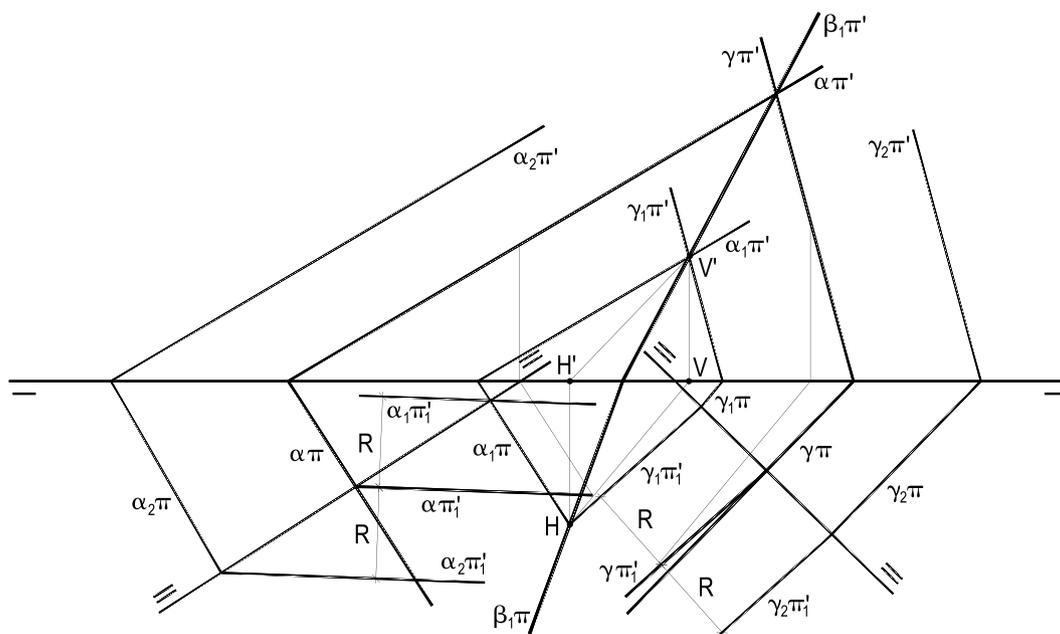


Figura 654

154.2 – Dados dois planos secantes  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , por seus traços, e um ponto  $(M)$  a eles exterior, por suas projeções, pede-se construir as retas frontais  $(r)$  e  $(s)$  que, pertencendo a  $(M)$ , se inclinem igualmente em relação a  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ .

Solução: Sabe-se (número 153.5) que para que uma reta forme ângulos iguais com dois planos secantes  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , ela deve ser paralela a, pelo menos, um dos bissetores daqueles planos (Figura 655).

Assim, foram obtidos (Figura 656) os traços dos bissetores  $(\beta_1)$  e  $(\beta_2)$ , com o auxílio do método detalhado no número 152.3 e, por serem frontais, as retas  $(r)$  e  $(s)$  pedidas foram traçadas com as direções respectivas dos traços verticais,  $\beta_1\pi'$  e  $\beta_2\pi'$ , desses bissetores (Figuras 655 e 656).

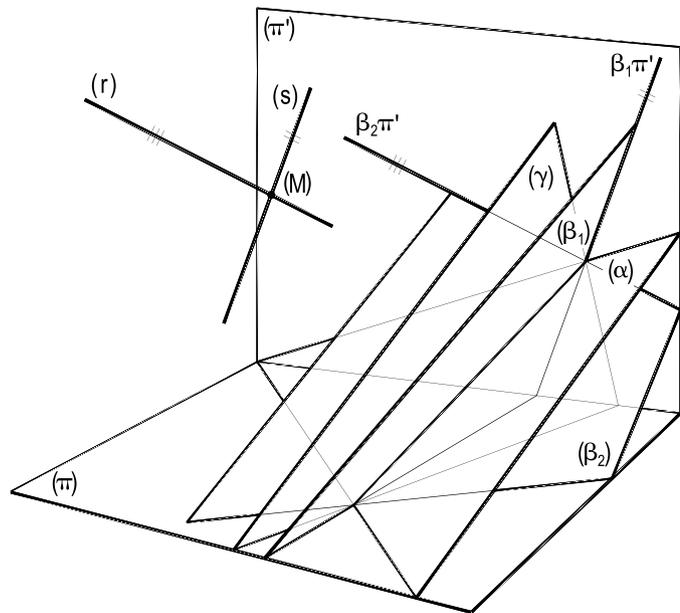


Figura 655

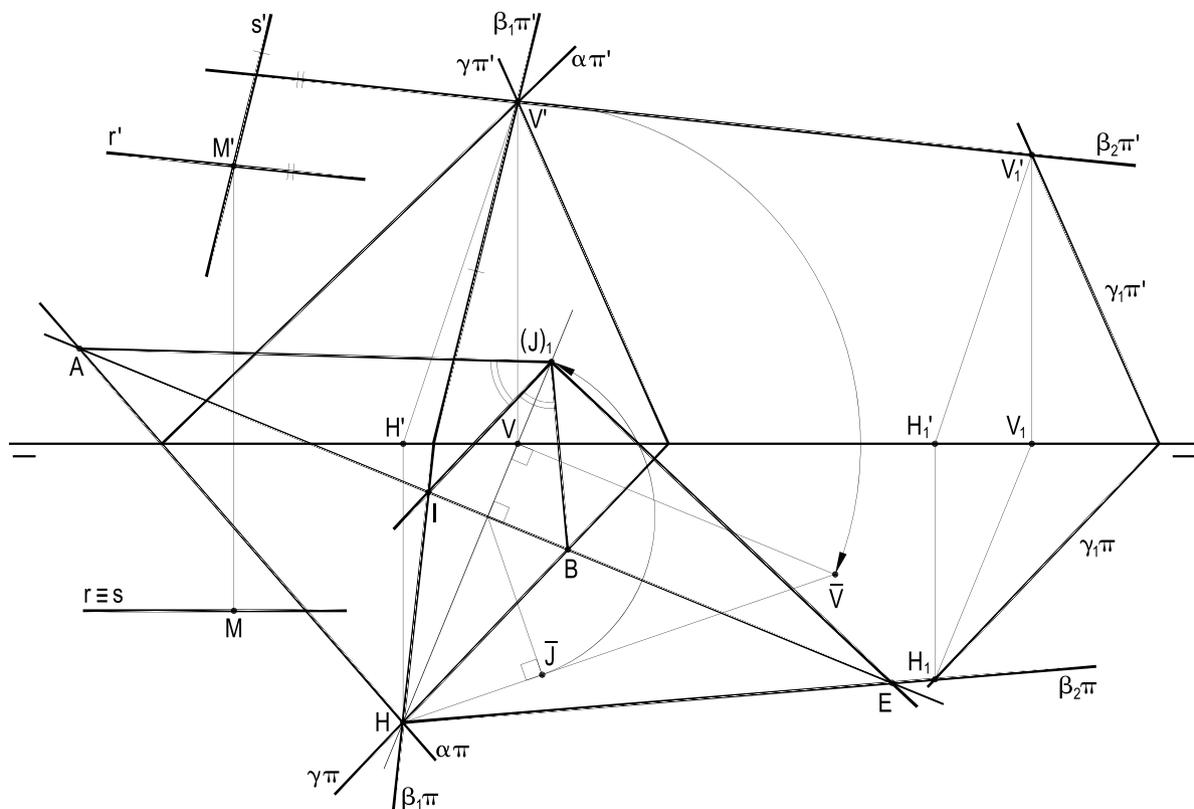


Figura 656

154.3 – Determinar o plano ( $\varphi$ ), paralelo à linha de terra, pertencente ao ponto (M) e igualmente inclinado em relação aos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), dados por seus traços.

O ponto (M) é dado por suas projeções.

Solução: O plano ( $\varphi$ ) pedido deve conter uma perpendicular a um dos bissetores de ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) (Figura 657), já que, para formar ângulos iguais com esses dois, deve ser perpendicular a, pelo menos, um de seus bissetores (número 153.6).

Assim, obtidos os traços do bissetor ( $\beta$ ) (Figura 658), basta traçar, por (M), a reta ( $p$ ), perpendicular a ( $\beta$ ), e a fronto-horizontal ( $f$ ), para definir o plano ( $\varphi$ ), dessas duas retas (Figura 658).

Há uma segunda solução, não incluída na épura da Figura 658, correspondente ao segundo bissetor dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ).

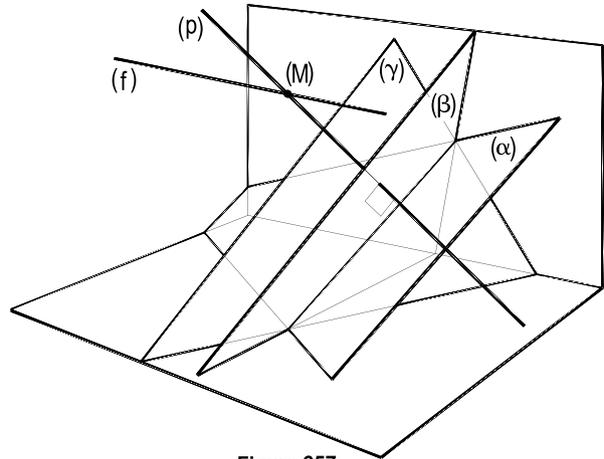


Figura 657

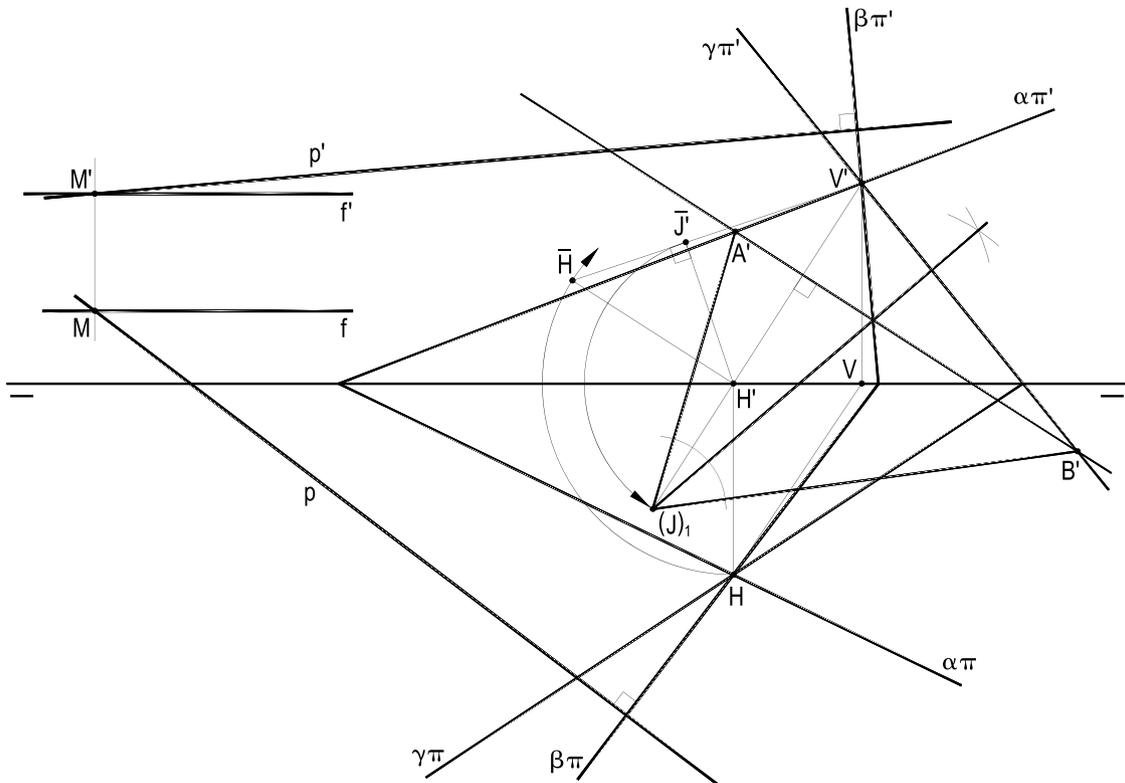


Figura 658

154.4 – Dados, todos por seus traços, os planos paralelos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) e os planos paralelos à linha de terra ( $\theta$ ) e ( $\rho$ ), mas oblíquos um ao outro, pede-se determinar as projeções do ponto (I) que tanto equidiste dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) quanto dos planos ( $\theta$ ) e ( $\varphi$ ) e, também, dos planos de projeção.

Solução: Para equidistar dos planos paralelos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), o ponto procurado (I) há de pertencer ao plano ( $\rho$ ), equidistante daqueles dois e, para equidistar de ( $\theta$ ) e de ( $\varphi$ ), (I) tem de estar num dos planos bissetores destes planos, como ( $\beta$ ) (Figuras 659 e 660), construído com o uso de um corte de perfil. Assim, o ponto (I) tem de pertencer à interseção (V)(H) de ( $\rho$ ) com ( $\beta$ ). E, para equidistar dos planos de projeção, deve ser o traço de (V)(H) com ( $\beta_{13}$ ), como indicado na Figura 660 (ver número 14), ou com ( $\beta_{24}$ ). O problema oferece, então, quatro soluções, não apresentadas todas, correspondentes aos traços com ( $\beta_{13}$ ) e ( $\beta_{24}$ ) das interseções de ( $\rho$ ) com cada bissetor de ( $\theta$ ) e ( $\varphi$ ).

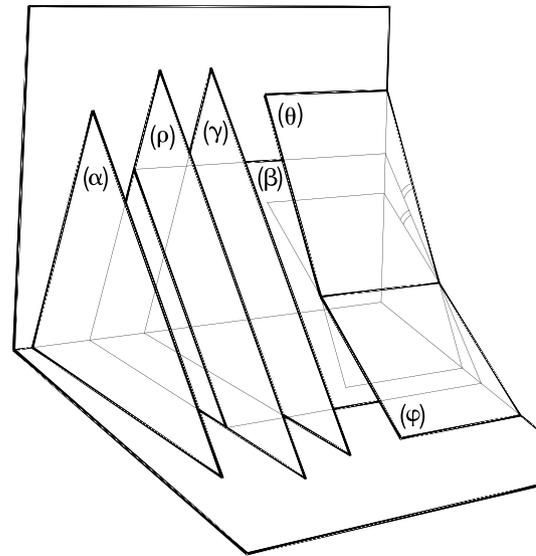


Figura 659

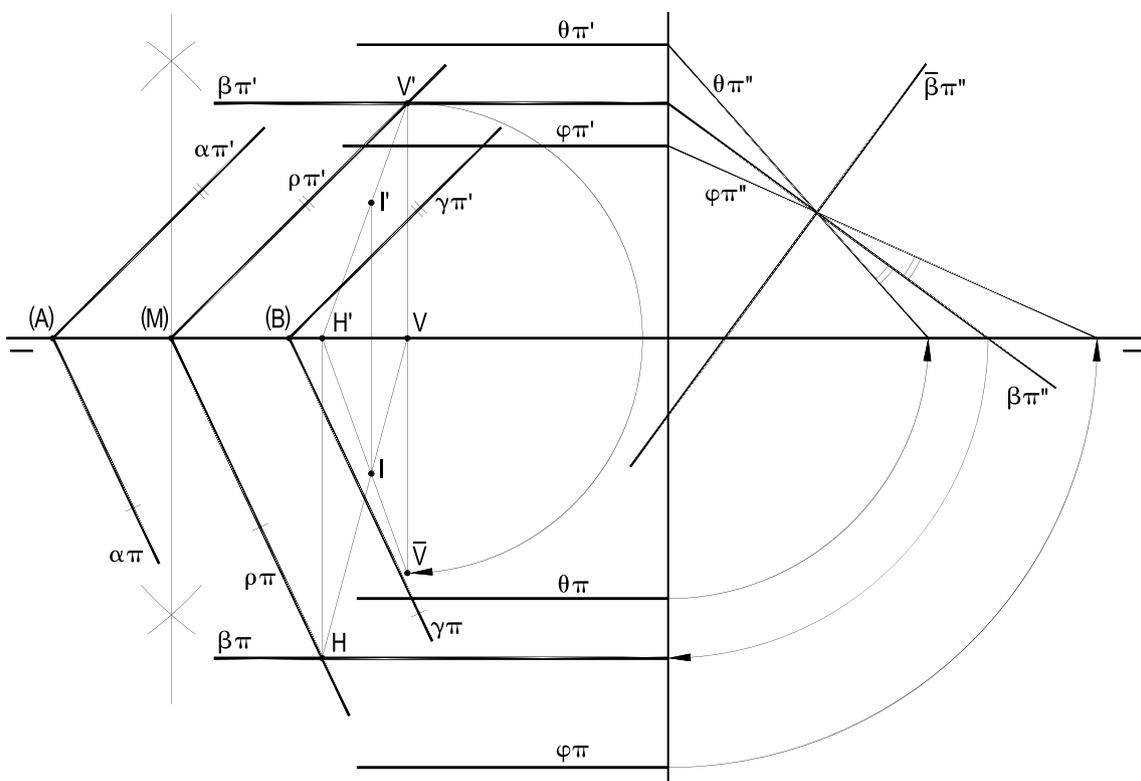


Figura 660

154.5 – São dados, por suas projeções, um triângulo (R)(S)(T) e, por seus traços, dois planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), que formam um diedro agudo, apoiado por sua aresta em ( $\pi$ ), situado acima deste plano, sendo seccionado por ( $\pi'$ ) segundo as retas  $\alpha\pi'$  e  $\gamma\pi'$ .

Existem duas superfícies esféricas concêntricas: a primeira, passando pelos vértices do triângulo dado, e a segunda, interior ao diedro dado e tangente às suas faces.

Pede-se determinar as projeções do centro (O) comum a essas duas superfícies esféricas.

Solução: Para poder pertencer aos vértices do triângulo (R)(S)(T), dado, a primeira superfície esférica tem de ter seu centro sobre a reta (p) perpendicular ao plano do triângulo, passando por seu circuncentro (C) (número 145.4).

E para tangenciar as duas faces do diedro dado, situando-se em seu interior, a segunda superfície esférica tem de ter seu centro pertencente ao bissetor ( $\beta$ ) desse diedro, para equidistar de suas faces (número 153.2).

Enfim, por deverem ser concêntricas as duas superfícies esféricas, seu centro comum (O) há de ser a interseção da reta (p) com o bissetor ( $\beta$ ), tal como construído na épura da Figura 661.

Tal interseção se fez com o auxílio do plano auxiliar horizontal ( $\theta$ ).

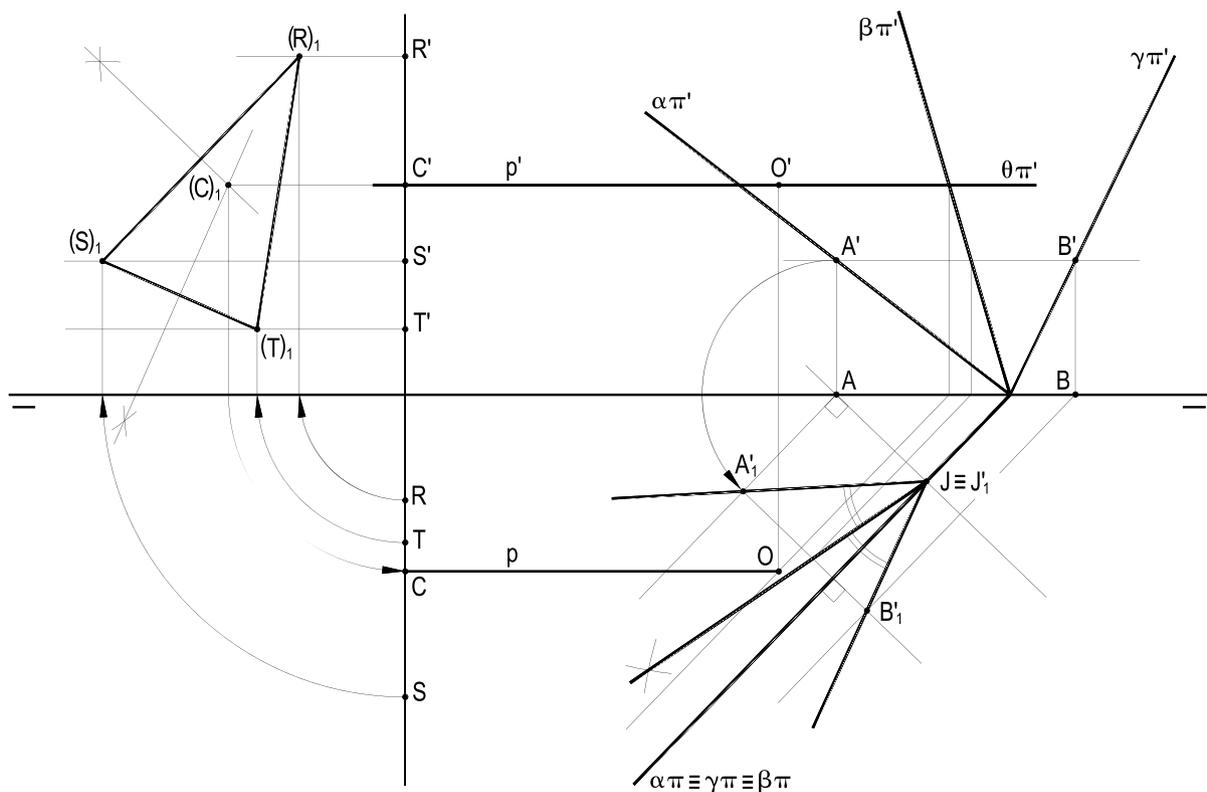


Figura 661

# CAPÍTULO XIV

## POLIEDROS

### 155 – Definições

- Poliedro é o sólido formado por quatro ou mais polígonos planos não situados num mesmo plano e tais que um lado de um seja também lado de outro (Figura 662). Estes polígonos, seus lados e seus vértices são denominados, respectivamente, faces, arestas e vértices do poliedro.
- Diagonal de um poliedro é todo segmento formado por dois de seus vértices não pertencentes a uma mesma face. Assim, é, por exemplo, (A)(T) na Figura 663.
- Plano diagonal de um poliedro é todo aquele formado por três, ou mais, de seus vértices não pertencentes a uma mesma face, sendo, então, necessariamente, secante ao sólido, assim como o plano definido pelos vértices (B), (D), (U) e (S) do poliedro da Figura 663.
- Seção plana num poliedro é toda aquela produzida no sólido por um plano a ele secante, pertencente, ou não, a algum de seus vértices. Assim é, por exemplo, o polígono (A)(B)(C)(D)(E), decorrente do seccionamento do poliedro da Figura 664 pelo plano ( $\gamma$ ).
- Um poliedro é convexo quando os planos de todas as suas faces não o atravessam. Em caso contrário, o poliedro é dito côncavo, ou não convexo.

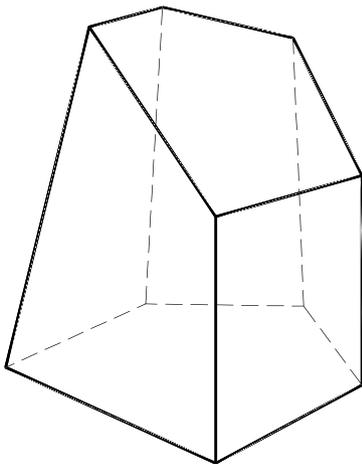


Figura 662

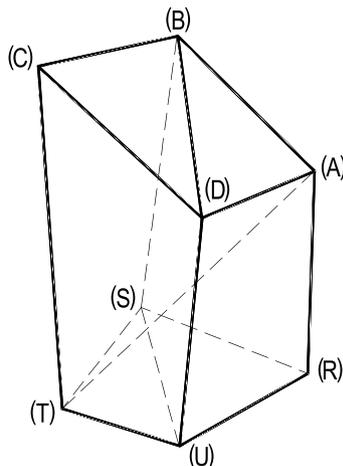


Figura 663

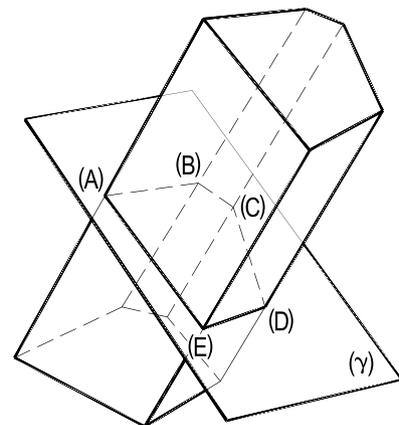


Figura 664

## 156 – Gênero

Gênero de um poliedro é o número de faces que ele possui.

Assim, um poliedro é dito um tetraedro, um pentaedro, um hexaedro, um octaedro, um dodecaedro, um icosaedro, etc., conforme, respectivamente, tenha quatro, cinco, seis, oito, doze, vinte, etc., faces.

## 157 – Poliedros convexos regulares

Por definição, um poliedro convexo é regular quando todas as suas faces são polígonos convexos regulares iguais e todos os seus ângulos sólidos são iguais, o que significa que a todos os seus vértices chegam iguais quantidades de faces.

Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 100) que só existem cinco tipos de poliedros convexos regulares com, respectivamente, quatro, seis, oito, doze e vinte faces, conforme detalhado a seguir.

## 158 – Tetraedro regular

É o poliedro regular formado por quatro triângulos equiláteros iguais, reunidos três a três em cada vértice (Figura 665). Tem seis arestas e quatro vértices. Não possui diagonais.

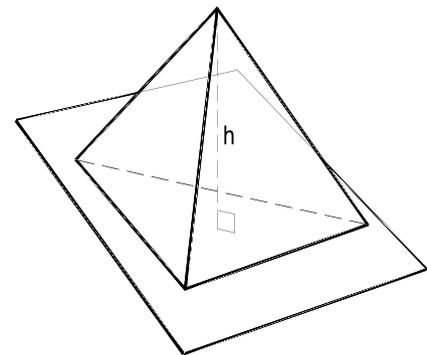


Figura 665

## 159 – Hexaedro regular

É o poliedro formado por seis faces quadradas iguais, reunidas três a três em cada vértice (Figura 666).

O hexaedro regular, comumente denominado cubo, tem doze arestas, oito vértices e quatro diagonais que (*Geometria Espacial*, números 111.6 e 111.7) são iguais e cortam-se mutuamente ao meio, num ponto (O) (Figura 667), que é o centro do sólido.

Suas faces são ou paralelas ou perpendiculares, formando, em cada vértice, um triedro trirretângulo (Figura 668).

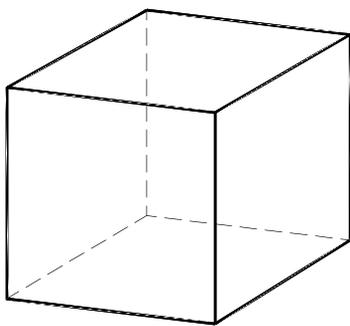


Figura 666

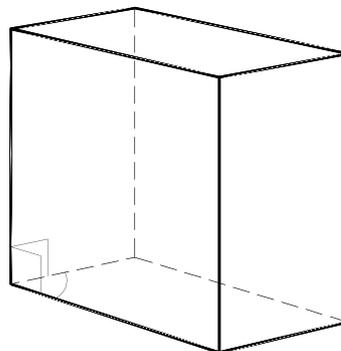


Figura 667

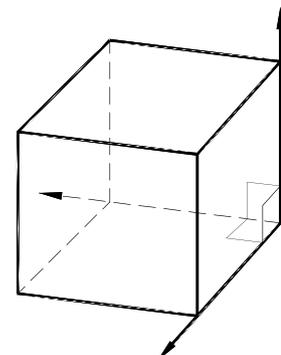


Figura 668

## 160 – Octaedro regular

É o poliedro regular formado por oito triângulos equiláteros iguais, reunidos quatro a quatro em cada vértice (Figura 669).

Possui doze arestas, seis vértices e três diagonais que (*Geometria Espacial*, número 114.2) são iguais, perpendiculares, aos pares, cortando-se mutuamente ao meio (Figura 670), num ponto (O), que é o centro do sólido (*Geometria Espacial*, número 114.7).

Os pares de faces opostas pertencem a planos paralelos (*Geometria Espacial*, número 114.6) (Figura 671).

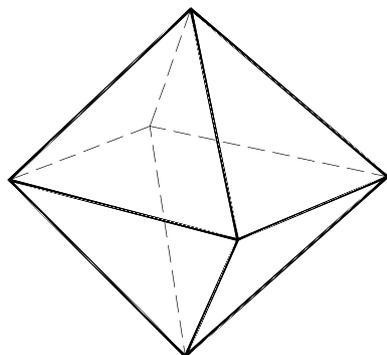


Figura 669

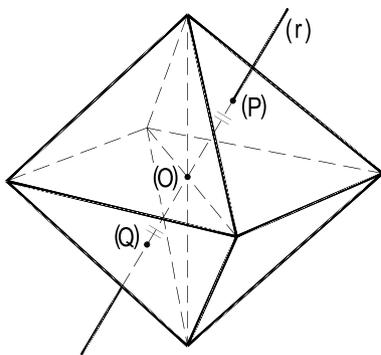


Figura 670

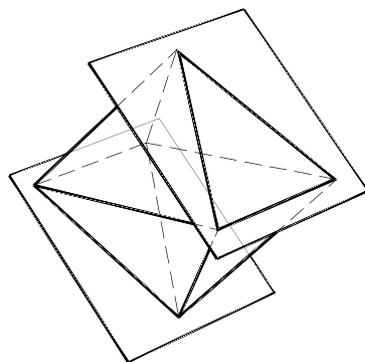


Figura 671

## 161 – Dodecaedro regular

É o poliedro formado por doze pentágonos convexos regulares iguais, reunidos três a três em cada vértice (Figura 672).

Tem (*Geometria Espacial*, número 116) trinta arestas, vinte vértices e cem diagonais.

## 162 – Icosaedro regular

É o poliedro formado por vinte triângulos equiláteros iguais, reunidos cinco a cinco em cada vértice (Figura 673).

Possui trinta arestas, doze vértices e trinta e seis diagonais (*Geometria Espacial*, número 120).

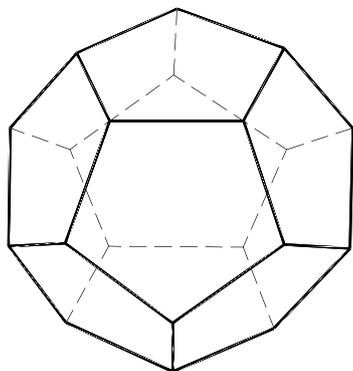


Figura 672

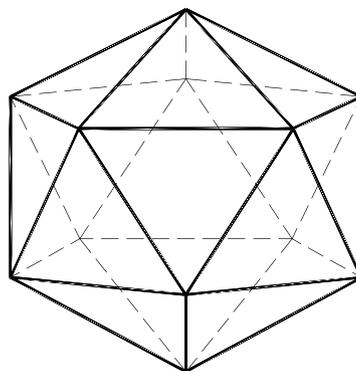


Figura 673

## 163 – Prismas

Superfície prismática é a gerada pelo movimento de uma reta de direção constante, sempre apoiada nos lados de uma linha poligonal fixa, não coplanar com ela (Figura 674). A poligonal é denominada diretriz e as retas móveis geratrizes da superfície, passando a se denominar arestas quando pertencem a algum vértice da diretriz.

As superfícies prismáticas podem ser abertas ou fechadas, convexas ou côncavas, conforme assim sejam suas diretrizes (*Geometria Espacial*, número 125).

Prisma é o poliedro limitado por uma superfície prismática fechada e por dois planos paralelos que cortem todas as arestas da superfície, produzindo as bases do sólido. A distância  $h$  entre eles é denominada altura do prisma (Figuras 675 e 676). Suas arestas podem ser básicas ou laterais, conforme, respectivamente, pertençam, ou não, a uma de suas bases.

Os prismas são ditos retos (Figura 675) ou oblíquos (Figura 676), conforme, respectivamente, tenham arestas laterais perpendiculares ou oblíquas aos planos de suas bases. Quando são retos e têm por bases polígonos regulares, são denominados prismas regulares.

E se classificam em triangulares, quadrangulares, pentagonais, etc., conforme, respectivamente, suas bases sejam triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.

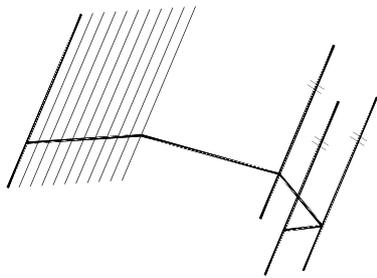


Figura 674

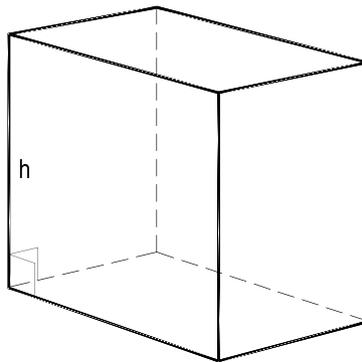


Figura 675

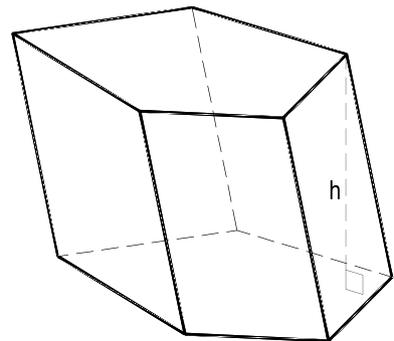


Figura 676

As bases de todo prisma são iguais entre si e suas faces laterais são paralelogramos ou, em casos particulares, retângulos, losangos ou quadrados.

As arestas laterais de todo prisma são, além de paralelas entre si, iguais. Essas arestas laterais medem a altura do sólido (Figura 675), caso o prisma seja reto, e são maiores que a altura (Figura 676), caso ele seja oblíquo.

Todo prisma que tenha paralelogramos como bases é denominado paralelepípedo (*Geometria Espacial*, número 129), podendo ser reto (Figura 677) ou oblíquo (Figura 678). Quando, em caso particular, um paralelepípedo reto tem bases retangulares (ou quadradas), ele é denominado paralelepípedo retângulo ou ortoedro (Figura 679).

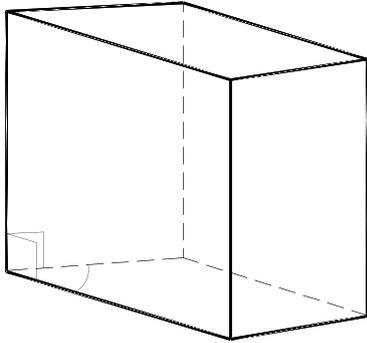


Figura 677

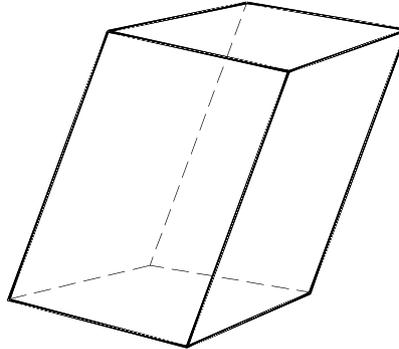


Figura 678

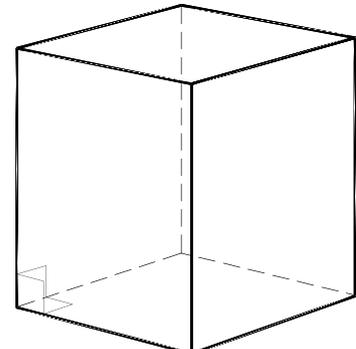


Figura 679

## 164 – Troncos de prismas

Troncos de prismas são os sólidos limitados por uma superfície prismática fechada e por dois planos não paralelos que cortem todas as suas aresta e que se interceptem exteriormente à superfície (Figura 680).

As seções produzidas na superfície por esses dois planos são as bases do tronco e seus lados são as arestas básicas do sólido. As demais faces e arestas são denominadas laterais.

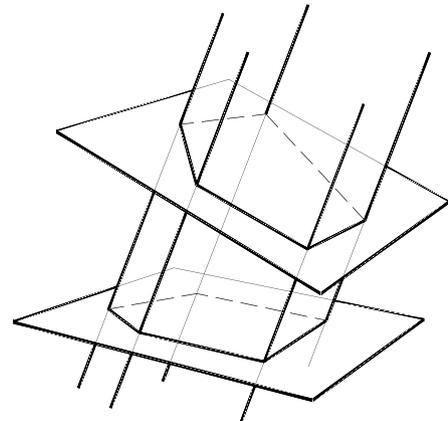


Figura 680

## 165 – Pirâmides

Superfície piramidal de uma folha é a superfície gerada pelo deslocamento de uma semirreta de origem fixa que se apoia continuamente nos lados de uma linha poligonal plana fixa, não coplanar com aquela origem (Figura 681).

A linha poligonal é a diretriz, as semirretas são as geratrizes, denominando-se arestas quando contêm cada vértice da diretriz, e a origem fixa é o vértice da superfície. As porções de planos limitadas por duas arestas consecutivas são as faces da superfície (Figura 681).

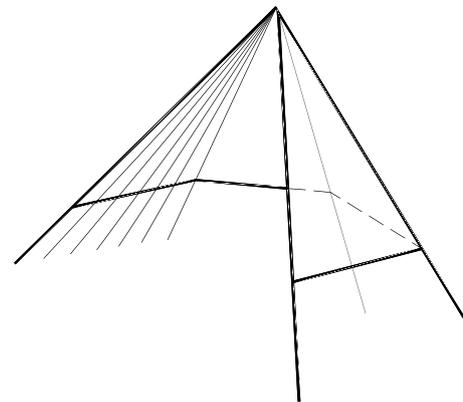


Figura 681

Por definição, pirâmide é o poliedro limitado por uma superfície piramidal fechada de uma folha e por um plano que corta todas as arestas da superfície (Figura 682).

A seção que tal plano produz na superfície denomina-se base da pirâmide e as porções da superfície limitadas por duas arestas laterais consecutivas e pela aresta básica que elas compreendem são as faces laterais da pirâmide.

O vértice da superfície é denominado vértice da pirâmide e sua distância  $h$  (Figuras 683 e 684) ao plano da base é a altura do sólido.

Uma pirâmide é dita reta quando sua base é um polígono inscritível num círculo e a projeção ortogonal do vértice do sólido coincide com o centro desse círculo (Figura 683) e oblíqua em todos os demais casos (Figura 682). No caso particular em que a base de uma pirâmide reta é um polígono regular (Figura 684), o sólido é denominado pirâmide regular.

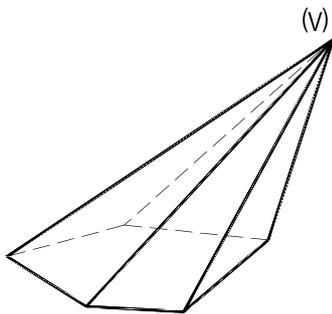


Figura 682

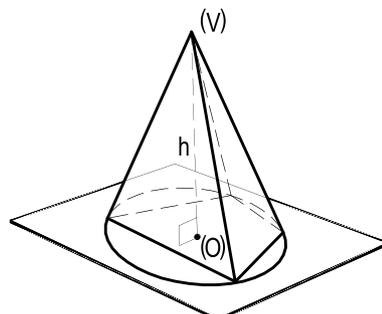


Figura 683

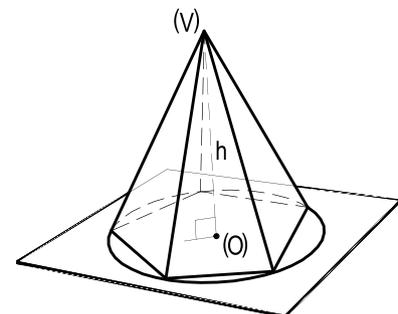


Figura 684

## 166 – Troncos de pirâmides

Superfície piramidal de duas folhas é a gerada pelo movimento de uma reta que, passando por um ponto fixo, se apoia continuamente nos lados de uma linha poligonal fixa, pertencente a um plano exterior àquele ponto (Figura 685).

Os conceitos de vértice, diretriz, geratriz, arestas e faces são os mesmos apontados para as superfícies piramidais de uma folha.

Tronco de pirâmide de primeira espécie é o sólido limitado por uma superfície piramidal fechada de uma folha e por dois planos a ela secantes, que não se cortam interiormente a ela. Podem, então, ter bases paralelas (Figura 686) ou não (Figura 687).

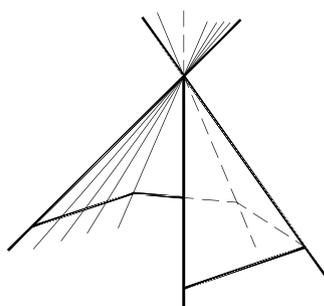


Figura 685

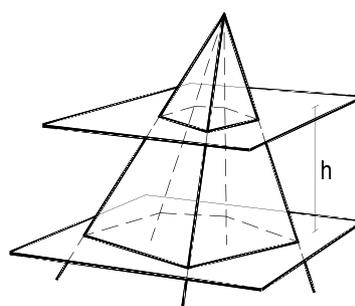


Figura 686

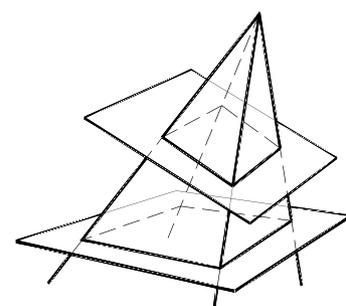


Figura 687

Tronco de pirâmide de segunda espécie é o sólido limitado por uma superfície piramidal fechada de duas folhas e por dois planos a ela secantes, que atingem, cada um, todas as arestas de cada folha da superfície. Podem, assim, ter bases paralelas (Figura 688) ou não (Figura 689).

A distância  $h$  (Figuras 686 e 688) entre os planos das bases de um tronco de pirâmide de bases paralelas é a sua altura.

Quando, em casos particulares, os troncos piramidais pertencem a pirâmides regulares, ou a uma dessa natureza e a seu prolongamento para além de seu vértice e têm bases paralelas, são ditos troncos de pirâmides regulares, respectivamente, de primeira (Figura 690) ou de segunda espécie (Figura 691).

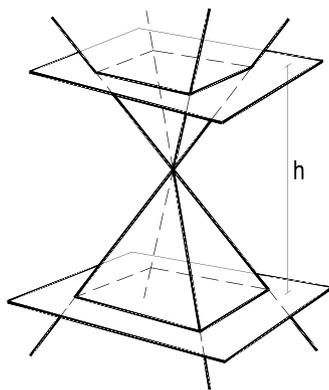


Figura 688

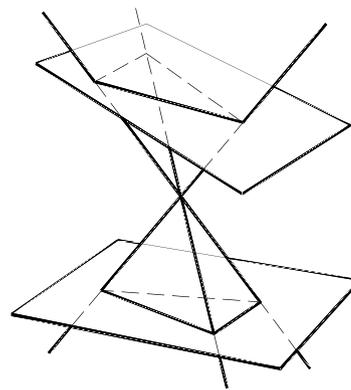


Figura 689

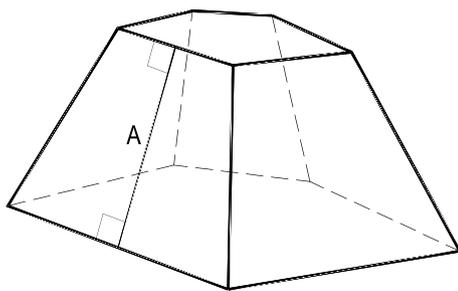


Figura 690

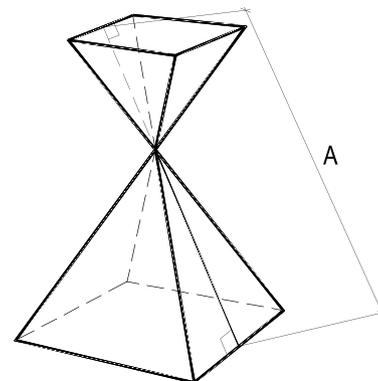


Figura 691

Apótema de um tronco de pirâmide regular é o segmento  $A$  formado pelos pontos médios de duas arestas básicas pertencentes a uma mesma face lateral (Figuras 690 e 691).

Naturalmente, por serem as faces laterais desses troncos regulares trapézios isósceles (Figura 690) ou triângulos isósceles e seus homotéticos inversos (Figura 691), os apótemas são, sempre, perpendiculares às arestas básicas das faces laterais em que são considerados.

## 167 – Convenções gráficas para a visibilidade

Como as faces dos poliedros são habitualmente consideradas opacas, vértices e arestas do sólido poderão, então, não ser visíveis. Convencionou-se, por isso, que arestas ocultas deverão ser representadas, em *épura*, por linhas tracejadas, o que também há de ocorrer para elementos interiores aos poliedros que forem incluídos, tais como diagonais, algumas alturas e até porções de outros sólidos internos àqueles em estudo.

Cabe, por isso, destacar os princípios que comandam, em *épura*, a visibilidade, algumas propriedades práticas e suas representações:

167.1 – As projeções horizontal e vertical de um sólido são independentes quanto às suas visibilidades, visto que, por convenção, o observador para ( $\pi$ ) situa-se no infinito, acima desse plano de projeção, e o observador para ( $\pi'$ ) é colocado infinitamente afastado desse plano, com afastamento positivo.

167.2 – Os planos de projeção são considerados transparentes, não interferindo, portanto, nas visibilidades dos sólidos em estudo.

167.3 – Os contornos de cada projeção, denominados usualmente contornos aparentes, são sempre visíveis por não sofrerem qualquer obstrução visual em nenhuma das projeções.

167.4 – As linhas visíveis devem ser representadas por traçados contínuos de iguais intensidades e as invisíveis por tracejados homogêneos, também com intensidades equivalentes.

167.5 – Alguma linha interior ao sólido, como, por exemplo, uma certa diagonal que mereça ser destacada, pode ser, por isso, representada por linha mista (traço, ponto, traço), devendo, então, ser alvo de especial referência.

167.6 – Naturalmente, se um vértice interior ao contorno aparente for visível, serão visíveis todas as arestas que a ele chegam. É o que ocorre no exemplo das Figuras 692 e 693, em que é apresentada apenas uma projeção de um sólido, para ressaltar as visibilidades dos vértices (A) e (B), em projeção horizontal, ambos visíveis, tais suas cotas, como visíveis também hão de ser todas as seis arestas que a eles chegam.

Já o vértice (J), por sua muito menor cota, torna-se invisível na projeção horizontal J apreciada, como também invisíveis têm de ser as quatro arestas que nele convergem, ocultas que estão, para o observador relativo a ( $\pi$ ), pelas faces que, mais altas, formam o contorno aparente da projeção horizontal do sólido estudado.

E, por isso (Figura 693), todas as arestas que chegam a J são representadas por linhas tracejadas.

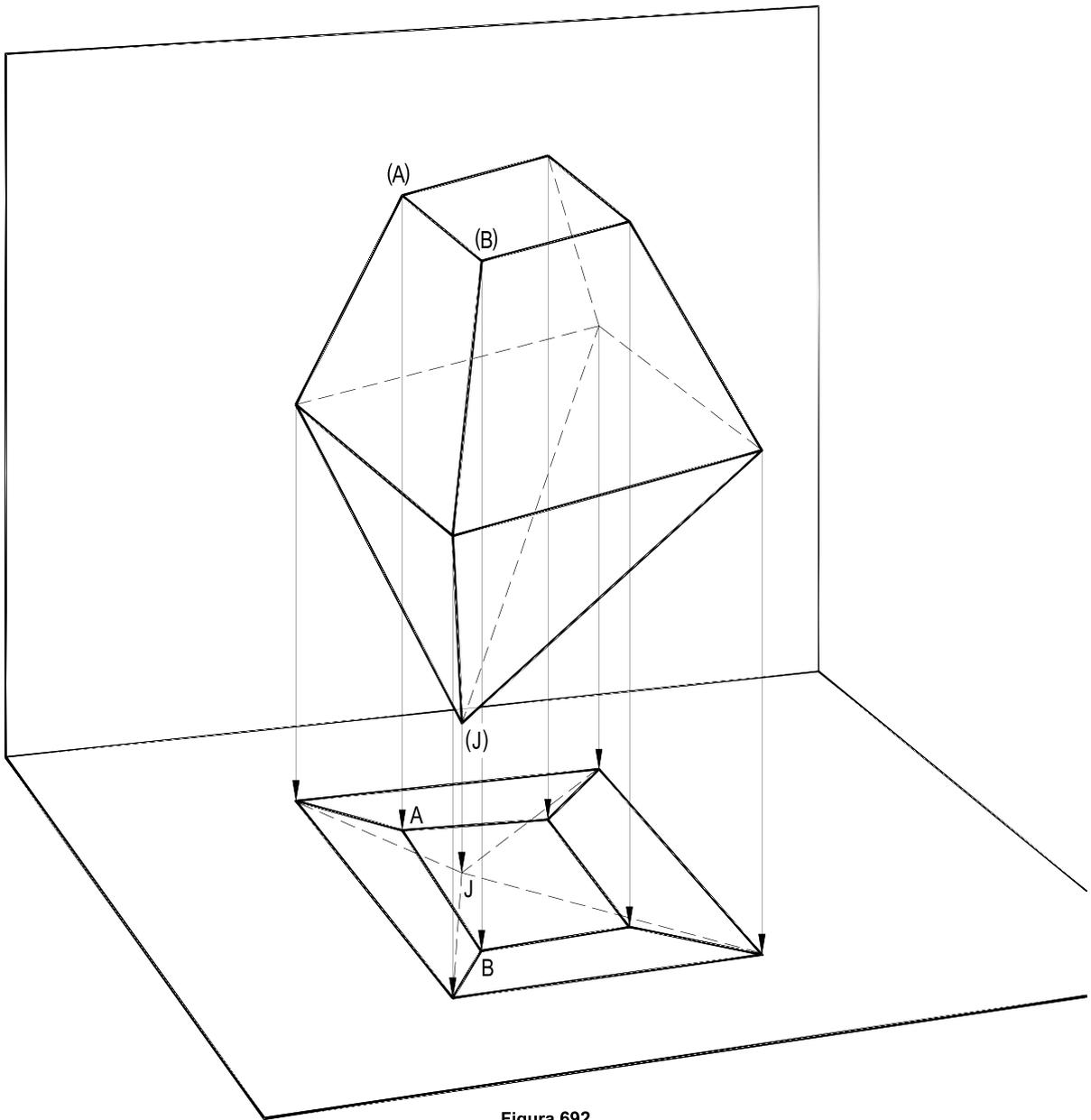


Figura 692

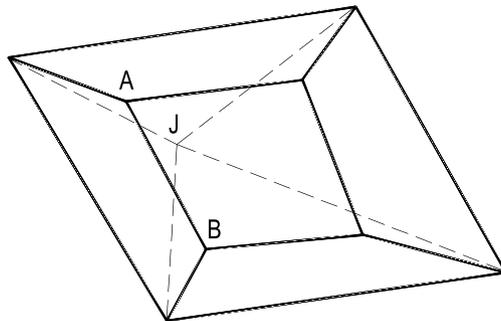


Figura 693

167.7 – Quando, em qualquer das projeções, duas arestas reversas de um poliedro convexo apresentarem projeções cruzadas, uma deverá ser visível e a outra não, pois esta há de estar oculta pelos dois planos que formam a visível.

Comprovando tal afirmação, basta observar (Figuras 694 e 695) a reta vertical (M)(N), criada a partir do ponto  $M \equiv N$ , comum às projeções horizontais cruzadas AC e BD, e notar, pela projeção vertical, que (M) tem cota superior à de (N), sendo, por isso, visível.

O mesmo raciocínio se aplica (Figura 695) à projeção vertical do sólido, sendo, agora, utilizada a reta de topo (R)(S), que informa ter (R) afastamento maior que (S), o que garante, para a projeção vertical do sólido, ser visível a projeção A'C' da aresta (A)(C) que contém (R).

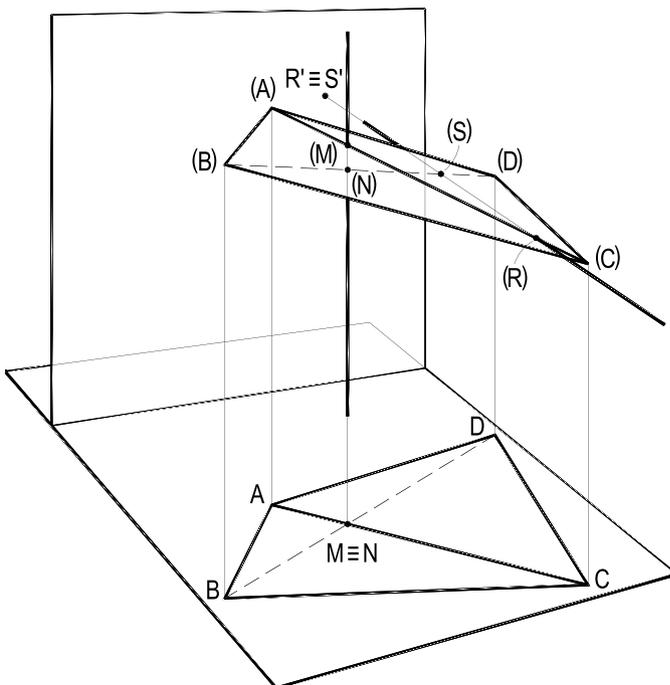


Figura 694

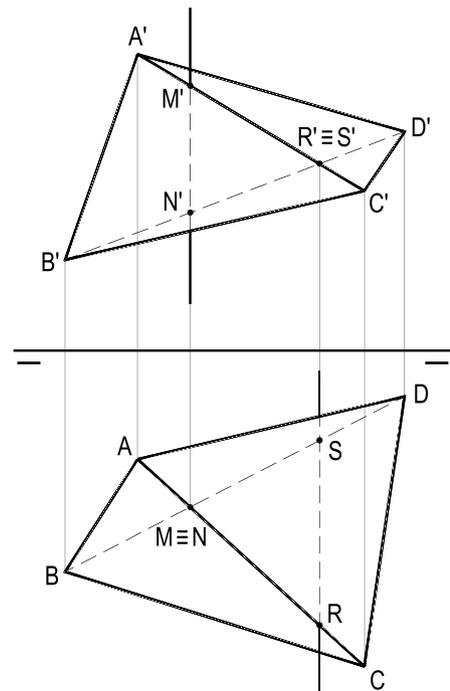


Figura 695

## 168 – Representação, em é pura, de poliedros

Como problema direto, vejamos alguns exemplos da construção das projeções de um poliedro, do qual são dadas todas as informações próprias de grandeza e de posição, especialmente propostas para estudo das visibilidades.

168.1 – Uma pirâmide regular (V) – (A)(B)(C)(D) está assente por sua base no plano de topo ( $\alpha$ ), dado por seu traço vertical  $\alpha\pi'$ . Sabendo que sua aresta básica e sua altura medem respectivamente 3,8 cm e 6,8 cm, que a aresta básica (A)(B) pertence a ( $\pi$ ), (A) mais próximo de ( $\pi'$ ) que (B), que o vértice (D) pertence a ( $\beta_{13}$ ) e que a pirâmide se situa no primeiro diedro, pede-se construir suas projeções.

Solução: Se  $(A)(B) \in (\pi)$  e a base está no plano  $(\alpha)$ , então  $(A)$  e  $(B)$  pertencem a  $\alpha\pi$ .

O vértice  $(D)$ , pertencendo a  $(\beta_{13})$ , há de estar sobre a interseção  $(i)$  e  $(\alpha)$  com  $(\beta_{13})$ .

Por ser  $(A)(B)$  de topo,  $(A)(D)$ ,  $(B)(C)$  e a própria altura  $(V)(O)$  da pirâmide são frontais, apresentando suas verdadeiras grandezas em suas projeções verticais, o que permite a construção do sólido (Figura 696). Em especial, a partir de  $D'$ , obtém-se  $D$ , e, então,  $A$  e toda a projeção horizontal.

Quanto à visibilidade, a única aresta invisível, em projeção horizontal, é  $(A)(B)$ , visto que está encoberta pelas faces laterais  $(V)(B)(C)$ ,  $(V)(C)(D)$  e  $(V)(D)(A)$ .

Já a projeção vertical fica reduzida ao seu contorno aparente, pois as duas arestas  $(A)(B)$  e  $(C)(D)$  são ambas de topo e isso proporcionam.

Há apenas uma solução, porque a obrigação da pirâmide se situar no primeiro diedro anula as possibilidades do vértice  $(V)$  ficar abaixo do plano dado  $(\alpha)$  e da base ficar à esquerda de  $\alpha\pi$ .

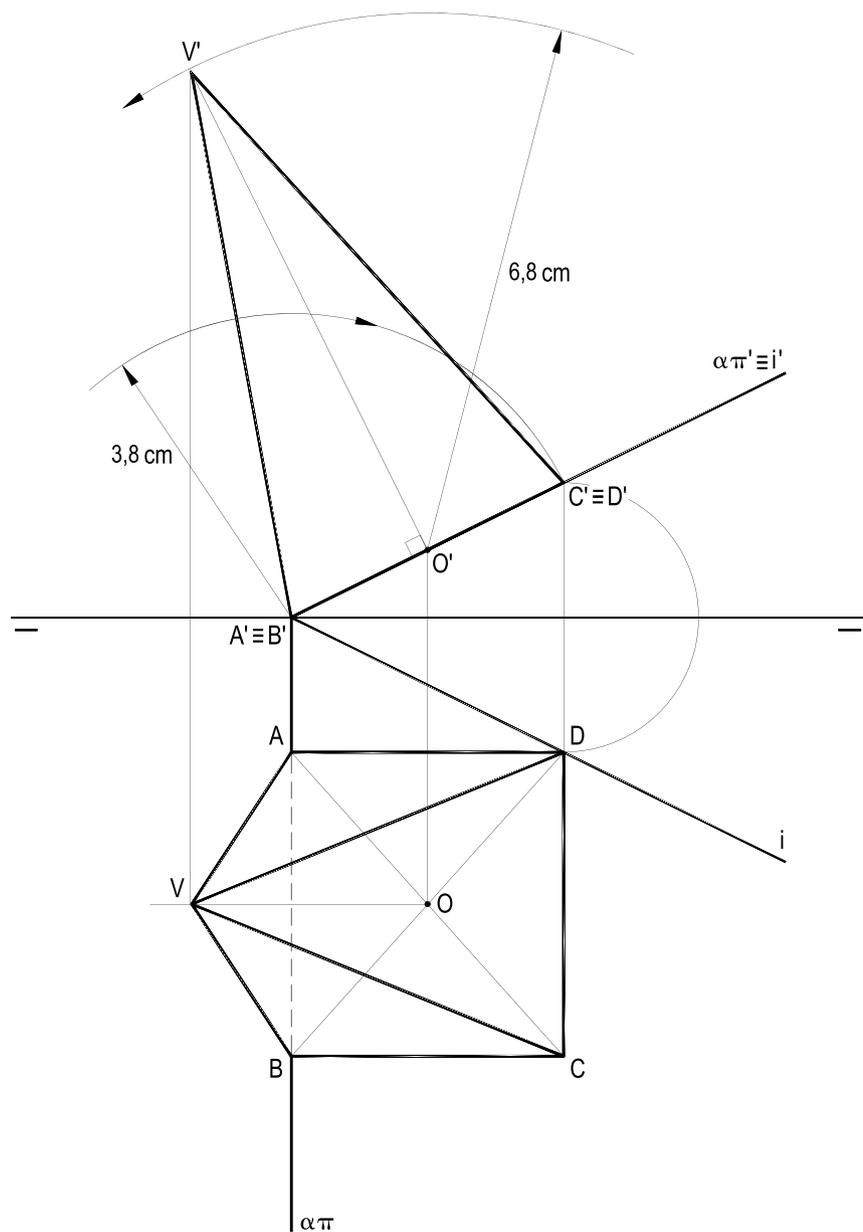


Figura 696

168.2 – Construir as projeções de um prisma triangular regular de bases (A)(B)(C) e (R)(S)(T) pertencentes a planos verticais, sabendo que o vértice (B) tem cota nula e abscissa maior que a de (A).

A altura do prisma é igual à sua aresta básica e o sólido não é atravessado por  $(\pi)$ .

São dadas, em épura, as duas projeções do vértice (A) e a projeção horizontal R do vértice (R).

Solução: Se as bases pertencem a planos verticais, as arestas laterais do prisma, para lhes serem perpendiculares, têm de ser horizontais.

Assim, a projeção horizontal, dada, AR da aresta lateral, estando em V.G., permite a construção, também em V.G., do triângulo equilátero  $(A)_1(B)_1(C)_1$ , rebatimento, sobre  $(\pi)$ , da base (A)(B)(C), fazendo o vértice (B) ter cota nula e escolhendo, das duas soluções possíveis, aquela que corresponde a uma abscissa superior à do vértice (A) (Figura 697).

Também para o vértice (C) resta apenas uma solução, pois a segunda obrigaria o prisma ser cortado por  $(\pi)$ , contrariando o enunciado.

Para a visibilidade, em projeção horizontal, a única aresta interior ao contorno aparente é visível, por ser a de maior cota.

Já para a projeção vertical, o vértice (R), com o menor afastamento, resta invisível, obrigando que as três arestas  $A'R'$ ,  $R'S'$  e  $T'R'$ , que nele convergem, sejam invisíveis e, portanto, apresentadas com linhas tracejadas.

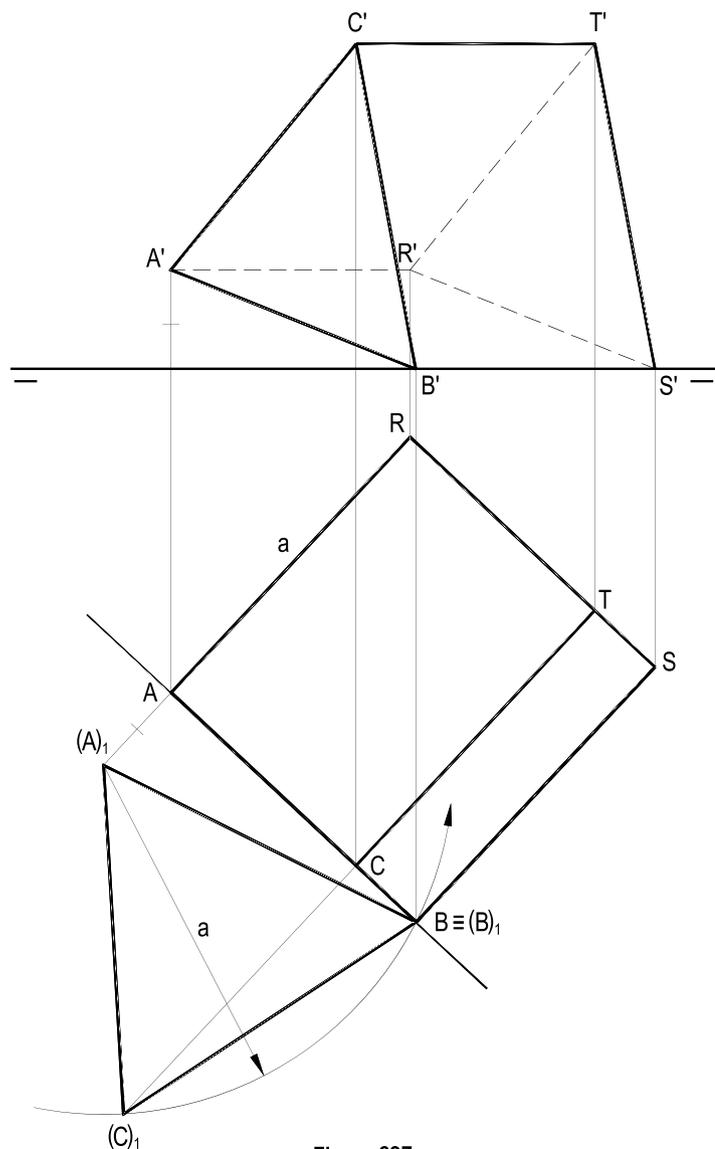


Figura 697

168.3 – Uma pirâmide pentagonal regular está assente por sua base (A)(B)(C)(D)(E) num plano ( $\alpha$ ), paralelo à linha de terra e dado por seus traços. Sabe-se que esse pentágono inscreve-se num círculo tangente aos dois traços de ( $\alpha$ ), com o vértice (A) em ( $\pi'$ ) e (B) sendo o de menor abscissa. A altura da pirâmide é igual ao diâmetro do círculo circunscrito à base, deixando seu vértice (V) no primeiro diedro. Pede-se construir as projeções da pirâmide.

Solução: Rebatido o plano ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ) e construído o pentágono regular básico (A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub>(C)<sub>1</sub>(D)<sub>1</sub>(E)<sub>1</sub> em V.G., com (A)<sub>1</sub> sobre o traço vertical  $\alpha\pi'$ , basta alçá-lo, para se ter suas projeções. Com o auxílio de uma vista de perfil, consegue-se ter a altura  $\bar{V}\bar{O}$  do sólido, em V.G., e, alçado o vértice (V), completa-se a pirâmide. Quanto à visibilidade, na projeção vertical, aproveitou-se o menor afastamento do vértice (A), para marcar invisíveis as três arestas que nele chegam e, então, fazer visíveis V'C' e V'D', que cruzam, respectivamente, A'B' e A'E' (número 167.7). Na projeção horizontal, apenas a aresta CD, com a menor cota, resta invisível (Figura 698). Observe-se que os traços do plano foram marcados com linhas finas em suas porções ocultas pela pirâmide.

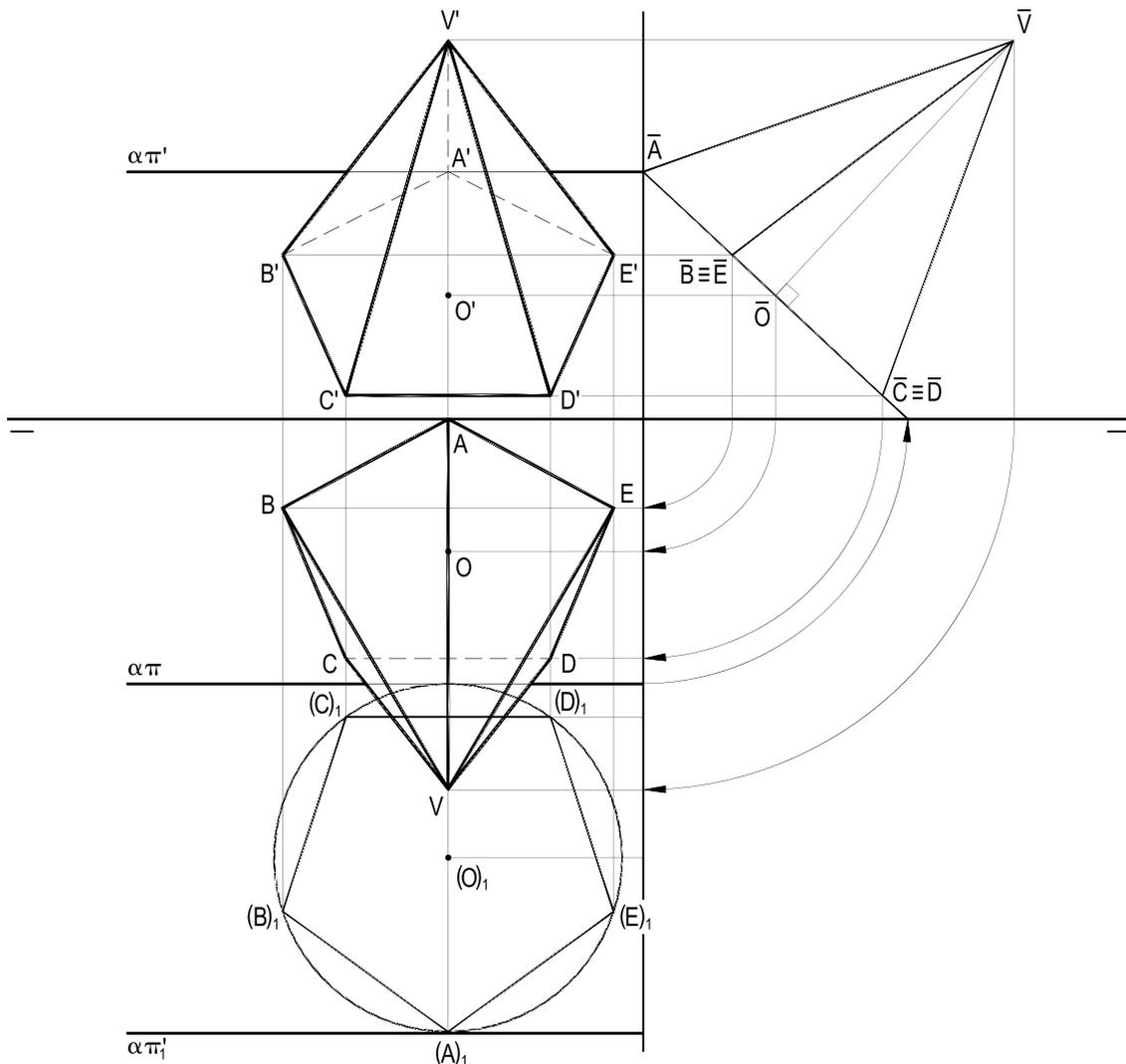


Figura 698

168.4 – Uma pirâmide quadrangular regular (V) – (A)(B)(C)(D), situada no primeiro diedro e apoiada em  $(\pi)$  por sua aresta (A)(B), tem a base no plano  $(\alpha)$  e o vértice (D) em  $(\pi')$ . Sua altura é igual ao dobro da diagonal da sua base.

Sendo dadas apenas as projeções horizontais de (A) e de (B), construir o sólido.

Solução: O problema traz uma questão preliminar, que é a obtenção dos traços do plano  $(\alpha)$ , resolvida, na Figura 699, pela construção em V.G. do quadrado  $AB(-C)_1(D)_1$ , e a consequente determinação do traço  $\alpha\pi'_1$ , rebatido e, enfim, pelo seu alçado, para a projeção vertical  $\alpha\pi'$ .

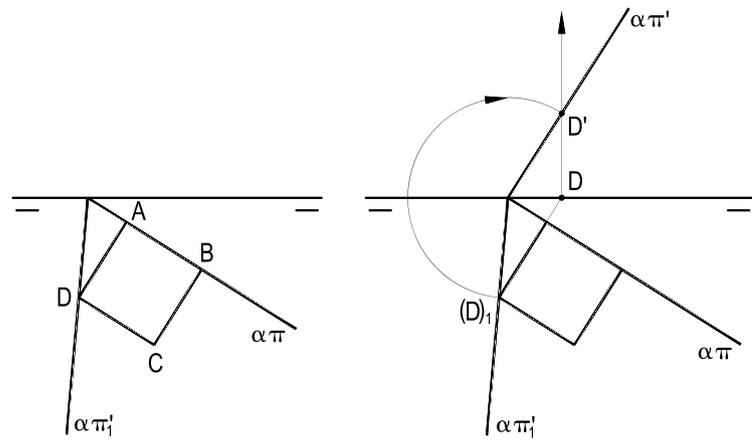


Figura 699

Determinado o plano, basta traçar pelo centro (O) da base, devidamente alçada, a perpendicular a seu plano e, para obter o vértice (V), lançar mão de uma mudança de  $(\pi)$ , que transforme a altura da pirâmide em horizontal, aceitando, então, em sua nova projeção  $O_1J_1$  seu comprimento, em V.G. (Figura 700).

Para a visibilidade, foi imediato utilizar a menor cota da aresta (A)(B), para a projeção horizontal, e o menor afastamento do vértice (D), para a projeção vertical (Figura 700).

Mais uma vez, observe-se o traço contínuo, mas fino, utilizado para a porção de  $\alpha\pi'$  oculta pelo sólido.

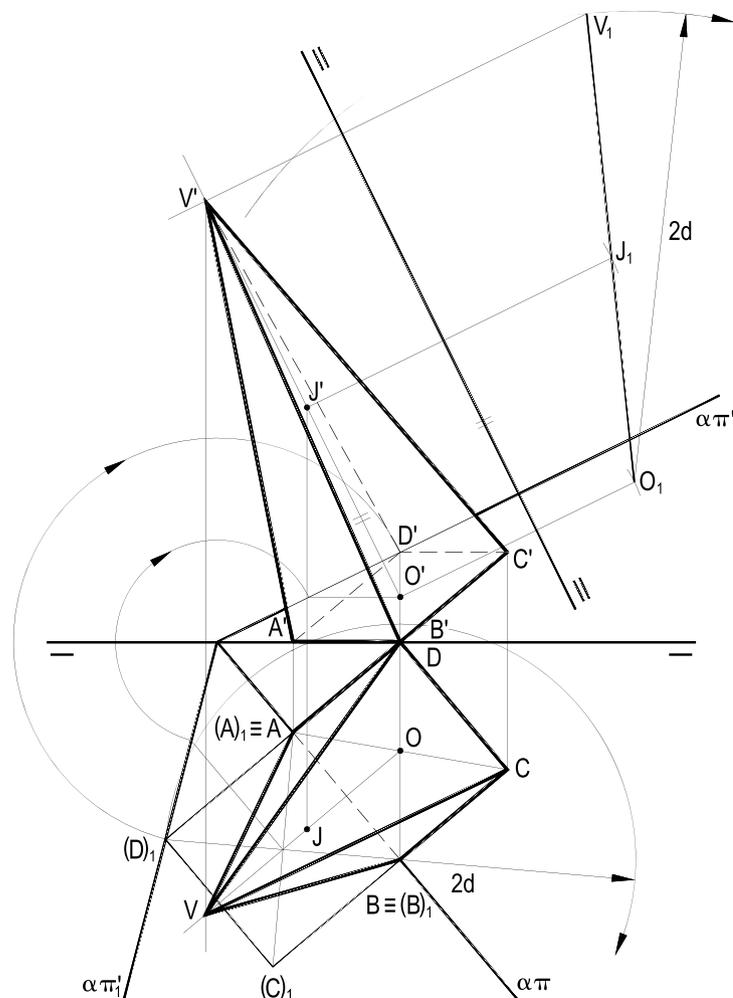


Figura 700



168.6 – Um sólido é composto por um cubo e por seis pirâmides quadrangulares regulares que têm por bases cada face do cubo e alturas iguais à sua aresta.

Sabendo que o cubo tem duas faces horizontais e que sua aresta (A)(B), dada por suas projeções, pertence à face horizontal de menor cota, pede-se construir as projeções do sólido.

Solução: Por ter duas faces horizontais, o cubo tem sua projeção horizontal reduzida a um quadrado de lado AB (Figura 703). A projeção vertical do cubo tem, então, contorno aparente retangular, com altura, em V.G., igual a AB, por serem arestas verticais que unem suas duas bases.

As quatro pirâmides quadrangulares regulares laterais, por terem, todas, bases pertencentes a planos verticais, apresentam em V.G. suas alturas, em projeção horizontal (Figuras 702 e 703), o que torna imediatas suas construções. Já as outras duas, assentes nas faces horizontais do cubo, por terem alturas verticais, trazem essa V.G. para suas projeções verticais (Figura 703), mais uma vez facilitando suas construções.

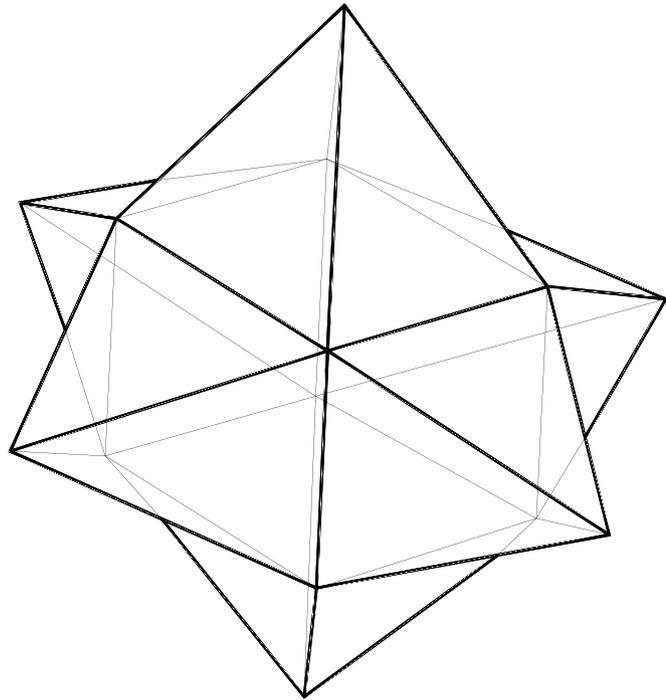


Figura 702

O exemplo é especialmente interessante para a observação das visibilidades, pois, enquanto em projeção horizontal, devido às superposições dos pares de arestas, não há qualquer invisibilidade, a projeção vertical do sólido proporciona vários conjuntos de arestas invisíveis, todos, naturalmente, correspondentes a vértices posteriores do sólido.

Por último, cabe observar que a inexistência da linha de terra em nada dificultou a construção pedida e que o problema oferece uma segunda solução, correspondente à construção da face horizontal da aresta (A)(B) para a esquerda desta e não para a direita, como apresentado na Figura 703.

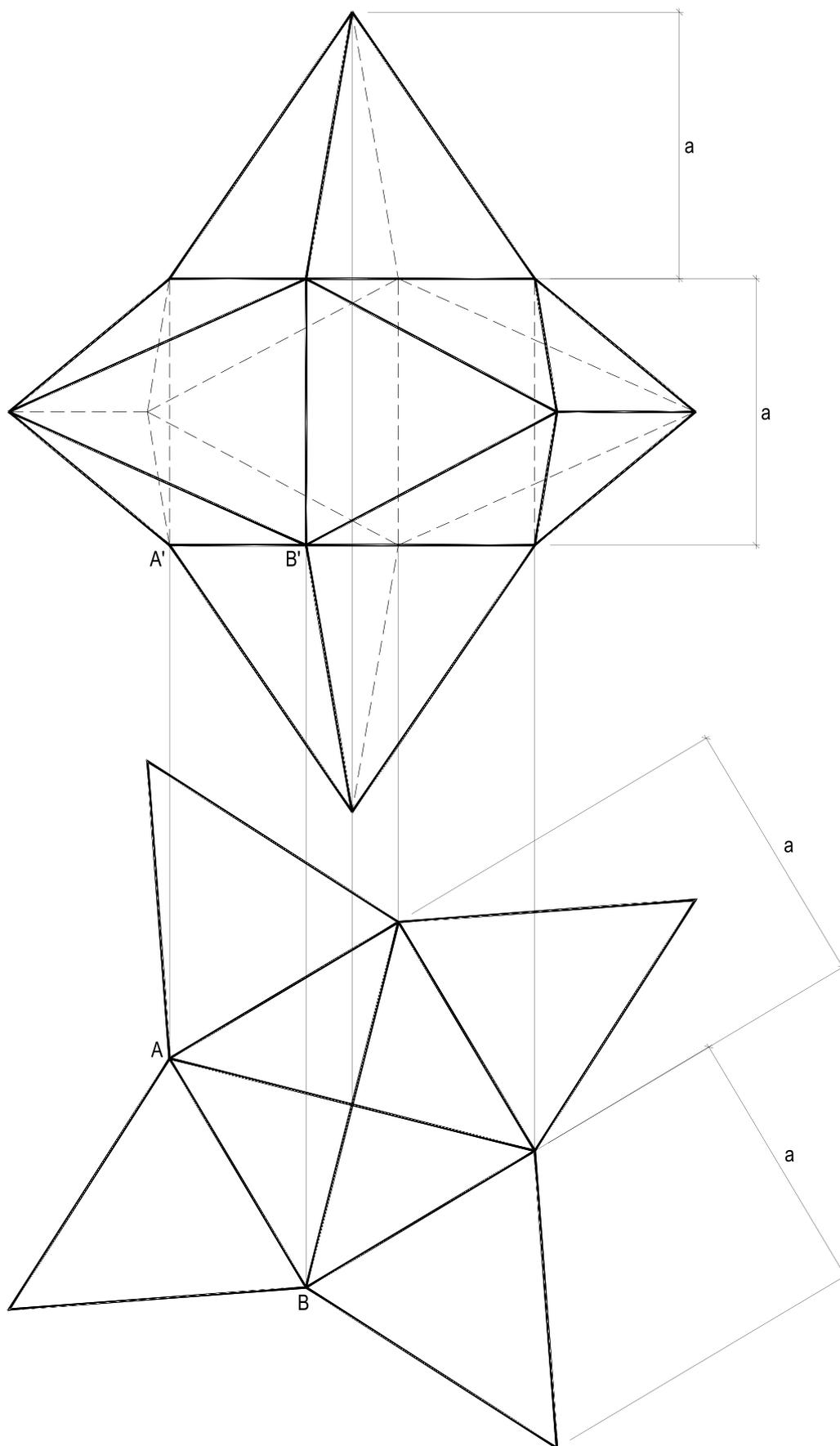


Figura 703

## 169 – Poliedros regulares – posições especiais

Devido às peculiaridades geométricas que possuem, os poliedros convexos regulares apresentam formas especiais para os contornos aparentes de suas projeções ortogonais sobre planos em posições particulares.

Nos estudos desenvolvidos a seguir, foi dada prioridade às projeções horizontais, escolhidas para ressaltar tais particularidades, mas sempre acompanhadas das respectivas projeções verticais, para cada poliedro regular analisado.

## 170 – Tetraedro regular

Consideremos um tetraedro regular  $(J)-(A)(B)(C)$ , assente por sua face  $(A)(B)(C)$  num plano horizontal, e apreciemos o que ocorre com sua projeção vertical quando se gira o sólido.

Sabemos (*Geometria Espacial*, números 105.5, 105.6 e 105.14) que, além de serem iguais suas quatro faces, a projeção ortogonal do vértice  $(J)$  sobre a face oposta coincide com o circuncentro  $(O)$  desse triângulo equilátero  $(A)(B)(C)$  (Figura 704), que duas arestas opostas, como  $(J)(A)$  e  $(B)(C)$ , são ortogonais (Figura 705), que a reta definida por seus pontos médios  $(M)$  e  $(N)$  é a perpendicular comum a elas (Figura 706) e que, conhecido o valor  $a$  de sua aresta, obtém-se facilmente (Figura 704) o valor  $h$  da altura do sólido, pela construção do triângulo retângulo  $(J)(O)(A)$ .

Além disso, é interessante observar que o plano  $(\gamma)$ , medidor da aresta  $(B)(C)$ , produz no tetraedro (Figura 705), por seção, um triângulo isósceles  $(N)(J)(A)$ , em que os lados iguais  $(N)(A)$  e  $(N)(J)$  são medianas, ou alturas, dos triângulos equiláteros faces  $(A)(B)(C)$  e  $(J)(B)(C)$  (*Geometria Espacial*, número 105.3).

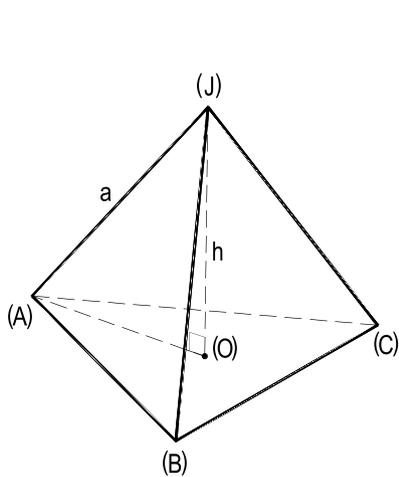


Figura 704

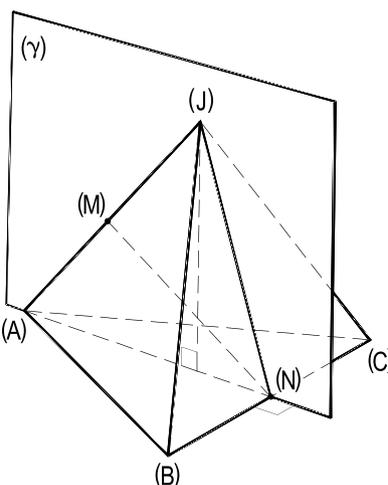


Figura 705

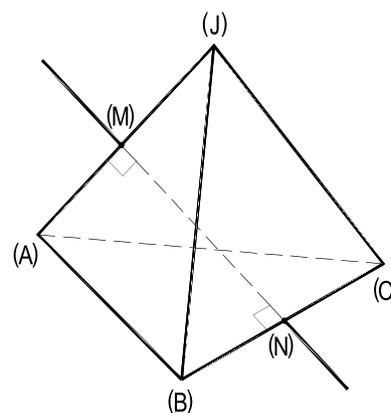


Figura 706

Consideremos, então, um tetraedro regular  $(J)-(A)(B)(C)$ , assente pela face  $(A)(B)(C)$  num plano horizontal  $(\gamma)$ , o que implica em que o contorno aparente de sua projeção horizontal  $ABC$  se faça em V.G. e que tal projeção fique completa com os três segmentos  $JA$ ,  $JB$  e  $JC$  que unem seu circuncentro  $J$  aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  (Figura 707).

Girando o triângulo equilátero  $ABC$ , de uma posição genérica (Figura 707) para as duas particulares, uma com a aresta  $(B)(C)$  fronto-horizontal (Figura 708) e outra na posição de topo (Figura 709), pode-se observar como mudam suas projeções verticais, de um triângulo escaleno  $J'B'C'$ , com uma ceviana genérica  $J'A'$  (Figura 707), para a de um triângulo isósceles  $J'B'C'$  e sua altura  $J'A'$  (Figura 708) e, enfim, para um triângulo isósceles (Figura 709), em que os dois lados iguais, os que chegam a  $B' \equiv C'$ , mostram, em V.G., as alturas de dois triângulos faces  $(J)(B)(C)$  e  $(A)(B)(C)$  (ver Figura 705), o que resulta em outra construção para a determinação da V.G. da altura do tetraedro (Figura 709).

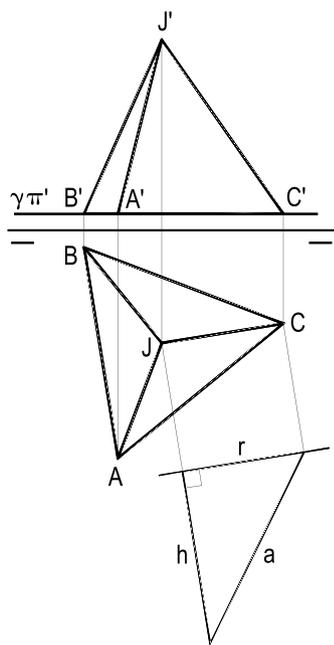


Figura 707

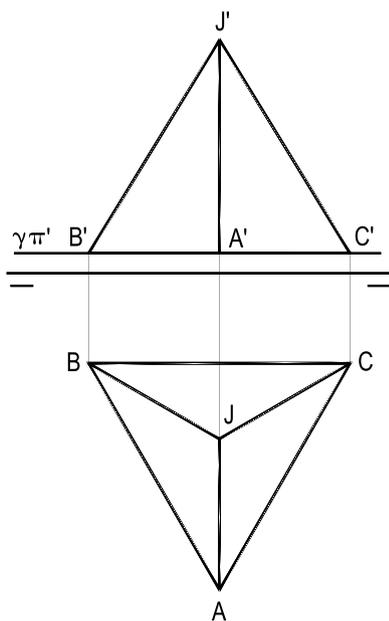


Figura 708

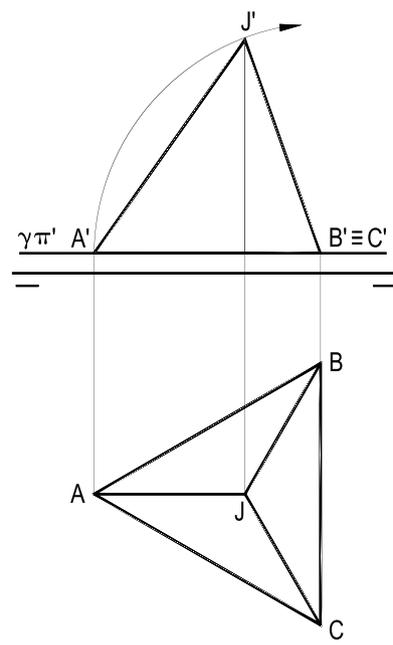


Figura 709

Observe-se que, na terceira posição (Figura 709), é a projeção vertical que resulta particular, por contar apenas com seu contorno aparente que, além do mais, tem dois lados iguais (*Geometria Espacial*, número 105.15).

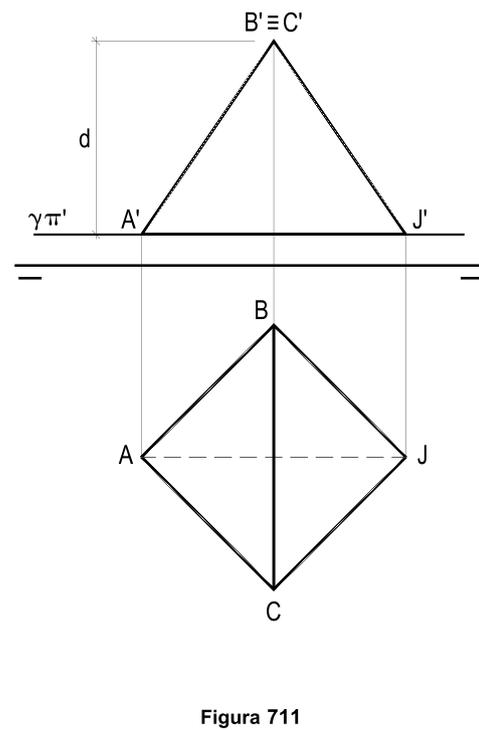
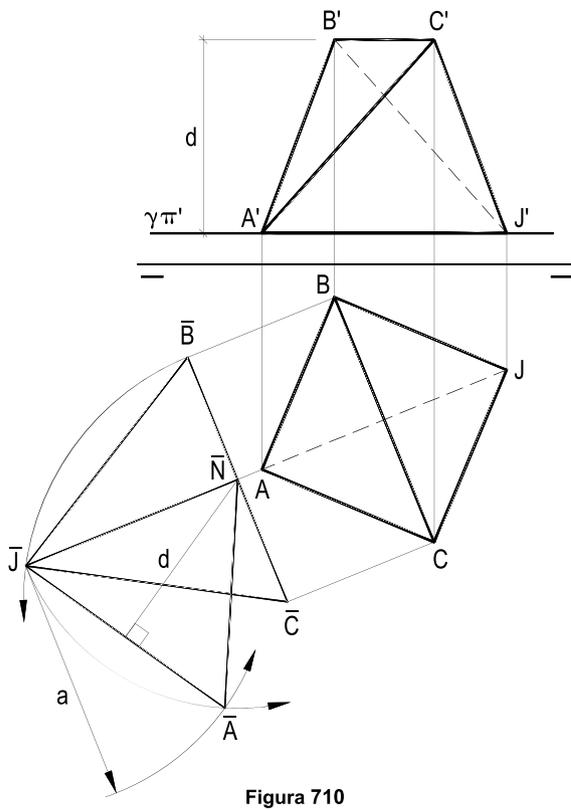
Além disso, cabe ressaltar que, nesta última posição (Figura 709), o ângulo, em projeção vertical,  $J'B'A'$  mede a V.G. do ângulo diedro do tetraedro regular (ver Figura 705) e que, também nesta projeção vertical, obtém-se a V.G. da distância entre duas arestas opostas do sólido (ver Figura 705), que é a distância do ponto  $B' \equiv C'$  à reta  $J'A'$  (Figura 709).

Passemos a examinar outra possibilidade, admitindo paralelas a ( $\pi$ ) duas arestas opostas (J)(A) e (B)(C) do tetraedro regular (J)–(A)(B)(C) que, anteriormente vimos (Figura 705), são ortogonais.

Neste caso, a perpendicular (M)(N) a elas (Figura 706) há de assumir a posição vertical, o que obriga que o contorno aparente da projeção horizontal do sólido seja um quadrado, cujas diagonais JA e BC mostram a V.G. da aresta do tetraedro (Figuras 710 e 711).

E observe-se que, para a construção das projeções verticais, a distância entre as horizontais (J)(A) e (B)(C) ou, o que é o mesmo, o comprimento da perpendicular comum (M)(N) (ver Figuras 705 e 706), basta determinar a altura (M)(N) do triângulo isósceles (N)(J)(A) (Figura 705), cuja construção vai detalhada na Figura 710, indicada pela letra d.

Fazendo girar a projeção horizontal, da posição genérica inicial (Figura 710) até a particular (Figura 711), em que uma aresta (J)(A) resta fronto-horizontal e a oposta (B)(C) de topo, observa-se que a projeção vertical varia, tendo, na posição genérica, como contorno aparente, um trapézio isósceles (Figura 710), para a particularíssima (Figura 711), de um triângulo isósceles de base J'A'.



Para as visibilidades, foi observado que, em ambas as posições estudadas, a aresta (J)(A) é a de menor cota e que, no caso genérico (Figura 710), (J)(B) é a aresta do menor afastamento.

## 171 – Hexaedro regular

Estudemos inicialmente um hexaedro regular que tenha duas faces opostas (A)(B)(C)(D) e (R)(S)(T)(U) horizontais, projetando-se, por isso, em V.G., sobre  $(\pi)$  e, é claro, coincidentes, por serem verticais as arestas que unem seus vértices respectivos, reduzindo, assim, a projeção a um quadrado igual à face do cubo.

Iniciando com uma posição genérica dessas duas faces em relação a  $(\pi')$ , o que corresponde a um contorno aparente retangular para a projeção vertical, acrescida de duas arestas verticais interiores (Figura 712), procedamos a rotação do sólido em torno de uma das arestas verticais, até que dentro do contorno coincidam aquelas duas arestas interiores, o que ocorre quando todas as faces laterais do cubo se inclinam de  $45^\circ$  em relação a  $(\pi')$  (Figura 713).

Prosseguindo tal rotação, após passar por novas posições genéricas, semelhantes à original, acaba-se por chegar à situação mais particular (Figura 714) em que as faces do sólido são, aos pares, horizontais, frontais e de perfil, o que acarreta que suas projeções sejam dois quadrados iguais às suas faces.

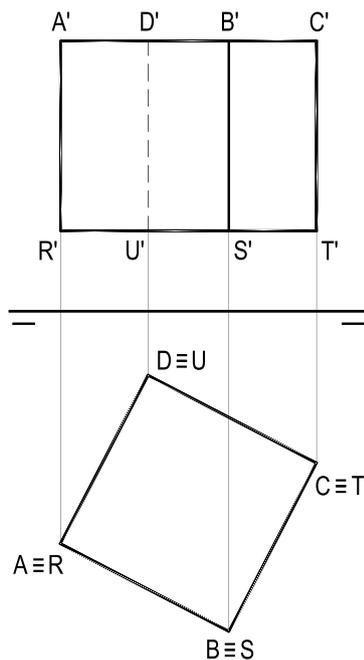


Figura 712

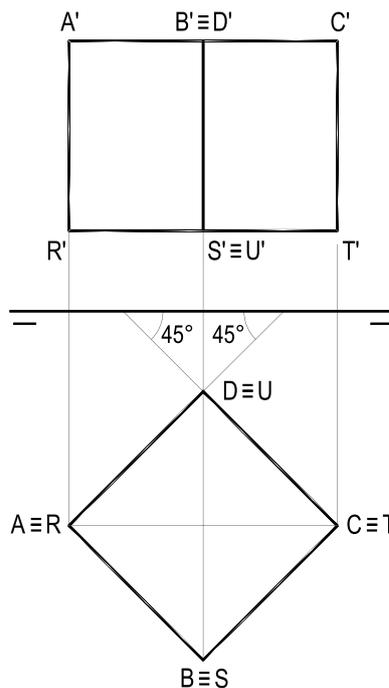


Figura 713

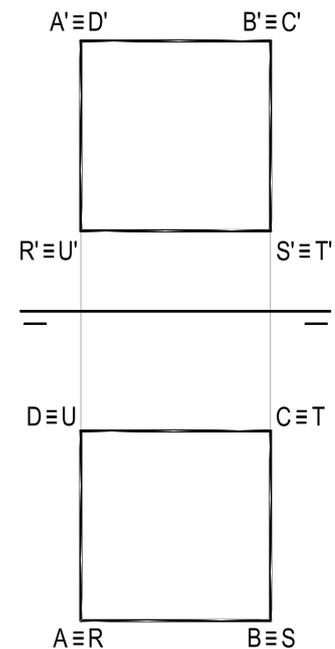


Figura 714

Analisemos, agora, a mais interessante projeção ortogonal de um cubo, aquela que acontece sobre um plano perpendicular a uma de suas diagonais, para concluir, o que se sabe (*Geometria Espacial*, número 111.19), que seu contorno aparente é um hexágono regular.

Iniciemos observando, do cubo(A)(B)(C)(D)–(R)(S)(T)(U), sua diagonal (A)(T) e o plano ( $\pi$ ) a ela perpendicular (Figura 715), bem como o triângulo equilátero (C)(S)(U) formado pelos vértices das arestas que convergem no vértice (T).

Porque, tanto o vértice (T) quanto o (A) equidistam de (C), de (S) e de (U), a diagonal (A)(T) do cubo é perpendicular ao plano do triângulo (C)(S)(U) e passa pelo seu circuncentro (O) (número 145.3).

Então, estando o triângulo (C)(S)(U) num plano perpendicular à diagonal (A)(T) do cubo, projeta-se em V.G. sobre ( $\pi$ ) e seu circuncentro (O) tem por projeção em ( $\pi$ ) o circuncentro T do triângulo CSU (Figura 715).

Da mesma forma, a projeção do triângulo equilátero (R)(D)(B) sobre ( $\pi$ ) far-se-á em V.G. e a projeção do circuncentro ( $O_1$ ) será o circuncentro  $A \equiv T$  do triângulo RDB (Figura 716).

Então, as projeções, ambas em V.G., dos triângulos (C)(S)(U) e (R)(D)(B) sobre ( $\pi$ ) serão iguais, com o mesmo circuncentro  $A \equiv T$  (Figura 716) e com lados respectivamente paralelos, sendo, por isso, seus seis vértices, os próprios vértices do hexágono regular CBSRUD (Figura 716), contorno aparente do cubo em apreciação.

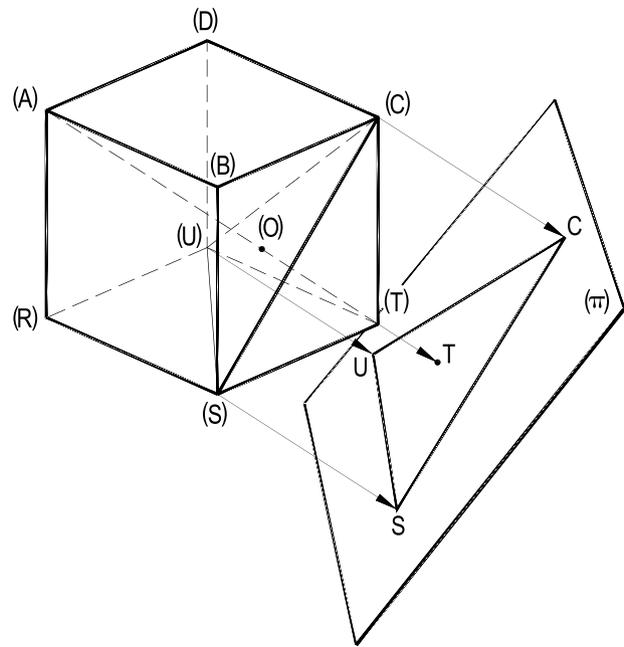


Figura 715

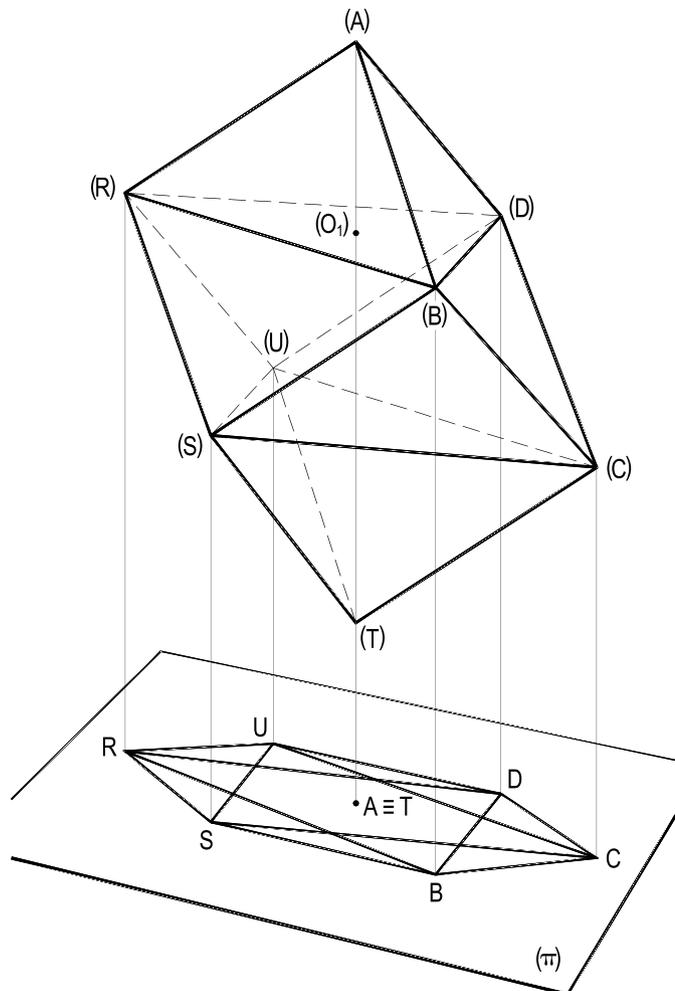


Figura 716

Estudemos, então, as projeções de um cubo (A)(B)(C)(D) – (R)(S)(T)(U), que tenha sua diagonal (A)(T) vertical, em duas posições em relação a ( $\pi'$ ), a primeira (Figura 717), genérica, e a segunda (Figura 718), particular, por ter seus pares de faces opostas igualmente inclinadas em relação a ( $\pi'$ ), o que resulta em que o contorno aparente da projeção vertical passe a ser um hexágono equiângulo.

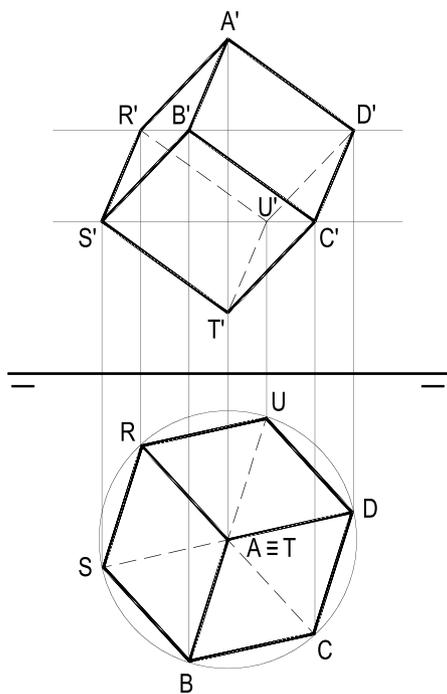


Figura 717

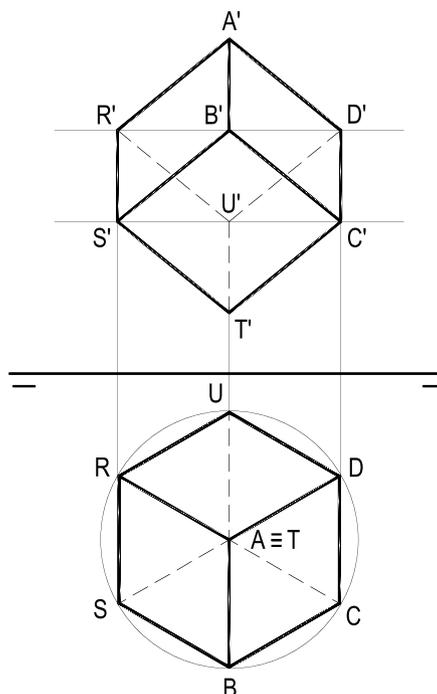


Figura 718

Como o valor habitualmente dado, nestes casos, é o da diagonal vertical (A)(T) = D, em V.G. na projeção vertical A'T' (Figuras 717 e 718), para determinar o valor  $r$  do raio do círculo circunscrito ao hexágono regular, contorno da projeção horizontal, deve-se construir, à parte, o triângulo retângulo (A)(C)(T) (Figuras 719 e 720), em que  $r$  é a altura relativa a um dos pontos terços da hipotenusa (A)(T).

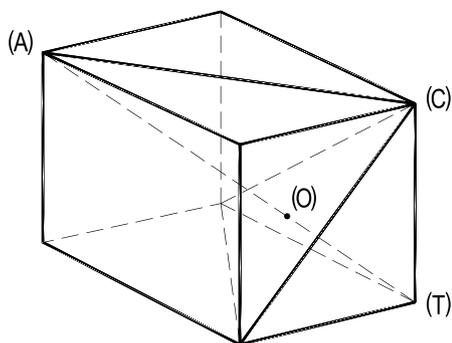


Figura 719

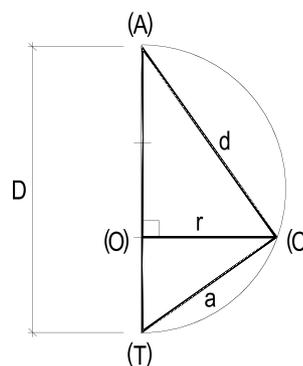


Figura 720

## 172 – Octaedro regular

A posição mais habitual, em problemas correntes, é a que corresponde a um octaedro regular (J)–(A)(B)(C)(D)–(S), que tenha uma diagonal (J)(S) vertical, o que implica em que o contorno aparente de sua projeção horizontal seja um quadrado ABCD, V.G. da seção diagonal (A)(B)(C)(D) que, por pertencer a um plano perpendicular a (J)(S) (*Geometria Espacial*, número 114.5), tem de ser horizontal.

Apreciemos, então, como variam suas projeções verticais, desde uma situação genérica (Figura 721) até as particulares, em que os planos diagonais que contenham (J)(S) sejam um frontal e o outro de perfil (Figura 722), ou se inclinem igualmente em relação a ( $\pi'$ ) (Figura 723).

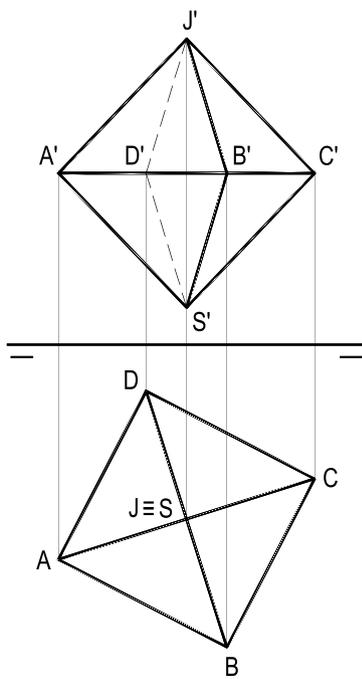


Figura 721

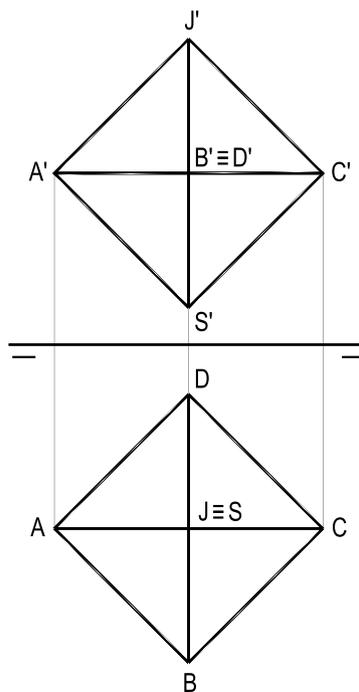


Figura 722

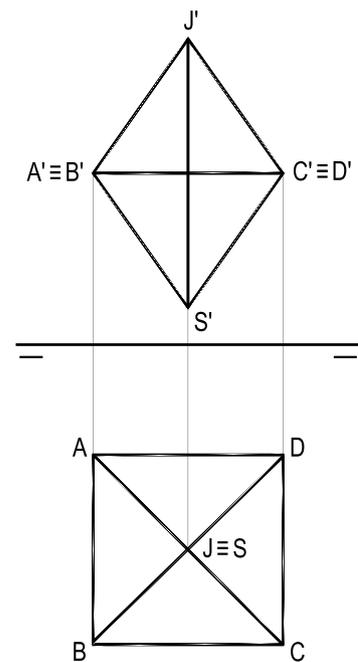


Figura 723

As projeções verticais têm, por contornos, losangos, em que uma diagonal  $J'S'$  é a própria V.G. da diagonal do sólido e a outra varia de comprimento, conforme as inclinações das faces do sólido, em relação a ( $\pi'$ ).

Assim, esta segunda diagonal  $A'C'$  alcança seu comprimento máximo quando (Figura 722) todas as faces do sólido se inclinam igualmente em relação a ( $\pi'$ ), tornando iguais as duas projeções do octaedro.

O valor mínimo dessa segunda diagonal, igual à própria aresta do sólido, acontece quando a seção diagonal (A)(B)(C)(D) chega a ter duas arestas fronto-horizontais e duas de topo (Figura 723).

Passemos agora a analisar as projeções de um octaedro regular (J)–(A)(B)(C)(D)–(S) que tenha duas arestas (A)(B) e (C)(D) verticais.

Já sabemos (*Geometria Espacial*, número 114.30) que o contorno de sua projeção horizontal é um losango, cujas diagonais são respectivamente iguais à diagonal e à aresta do sólido.

Vejamos o que ocorre com as projeções verticais do octaedro, quando se faz girar o sólido, partindo da posição genérica apresentada na Figura 724, em que o plano diagonal (A)(B)(C)(D), então vertical, produz uma projeção retangular  $A'B'C'D'$ , levando o contorno da projeção vertical a tomar forma hexagonal.

As duas posições seguintes são ambas particulares: na Figura 725, o plano diagonal (A)(B)(C)(D) é de perfil, tornando iguais as duas projeções do octaedro, o que é autoexplicável pelo fato de, então, haver um par de arestas (A)(B) e (C)(D) perpendiculares a  $(\pi)$  e outro par (A)(D) e (B)(C) perpendicular a  $(\pi')$ , duplicando a particularidade ora em estudo.

Por fim, na Figura 726, em que o plano diagonal (A)(B)(C)(D) assume a posição frontal, o contorno  $A'B'C'D'$  da projeção vertical é o quadrado, V.G. dessa seção, repetindo, assim, com troca das duas projeções, o apresentado na Figura 723, o que se explica por ter a diagonal (J)(S), agora, assumido a posição de topo, ao invés daquela vertical da Figura 723.

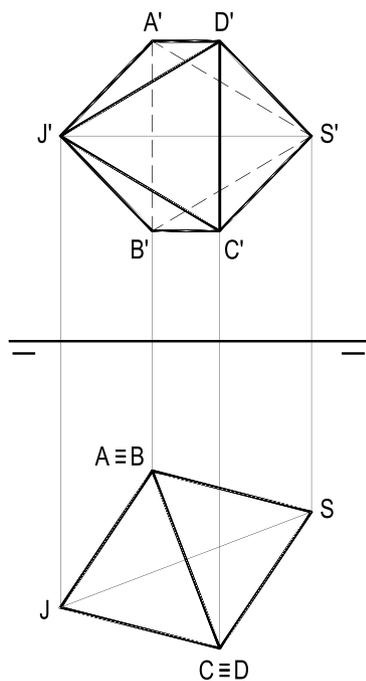


Figura 724

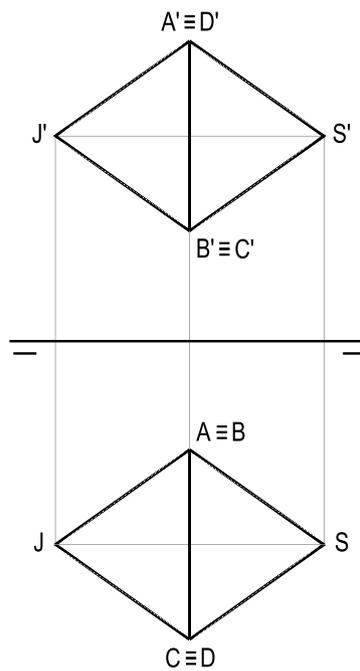


Figura 725

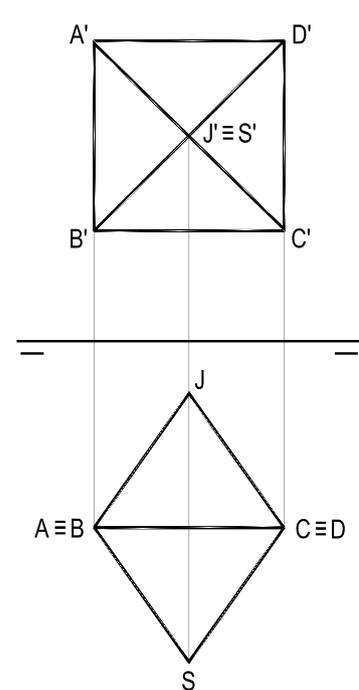


Figura 726

Por último, analisemos o que ocorre com as projeções de um octaedro regular (J)–(A)(B)(C)(D)–(S) quando duas faces opostas (J)(A)(B) e (S)(C)(D) são paralelas a  $(\pi)$ , estudando três posições do sólido, uma primeira genérica em relação a  $(\pi')$  (Figura 727) e outras duas particulares, a primeira delas (Figura 728) contando com duas arestas (A)(B) e (C)(D) fronto-horizontais e duas (B)(C) e (A)(D), além da diagonal (J)(S), de perfil, o que proporciona uma projeção vertical com contorno  $A'B'C'D'$  retangular, que tem por dimensões os valores  $a$  e  $d$ , respectivamente, da aresta e da distância entre as faces do sólido.

A segunda posição particular (Figura 729) conta com o plano diagonal (A)(B)(C)(D) de topo e o diagonal (J)(S) frontal, levando o contorno da projeção vertical a assumir a forma de um losango, cujos lados são iguais às alturas das faces do octaedro. Tal projeção vertical conta ainda com uma diagonal do losango do contorno correspondente à diagonal daquele quadrado de topo.

Para as construções dessas três últimas situações, são, habitualmente, dadas a posição de uma das arestas e, naturalmente, seu valor real, com o que se obtém prontamente o valor da diagonal do sólido.

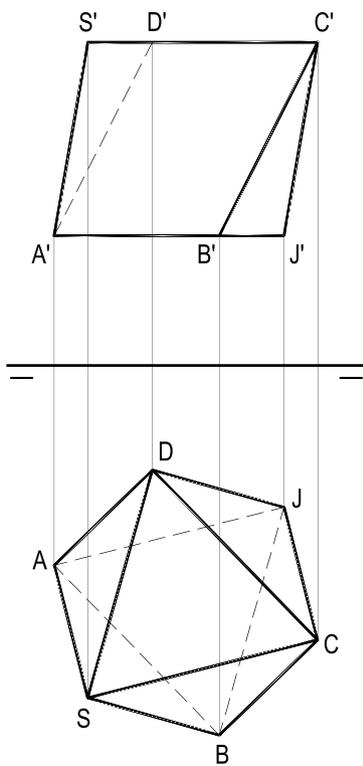


Figura 727

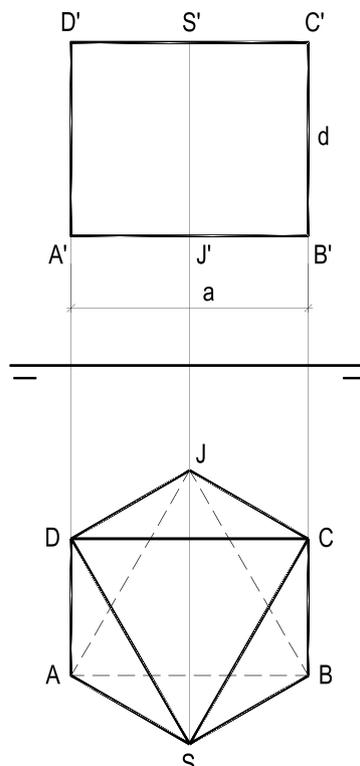


Figura 728

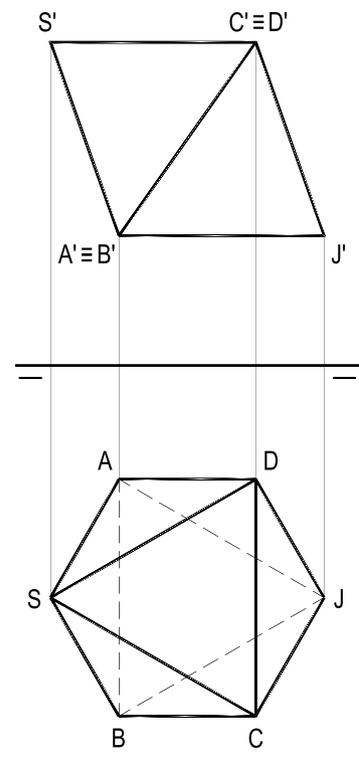


Figura 729

# CAPÍTULO XV

## CONSTRUÇÃO DE POLIEDROS

**173** – O capítulo anterior dedicou atenção às principais propriedades dos poliedros convexos, em geral, e, particularmente, aos regulares, além de detalhar os princípios que regem a visibilidade, em projeção, desses sólidos, para a complementação de suas épuras.

Nesta parte, passaremos a propor construções de poliedros que atendam a conjuntos de condições, num nível superior de complexidade geométrica, como adiante se verá.

### 174 – Construção de poliedros

Vejamos, então, os exemplos escolhidos.

174.1 – Dadas as projeções  $A'$ ,  $A$  e  $B'$  dos vértices  $(A)$  e  $(B)$  do tetraedro regular  $(J)-(A)(B)(C)$ , situado no primeiro diedro, pede-se construir suas projeções, sabendo que a face  $(A)(B)(C)$  é coplanar com a linha de terra. Considerar transparente o plano desta face.

Solução: Já que tem a face  $(A)(B)(C)$  num plano pertencente à linha de terra, a altura  $(J)(O)$  do tetraedro, relativa a essa face, tem de ser de perfil (Figura 730).

Assim, completando as projeções da aresta  $(A)(B)$ , necessariamente concorrente com  $(\pi'\pi)$ , num ponto  $(P)$ , basta rebater o plano  $(\pi'\pi)-(B)$ , sobre um dos planos de projeção, para construir a V.G. da face  $(A)(B)(C)$  (Figura 731) e determinar seu circuncentro  $(O)$ , pé da altura  $(J)(O)$ .

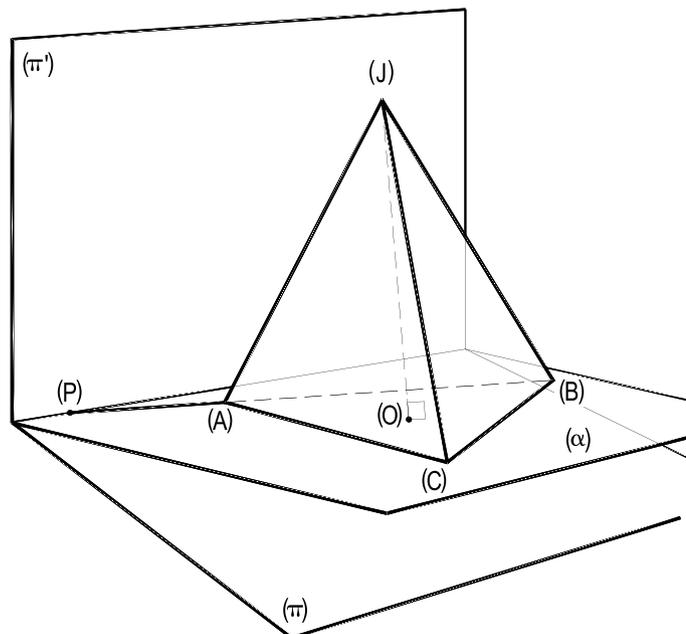


Figura 730



174.2 – Dadas as projeções do segmento fronto-horizontal (A)(B), pede-se construir o tetraedro regular (J)–(A)(B)(C), situado no primeiro diedro, sabendo que o vértice (C) pertence a ( $\pi$ ).

Solução: Como o vértice (C) há de pertencer ao plano de perfil, mediador da aresta (A)(B), um rebatimento de um corte de perfil (Figura 732) determinará a posição de (C), a partir da obtenção da V.G.  $h$  da altura da face do sólido, o que se consegue, prontamente, pelo conhecimento do valor  $a$  de sua aresta.

No corte de perfil, a mesma construção geométrica utilizada no exemplo anterior fornecerá a V.G. da altura  $H$  do tetraedro e, por consequência, as projeções do quarto vértice (J) do sólido.

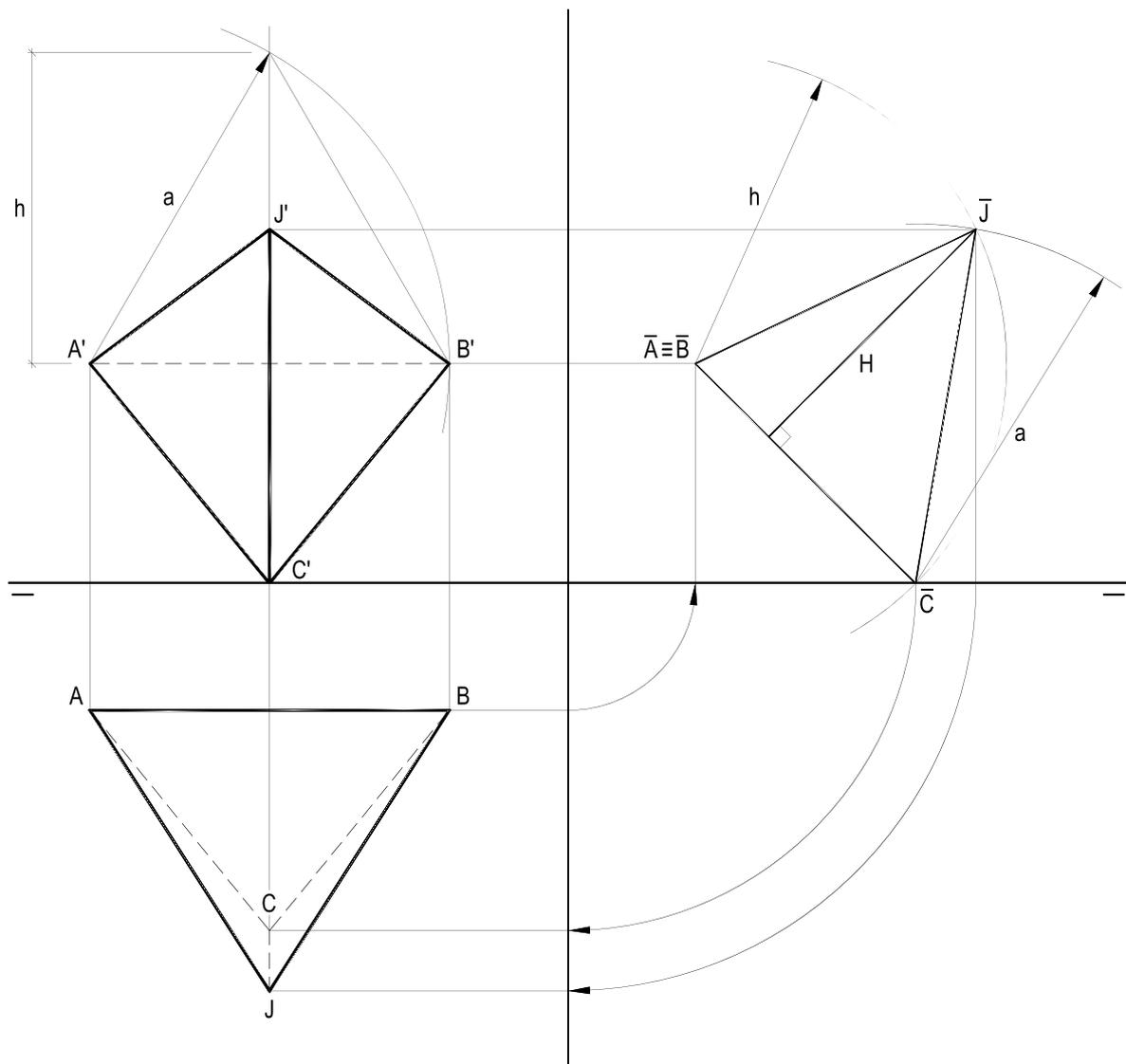


Figura 732

174.3 – Construir as projeções do tetraedro regular (J)–(A)(B)(C), assente pela face (A)(B)(C) no plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, sabendo ser mínima a distância do vértice (A) ao traço de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'$ ). Dadas as projeções de (J).

Considerar transparente o plano ( $\alpha$ ) e o vértice (B) de maior cota do sólido.

Solução: A partir de (J), traça-se a perpendicular (p) ao plano ( $\alpha$ ) e determina-se seu traço (O), com este plano, localizando, assim, o centro (O) da face (A)(B)(C) procurada.

Obtido (O), uma simples mudança de ( $\pi$ ) proporciona a V.G. da altura  $h$  do sólido (Figura 734), pela projeção  $J_1O_1$  de (J)(O), agora tornada horizontal.

A partir do valor da V.G. da altura  $h$  do tetraedro, é simples obter o valor do raio  $r$  do círculo circunscrito à face (A)(B)(C), já que se sabe que  $r = \frac{h}{\sqrt{2}}$  (*Geometria Espacial*, número 106.1), pela simples construção do triângulo retângulo isósceles de hipotenusa  $J_1O_1$  (Figura 734).

Rebate-se, então, o plano ( $\alpha$ ), para a construção em V.G. do triângulo (A)(B)(C), em seu rebatimento  $(A)_1(B)_1(C)_1$ , localizando o vértice (A) sobre a reta que une o circuncentro (O) ao traço (M) de ( $\alpha$ ) com à linha de terra (Figuras 733 e 734), para que seja mínima a distância de (A) a (M).

Alçados os vértices desse triângulo (A)(B)(C), fica imediato completar as projeções do tetraedro (Figura 734).

Quanto à visibilidade, por estar à frente e mais alta que o vértice dado (J), a face (A)(B)(C) resta visível nas duas projeções.

Aliás, por ter sido considerado transparente o plano ( $\alpha$ ), todas as arestas do sólido ficam visíveis, em *épura*, nas duas projeções (Figura 734). O vértice (B), como imposto, é o de maior cota dentre todos do tetraedro.

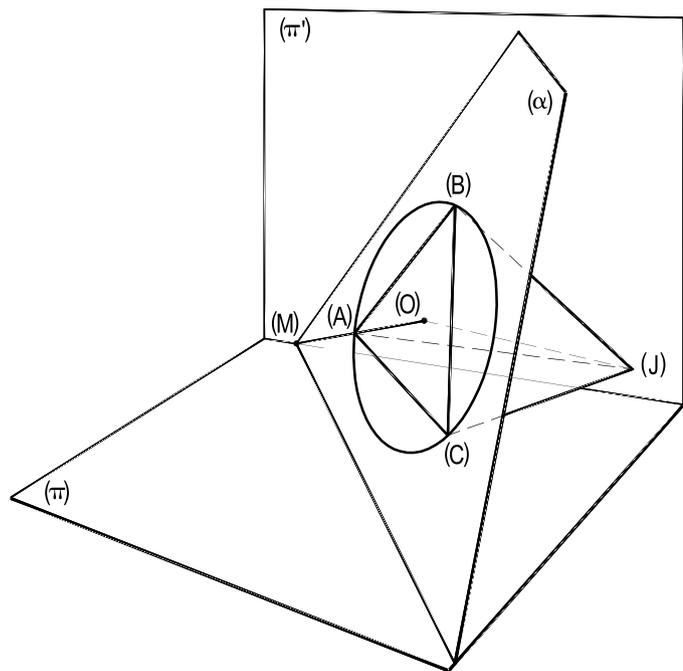


Figura 733

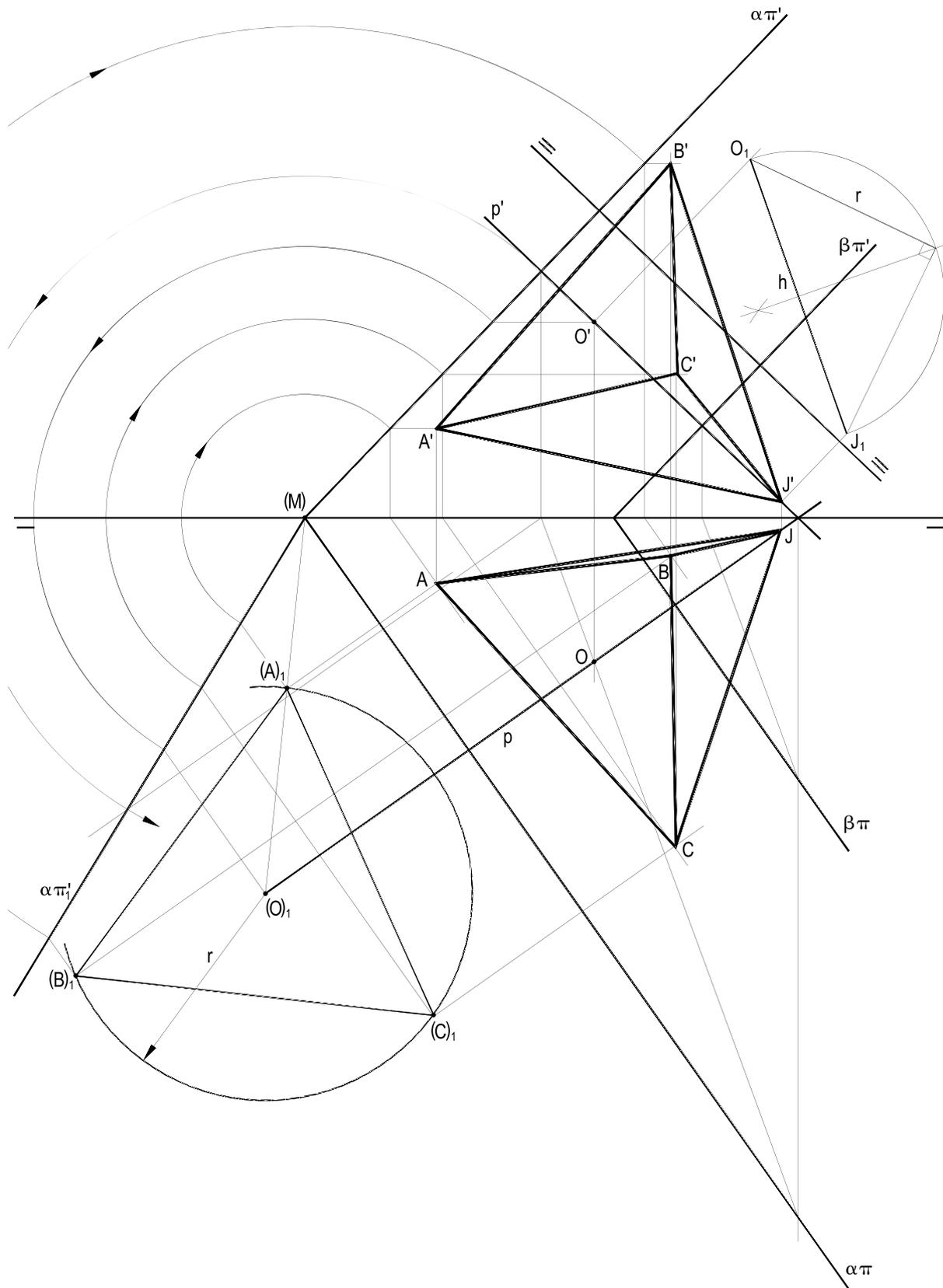


Figura 734

174.4 – Dadas as duas projeções da semirreta (Jx) e o traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano ( $\alpha$ ), paralelo à linha de terra, e sabendo que o tetraedro regular (J) – (A)(B)(C) tem a aresta (J)(A) sobre a semirreta dada e a aresta oposta (B)(C) pertencendo ao plano ( $\alpha$ ), pede-se construir o segundo traço  $\alpha\pi$  desse plano e as projeções do sólido.

Solução: Sobre duas arestas opostas de um tetraedro regular, sabe-se (número 170) que são ortogonais e que a reta formada por seus pontos médios é a perpendicular comum a elas.

Sabe-se ainda (*Geometria Espacial*, número 106.4) que, sendo  $d$  a distância (M)(N) entre duas arestas opostas de um tetraedro regular (J) – (A)(B)(C), cujas arestas medem  $a$ , existe a relação  $a = d\sqrt{2}$ , que significa ser  $a$  a diagonal de um quadrado, cujo lado mede  $d$ .

Ora, se o plano ( $\alpha$ ) deve conter a aresta (B)(C), ele tem de ser paralelo à aresta oposta (J)(A), o que, então, o define, pelas retas  $\alpha\pi'$  dada, e (r), concorrente com  $\alpha\pi'$  e paralela a (Jx), permitindo, facilmente, a determinação de seu segundo traço  $\alpha\pi$  (Figura 736).

Como a distância (M)(N) há de ser igual à distância (J)(L) do vértice (J) ao plano ( $\alpha$ ) (Figura 735), basta obter sua V.G. (d) (Figura 736) para, mediante simples construção geométrica, chegar ao valor real  $a$  da aresta do sólido (Figura 736).

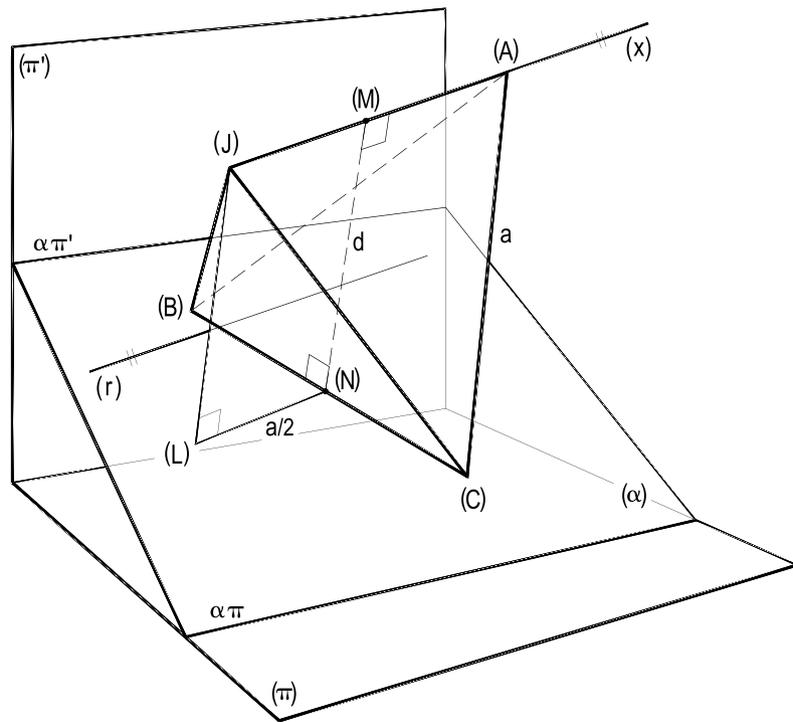


Figura 735

Com isso, rebatido ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ), por exemplo, pode-se construir o segmento  $(L)_1(N)_1 = (J)(M) = \frac{a}{2}$ , sobre uma reta do plano ( $\alpha$ ) paralela a (Jx) (Figuras 735 e 736). E, obtido o ponto (N), traça-se, em ( $\alpha$ ), com direção perpendicular à de (r), a reta que será suporte da aresta (B)(C).

Aplica-se, então, sobre esta reta, num sentido e no outro, a partir de  $(N)_1$ , o valor  $\frac{a}{2}$ , da metade da aresta, construída na vista de perfil, obtendo-se os rebatimentos  $(B)_1$  e  $(C)_1$  dos vértices (B) e (C).

Basta, enfim, marcar, sobre a semirreta dada, o segmento  $(J)(A)$  igual ao valor  $a$  da aresta, para completar as projeções do sólido (Figura 736).

Convém observar que as escolhas das posições dos vértices (B) e (C) poderiam ter sido permutadas, por não ter o enunciado privilegiado tal ordem.

Para a visibilidade, em épora, observe-se que  $(B)(C)$  é a aresta de menor afastamento e  $(J)(C)$  a de menor cota (Figura 736).

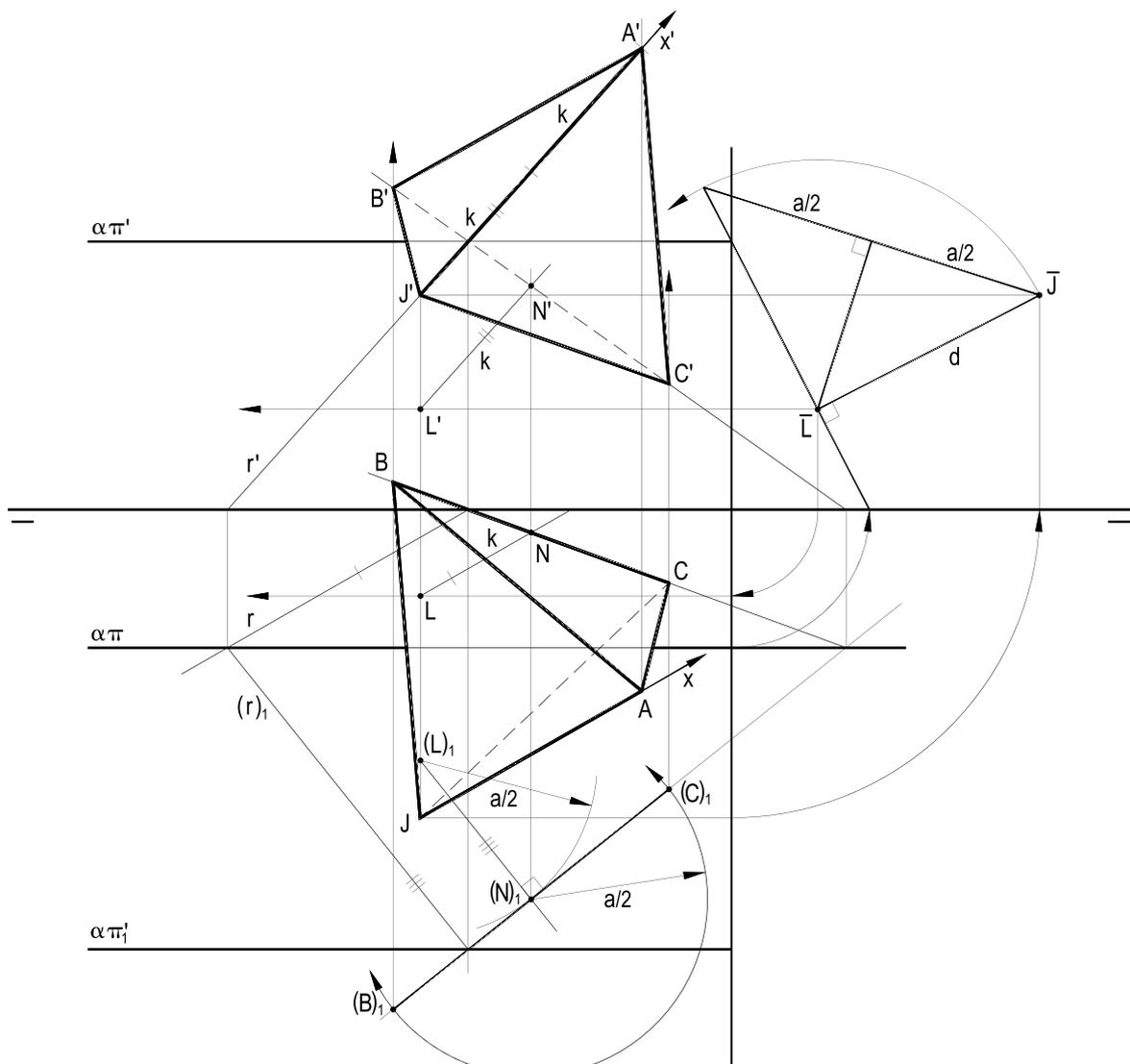


Figura 736

174.5 – Três tetraedros regulares iguais (J) – (A)(B)(C), (S) – (E)(F)(G) e (V) – (P)(Q)(R) têm suas arestas (J)(A), (S)(E) e (V)(P) de topo, todas dadas por suas projeções.

Pede-se construir as projeções dos três sólidos, sabendo que, no primeiro, a aresta (B)(C) forma  $60^\circ$  com  $(\pi)$ , que, no segundo, a aresta (F)(G) é paralela a  $(\pi)$  e que, no terceiro, a aresta (Q)(R) é perpendicular a  $(\pi)$ .

Basta apresentar uma solução para cada tetraedro.

Solução: Sabe-se (número 170) que duas arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais e que cada uma delas pertence ao plano mediador da outra, o que implica, para o caso em estudo, que, sendo uma aresta de topo, sua oposta deve pertencer a um plano frontal, o mediador da primeira. E que, por isso, há de ser frontal, fronto-horizontal ou vertical, projetando-se, assim, em V.G. sobre  $(\pi')$ .

No caso mais geral em que o tetraedro regular (J) – (A)(B)(C), com (J)(A) de topo, tem (B)(C) inclinada em relação a  $(\pi)$ , o ângulo que ela forma com este plano de projeção vem em V.G. em  $(\pi')$  (Figura 737).

Além disso, sabe-se, também (número 170), que a seção (M)(B)(C) que o plano mediador de (J)(A) produz no sólido é um triângulo isósceles, em que os lados iguais (M)(B) e (M)(C) medem as alturas  $h$  das faces do sólido (Figura 737), o que proporciona simples construção geométrica, apresentada na Figura 738, para a obtenção da distância  $d$  entre duas arestas opostas, que será utilizada em épura (Figura 739) para definir a posição da aresta oposta à de topo, por sua V.G. em projeção vertical.

Cabe observar que essa distância  $d$  poderia, também, ser obtida através da construção apresentada no exemplo anterior, na Figura 736.

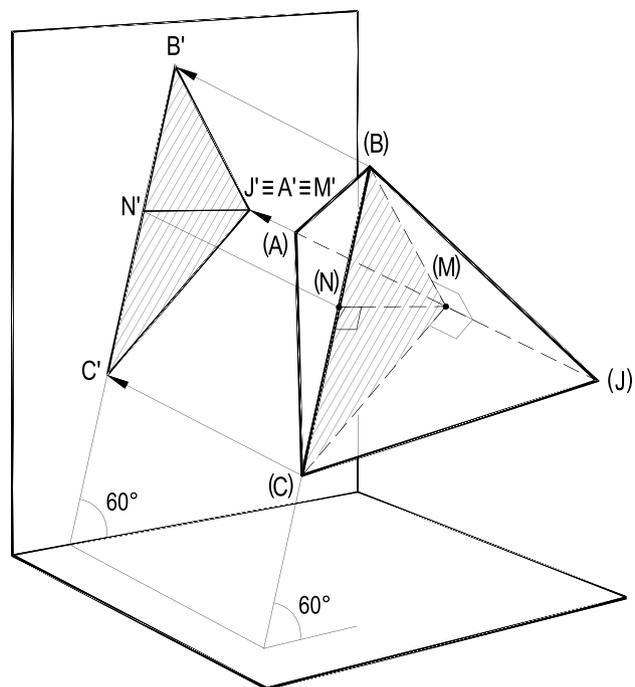


Figura 737

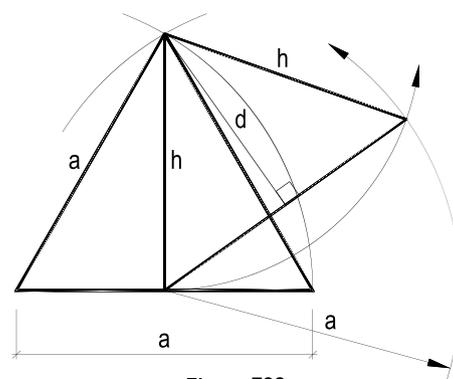


Figura 738

Assim, realizada a construção detalhada na Figura 738, para as arestas – iguais – dadas, (J)(A), (S)(E) e (V)(P), todas em V.G. nas suas projeções horizontais, obtém-se o valor  $d$  da distância entre duas arestas opostas, o que permite construir as projeções verticais dos sólidos (Figura 739).

Note-se que, para o primeiro caso, há quatro soluções, correspondentes, em projeção vertical, às quatro tangentes ao círculo de centro  $J' \equiv A'$  e raio  $d$ , inclinadas de  $60^\circ$  em relação à linha de terra, mas apenas duas para cada um dos outros dois casos – as duas tangentes paralelas ou as duas perpendiculares à linha de terra, respectivamente, sempre nas projeções verticais  $F'G'$  e  $Q'R'$  (Figura 739).

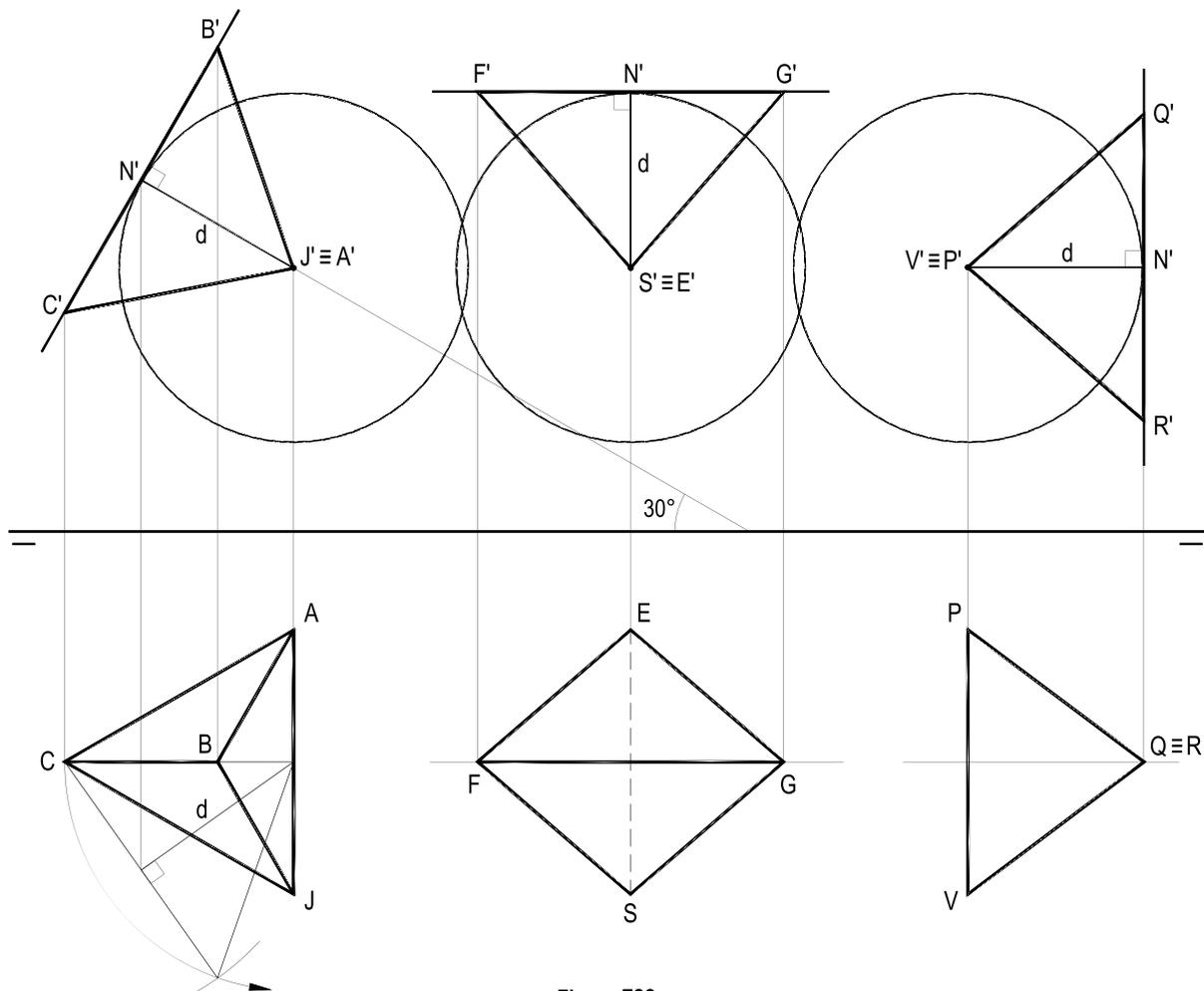


Figura 739

Apenas a projeção horizontal SE do segundo tetraedro resta invisível, por ser a de menor cota, na posição escolhida.

Tal como proposto no enunciado, foi apresentada apenas uma solução da questão, para cada uma das três posições propostas.

174.6 – Um tetraedro regular (J) – (A)(B)(C) está assente por sua face (A)(B)(C) num plano horizontal ( $\alpha$ ), dado por seu traço vertical  $\alpha\pi'$ , e tem seu vértice (J) acima desse plano.

O tetraedro é seccionado por quatro planos, que o atingem nos pontos terços de suas arestas, cada plano cortando as três arestas que convergem em cada vértice do tetraedro.

Sendo dada a projeção horizontal BC da aresta (B)(C) do tetraedro e sabendo que as projeções do sólido não se sobrepõem, pede-se construir as projeções do octaedro resultante no sólido dado, após a retirada dos quatro tetraedros provenientes daqueles seccionamentos.

Solução: Os quatro planos secantes destacam, do tetraedro dado (J) – (A)(B)(C), quatro outros tetraedros regulares de vértices (J), (A), (B) e (C), todos com arestas iguais à terça parte da aresta do dado.

Assim, o sólido restante, após a retirada desses quatro tetraedros, é um octaedro que possui quatro faces hexagonais regulares e outras quatro triangulares, equiláteras (Figura 740).

Em épura, inicia-se por construir, em V.G., a face (A)(B)(C), deixando o vértice (A) com maior afastamento para evitar a sobreposição das projeções do tetraedro original (Figura 741).

A seguir, determina-se a V.G.  $h$  da altura do sólido, mediante simples construção do triângulo retângulo  $\bar{O} \bar{B} \bar{J}$  (Figura 741), para aplicá-la, também em V.G., na projeção vertical do sólido, definindo a projeção vertical  $J'$  de seu vértice (J).

Por último, divide-se, em três partes iguais, cada aresta do tetraedro (J) – (A)(B)(C), em cada projeção, resultando o octaedro pedido.

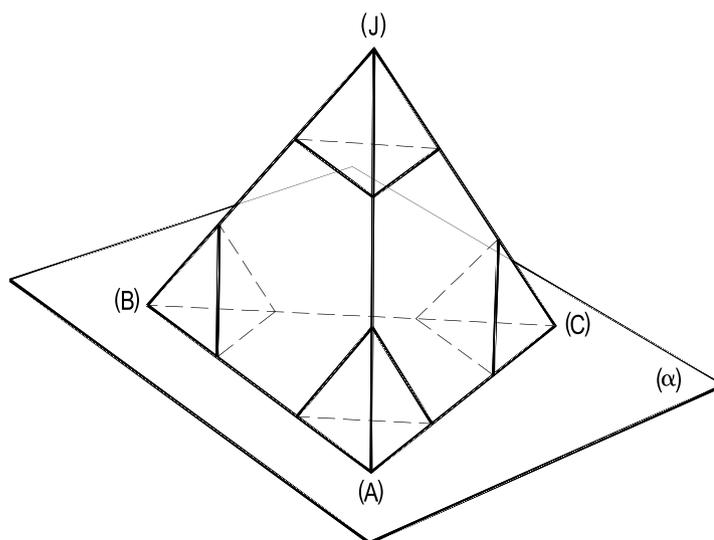


Figura 740

Observe-se que, na épura (Figura 741), não foi incluída a linha de terra, o que não trouxe qualquer dificuldade à resolução da questão.

E que, para atender à não sobreposição das projeções do tetraedro (J) – (A)(B)(C), o problema apresenta apenas uma solução (Figura 741).

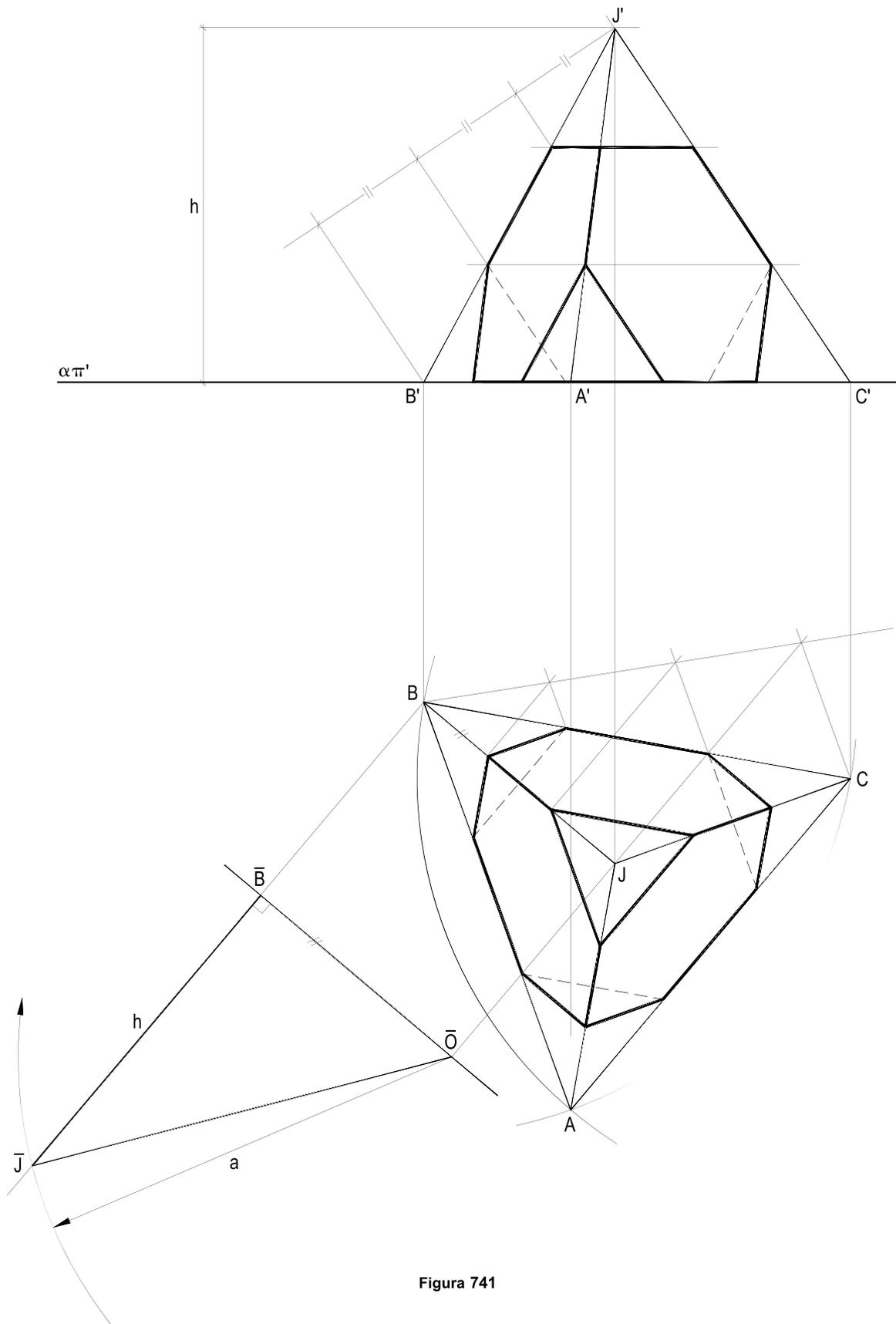


Figura 741

174.7 – Um tronco de pirâmide regular de segunda espécie é formado por dois tetraedros regulares  $(J) - (A)(B)(C)$  e  $(J) - (\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$ , este obtido pelo prolongamento das arestas do primeiro além do vértice  $(J)$ .

Sabendo que os dois tetraedros são iguais e que o primeiro,  $(J) - (A)(B)(C)$ , tem sua aresta  $(A)(B)$  em  $(\pi)$  e sua aresta  $(A)(C)$  em  $(\pi')$ , ficando o sólido no primeiro diedro, pede-se construir os traços do plano  $(\alpha)$ , da face  $(A)(B)(C)$ , bem como as projeções do tronco de pirâmide.

Dadas apenas as projeções horizontais dos vértices  $(A)$  e  $(B)$ .

Solução: Porque as arestas  $(A)(B)$  e  $(A)(C)$  do primeiro tetraedro regular pertencem, respectivamente, a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$ , suas projeções  $AB$  e  $A'C'$  hão de estar sobre os traços, de mesmo nome que elas, do plano  $(\alpha)$  dessa face  $(A)(B)(C)$ . E mais,  $(A)$  deverá pertencer à linha de terra.

Assim,  $\alpha\pi \equiv AB$  já é conhecido. Para obter o traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano  $(\alpha)$ , basta, então, iniciar por seu rebatimento sobre  $(\pi)$ , com a simples construção do triângulo equilátero  $(A)_1(B)_1(C)_1$  e, pelo seu alçamento, obter as projeções  $C$  e, em seguida,  $C'$  do vértice  $(C)$ , para, ligando  $A'$  a  $C'$ , conseguir o traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano  $(\alpha)$  (Figura 742).

Alçada a face  $(A)(B)(C)$ , para obter o vértice  $(J)$ , do tetraedro, basta definir, no rebatimento, o circuncentro  $(O)_1$  do triângulo face  $(A)_1(B)_1(C)_1$ , e construir o triângulo retângulo  $(A)_1(O)_1(P)_1$ , reunindo o raio  $r$  do círculo circunscrito à face e a aresta  $a$  do sólido, determinando, assim, sua altura  $h = (O)_1(P)_1$  (Figura 742).

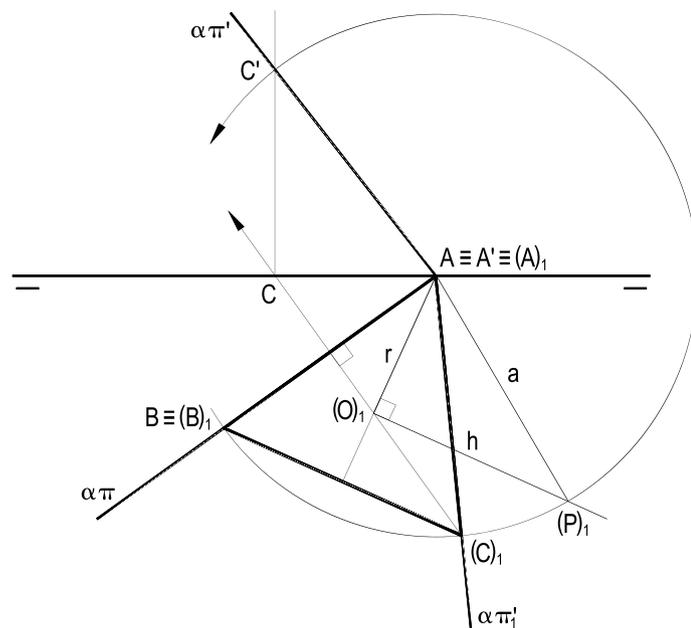


Figura 742

Na épora representativa do problema (Figura 743), a aplicação da V.G. dessa altura, para a obtenção do vértice  $(J)$ , se faz com uma mudança de  $(\pi')$ , levando a perpendicular  $(O)(L)$  a  $(\alpha)$ , suporte da altura do tetraedro, ao novo sistema projetivo (Figura 743) e marcando esse valor  $h$  sobre a nova projeção vertical  $O'J'$ , retornada, a seguir, ao sistema projetivo original.

Por fim, por simetrias dos vértices  $(A)$ ,  $(B)$  e  $(C)$ , em relação a  $(J)$ , consegue-se os vértices  $(\bar{A})$ ,  $(\bar{B})$  e  $(\bar{C})$  do segundo tetraedro regular (Figura 743), para completar a questão.

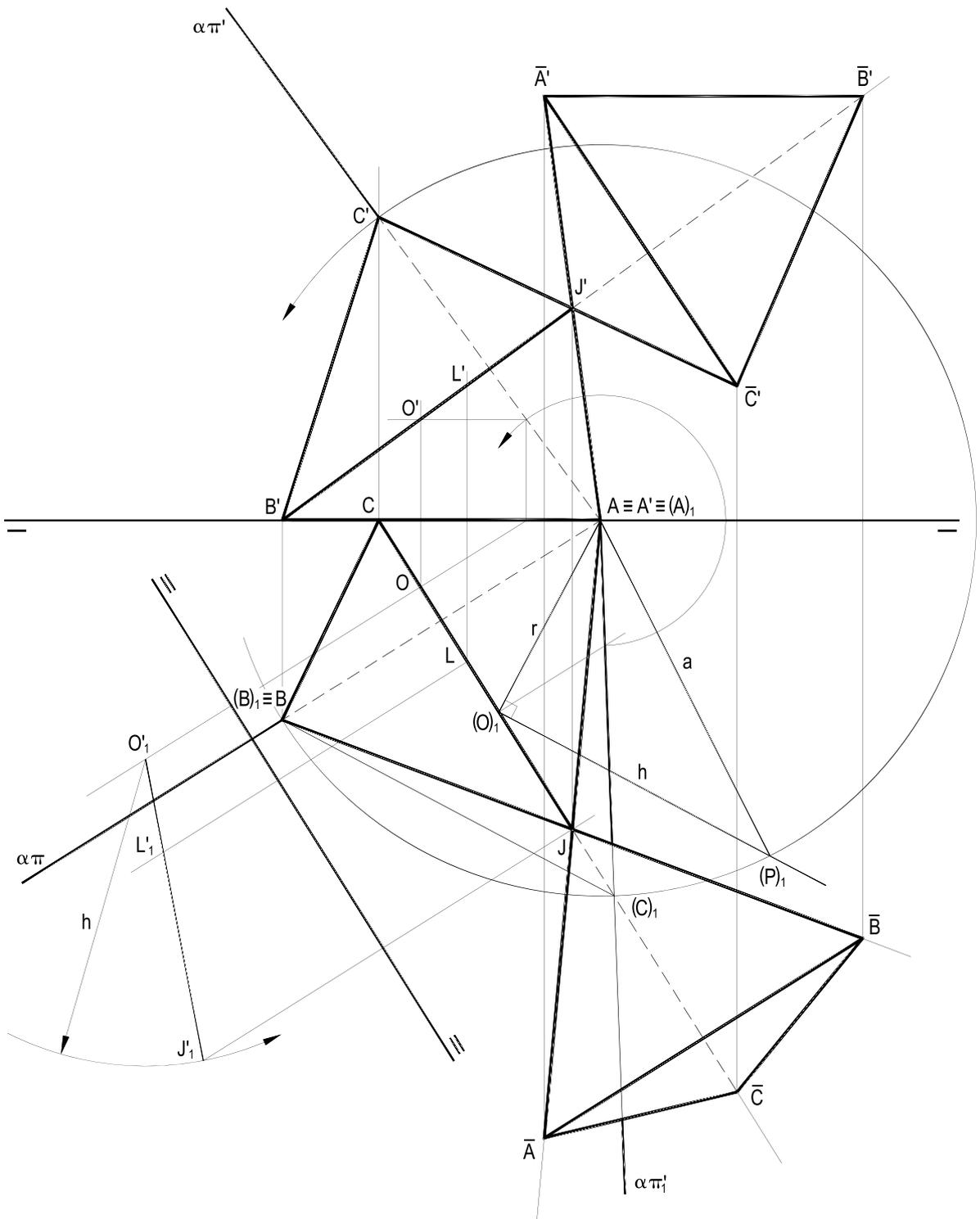


Figura 743

174.8 – Construir as projeções do cubo (A)(B)(C)(D) – (R)(S)(T)(U), situado no primeiro diedro, sabendo que a face (A)(B)(C)(D) pertence ao plano ( $\alpha$ ), (A)(B) em ( $\pi$ ) e (D) em ( $\pi'$ ), sendo dadas as projeções A e B de dois vértices.

Solução: Como no exemplo anterior (número 174.7), inicia-se com o plano ( $\alpha$ ) rebatido sobre ( $\pi$ ) e com a construção, em V.G., do quadrado face (A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub>(C)<sub>1</sub>(D)<sub>1</sub>, pois, sabendo que (D) pertence a ( $\pi'$ ), obtém-se o traço vertical rebatido  $\alpha\pi'_1$ , que contém (D)<sub>1</sub>, para, com seu alçamento, completar as projeções dessa face.

As perpendiculares traçadas por (A),(B),(C) e (D) a ( $\alpha$ ) dão corpo ao sólido e, para conseguir as projeções das arestas laterais, utilizou-se uma mudança de ( $\pi'$ ), levando uma delas, (B)(L), a se tornar frontal, para aplicar, em sua nova projeção vertical, a V.G. da aresta a do cubo, naturalmente igual a AB (Figura 744).

Para a visibilidade, observou-se ser (D) o vértice de menor afastamento e (A)(B) a aresta de menor cota.

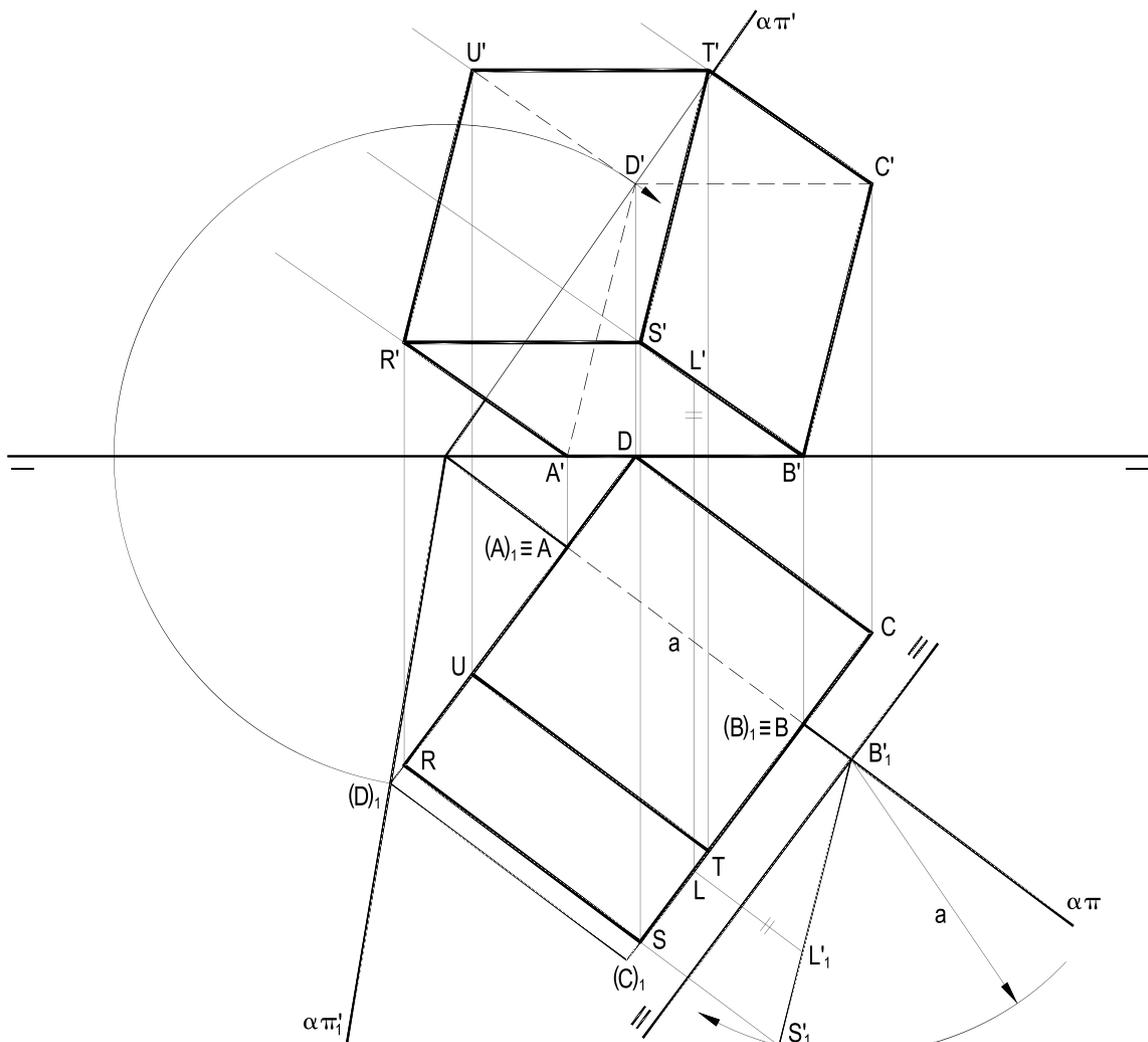


Figura 744

174.9 – Construir as projeções de um cubo assente por uma face no plano ( $\alpha$ ), paralelo à linha de terra, bem como os traços desse plano, sabendo que a reta ( $r$ ), dada por suas projeções, contém uma das diagonais dessa face, que se inscreve num círculo tangente aos dois traços de ( $\alpha$ ).

O sólido está inteiramente no primeiro diedro.

Solução: Pela obtenção dos traços de ( $r$ ) são conduzidos os traços de mesmo nome de ( $\alpha$ ).

E rebatido esse plano sobre ( $\pi$ ) (Figura 745), fica imediata a construção da face a ele pertencente.

Por meio de um corte de perfil, aplicando-se o valor  $a$  da aresta do cubo, agora conhecido, consegue-se definir um vértice ( $J$ ) da face oposta àquela (Figura 745) e, por paralelas, completar as projeções do sólido.

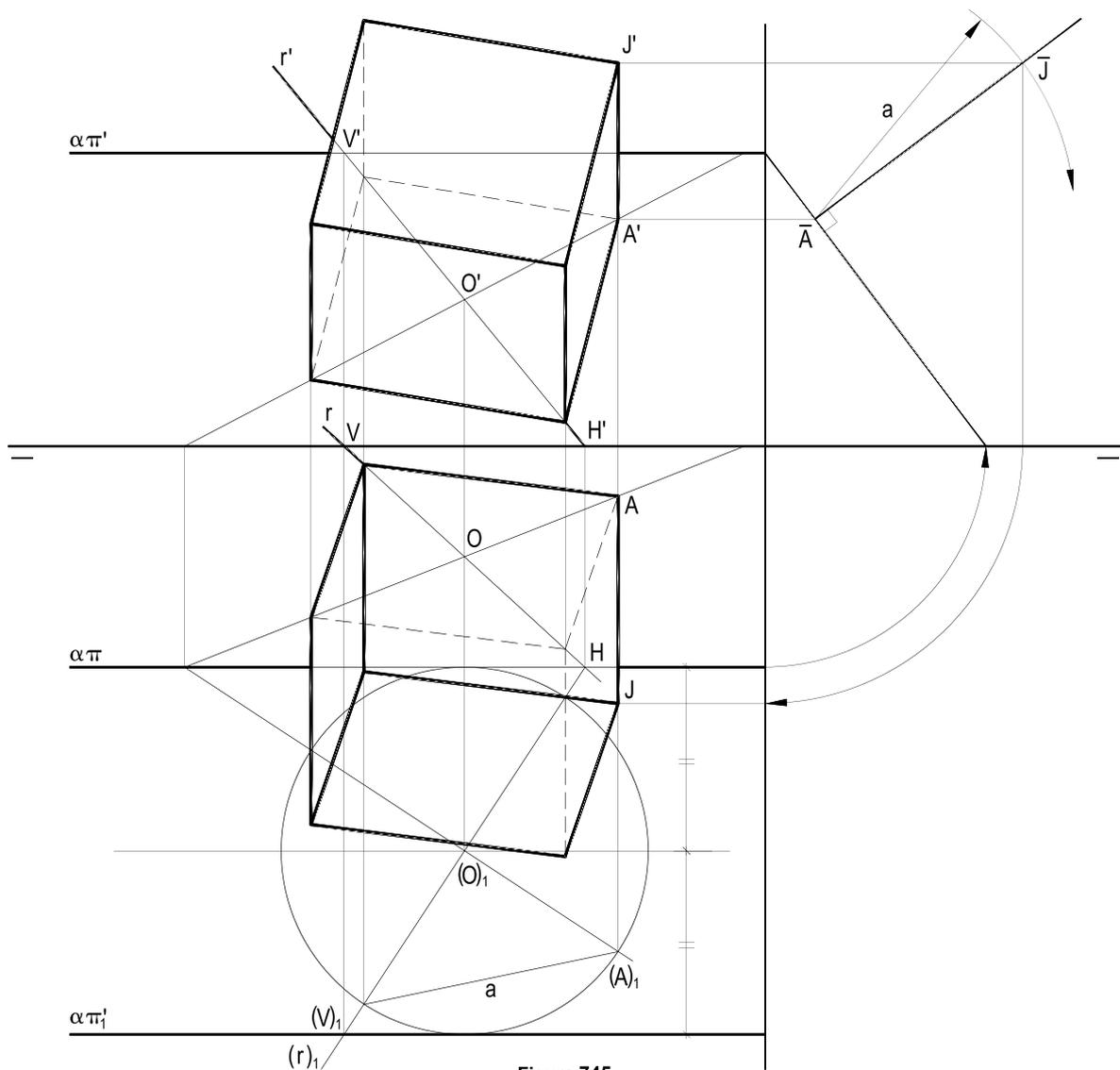


Figura 745

174.10 – Um cubo (A)(B)(C)(D) – (R)(S)(T)(U) é seccionado diagonalmente por um plano ( $\gamma$ ), de topo, que contém duas arestas paralelas, mas não consecutivas (A)(R) e (C)(T).

Pede-se determinar os traços de ( $\gamma$ ) e construir as projeções do sólido, sendo dadas as projeções dos vértices (A) e (R).

Considerar transparente o plano secante ( $\gamma$ ).

Análise: A seção por um plano ( $\gamma$ ) que contenha as arestas (A)(R) e (C)(T) de um cubo (A)(B)(C)(D) – (R)(S)(T)(U) é um retângulo com lados (A)(R) e (A)(C) respectivamente iguais à aresta  $a$  e à diagonal facial  $d$  do sólido (*Geometria Espacial*, número 111.5), entre as quais há a relação  $d = a\sqrt{2}$  (*Geometria Espacial*, número 112.4).

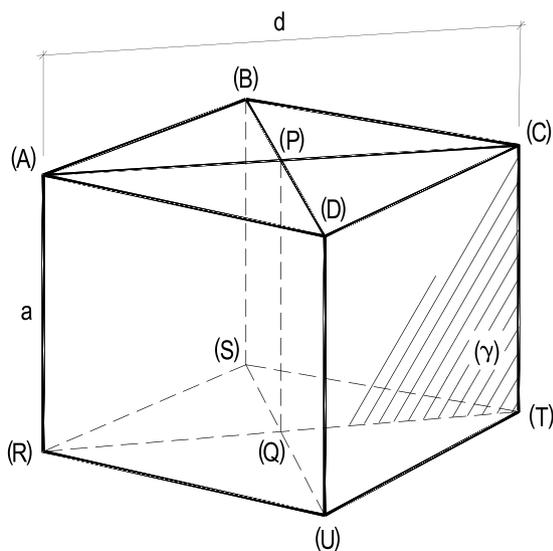


Figura 746

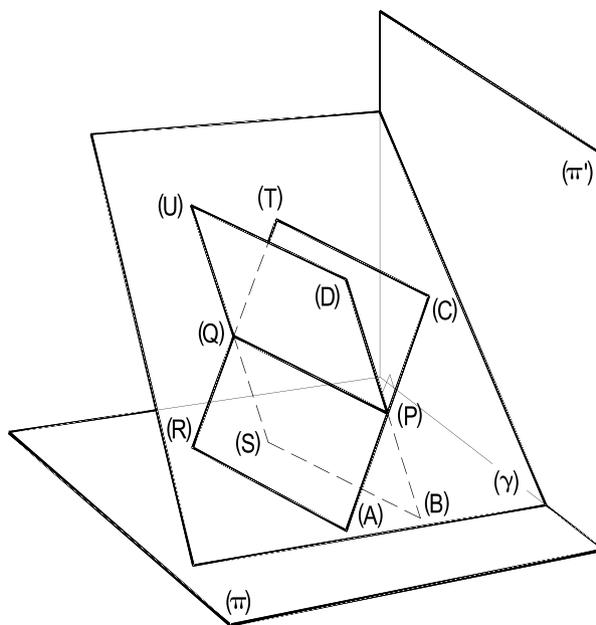


Figura 747

Além disso, o plano diagonal (B)(D)(U)(S), perpendicular a ( $\gamma$ ), produz seção igual à primeira, cortando-se os dois retângulos (A)(R)(T)(C) e (B)(D)(U)(S) segundo o segmento (P)(Q) (Figuras 746 e 747), igual à própria aresta  $a$  do sólido.

Solução: Com as projeções da aresta (A)(R), fica imediato determinar os traços do plano ( $\gamma$ ) que contém a seção (A)(R)(T)(C), por se saber ser ele de topo, o que faz seu traço vertical  $\gamma\pi'$  coincidir com o suporte da projeção vertical  $A'R'$  dessa aresta.

Com o rebatimento de ( $\gamma$ ) sobre ( $\pi$ ), constrói-se a V.G. do retângulo (A)(R)(T)(C), com lados iguais à aresta  $a$  e à diagonal facial  $d = a\sqrt{2}$  do cubo (Figura 748).

Para obter os outros quatro vértices do sólido, basta traçar, pelos pontos (P) e (Q), médios das diagonais faciais (A)(C) e (R)(T), as perpendiculares (p) e (q) a ( $\gamma$ ), que hão de conter as arestas (B)(D) e (S)(U) procuradas (Figuras 746 e 747). Tais retas, por serem perpendiculares a um plano de topo, são frontais, possibilitando, assim, a aplicação, em V.G., em suas projeções verticais, do valor da diagonal facial (d), já determinado, o que proporciona a obtenção dos quatro vértices (B), (D), (U) e (S) procurados (Figura 748).

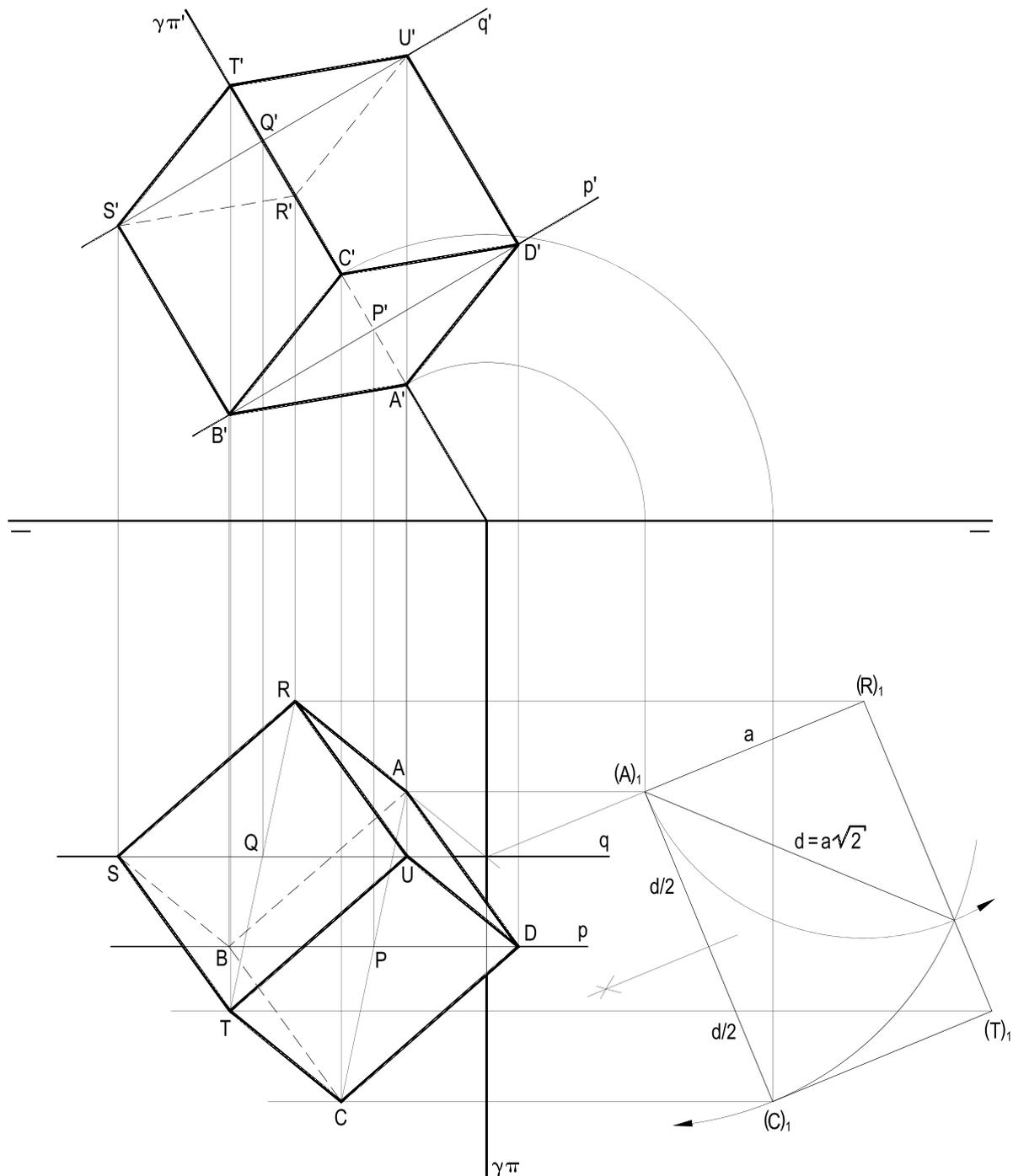


Figura 748

174.11 – Dois cubos iguais, assentes num plano horizontal, cada um por uma de suas faces, são seccionados por oito planos que atingem, cada um, as três arestas que convergem em cada vértice, em seus pontos médios, no primeiro sólido, e em seus pontos terços, no segundo.

Pede-se apresentar as projeções dos dois sólidos resultantes desses cubos, uma vez retiradas todas as pirâmides triangulares formadas com tais seccionamentos, evitando sobreposições das projeções, para maior clareza.

São dadas as projeções de uma aresta  $(A_1)(B_1)$  do primeiro cubo e de uma  $(A_2)(B_2)$  do segundo, além do traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano comum às duas faces de apoio. As projeções horizontais dadas  $A_1B_1$  e  $A_2B_2$ , além de paralelas, são iguais (Figura 751).

Análise: Em cada um dos cubos, os planos que atingem os oito conjuntos de arestas convergentes a cada vértice, destacam, de cada sólido, oito pirâmides triangulares regulares, cujas bases são triângulos equiláteros de lados iguais à metade e à terça parte da aresta do cubo, respectivamente, no primeiro (Figura 749) cubo e no segundo (Figura 750).

Assim, as faces dos dois sólidos, após as retiradas dessas pirâmides triangulares, ficam transformadas em quadrados, no primeiro caso, ou octógonos regulares, no segundo, respectivamente.

Nos dois casos, os poliedros resultantes dos cubos originais são tetradecaedros, por contarem com seis faces resultantes das faces iniciais dos cubos, além de novas oito faces triangulares, criadas pelos seccionamentos (Figuras 749 e 750). Mas são dois sólidos bem diferentes, especialmente pelos formatos das faces que restaram das antigas faces do cubo, o que se comprova facilmente pela observação das imagens tridimensionais (Figuras 749 e 750) e da épura da Figura 751.

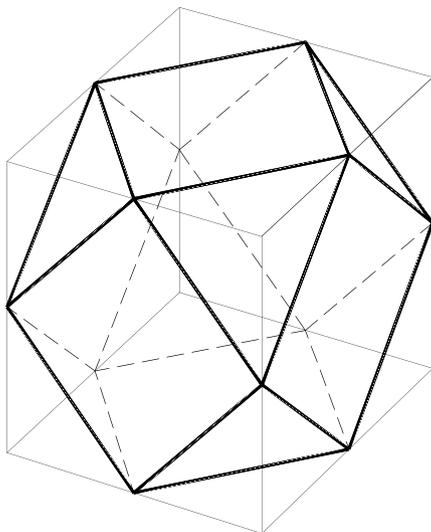


Figura 749

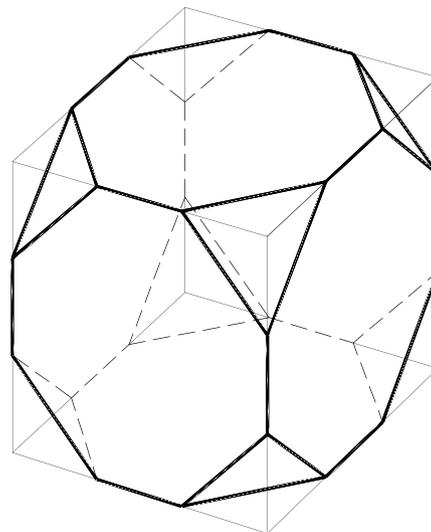


Figura 750

Para tal é pura, após a imediata construção das projeções horizontais, em V.G., e as obtenções das projeções verticais dos oito vértices de cada cubo, divide-se em duas partes iguais todas as arestas do cubo de aresta  $(A_1)(B_1)$  e em três partes iguais todas as do segundo cubo.

A reunião ordenada dos pontos de divisão fornece, com grande simplicidade, as projeções dos dois tetradecaedros criados após os seccionamentos efetuados (Figura 751), ficando fácil observar algumas faces quadradas no que restou do primeiro cubo e outras octogonais, no segundo. Complementam-nas, também com simples observação, as muitas faces triangulares, em substituição aos vértices dos cubos originais.

As visibilidades são de pronta resolução pela própria seqüência de faces verticais com maiores e menores afastamentos.

A ausência da linha de terra em nada prejudicou a questão.

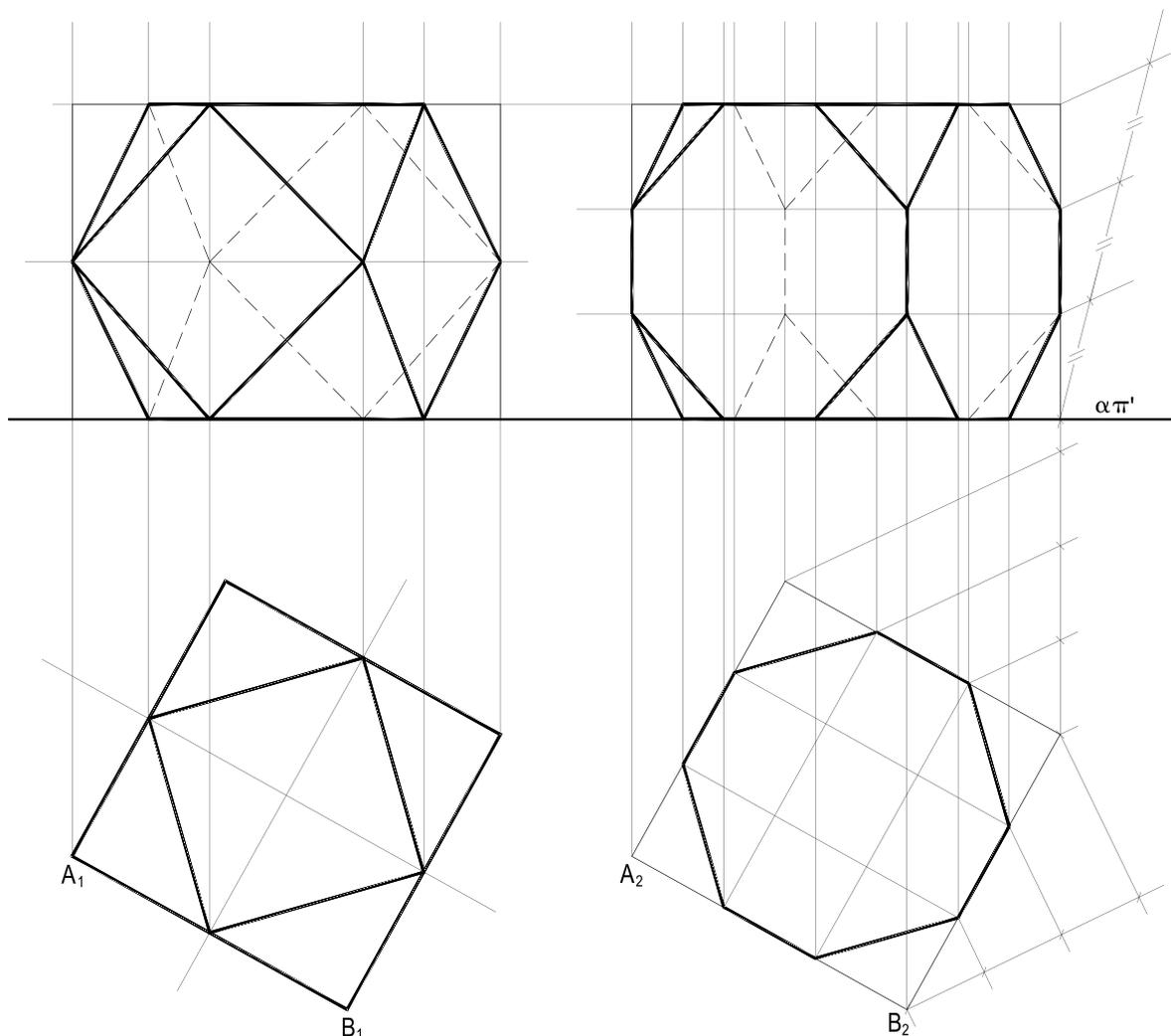


Figura 751

174.12 – Os extremos (A), (B) e (C) das arestas de um cubo que convergem em seu vértice (J) pertencem a um plano de perfil de abscissa menor que a de (J).

Dadas as projeções dos vértices (B) e (C), sabendo que a cota de (A) é maior que as daqueles, pede-se construir as projeções do sólido.

Análise: Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 111.9) que (A), (B) e (C) formam um triângulo equilátero, de lado igual à diagonal facial do cubo, situado num plano perpendicular à diagonal (J)(S) do sólido (Figura 752). Por isso, essa diagonal há de ser fronto-horizantal, já que o plano do triângulo (A)(B)(C) é de perfil.

Além disso, sabe-se também (*Geometria Espacial*, número 111.10) que o plano (A)(B)(C) corta a diagonal (J)(S) num de seus pontos terços, sendo o outro ponto terço o de passagem do plano que reúne os últimos três vértices ( $\bar{A}$ ), ( $\bar{B}$ ) e ( $\bar{C}$ ) do cubo (Figura 752).

E, enfim (número 171 e *Geometria Espacial*, número 111.19), que, nestas condições, a projeção do cubo em estudo sobre um plano de perfil tem por contorno um hexágono regular, cujo circuncentro há de ser a projeção comum dos vértices (J) e (S), que definem a diagonal do sólido perpendicular aos planos dos triângulos equiláteros (A)(B)(C) e ( $\bar{A}$ )( $\bar{B}$ )( $\bar{C}$ ) (Figura 753). Tal projeção será essencial à resolução do problema, o que se fará pelo rebatimento de um plano de perfil ( $\gamma$ ), como logo se verá.

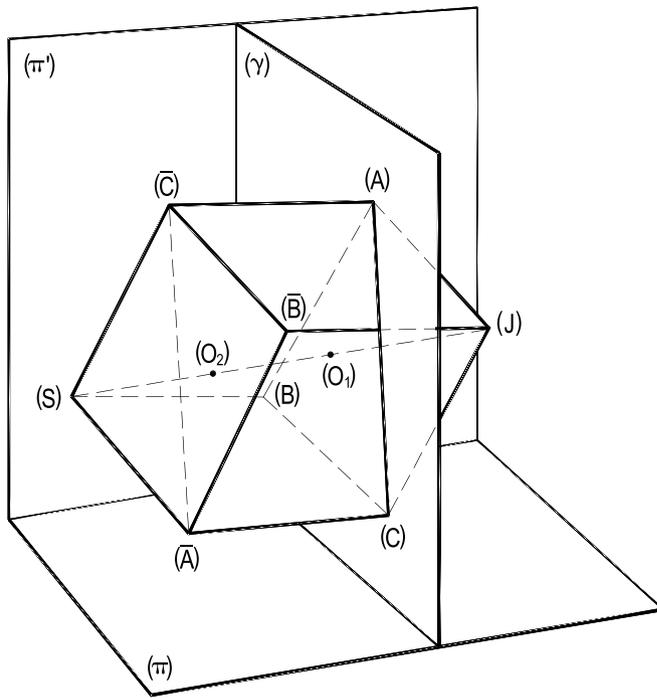


Figura 752

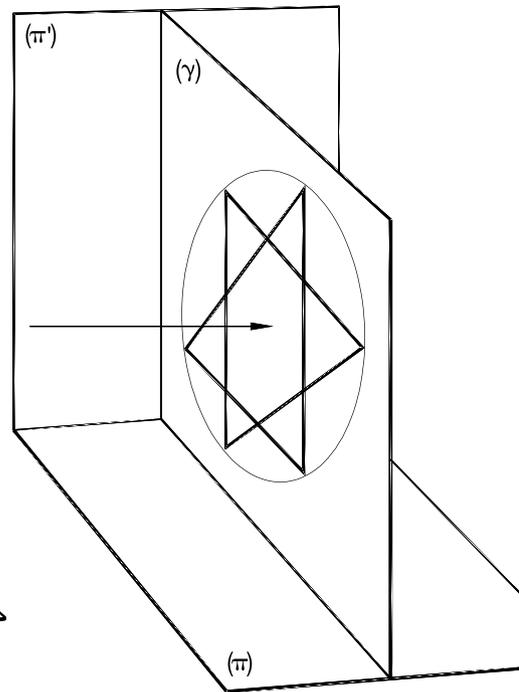


Figura 753

Solução: Pelo rebatimento de um plano de perfil, completa-se, em V.G., o triângulo equilátero  $(A)_1(B)_1(C)_1$  e constrói-se, também em V.G., o triângulo equilátero  $(\bar{A})_1(\bar{B})_1(\bar{C})_1$ , com vértices diametralmente opostos aos do primeiro (Figura 754).

Com a construção da escala gráfica (ver *Geometria Espacial*, número 112.2), entra-se com a V.G.  $d$  da diagonal facial, para obter a V.G. da diagonal  $D$  do cubo que, dividida em três partes iguais, proporciona, em épura, as abscissas do vértice  $(J)$ , do plano  $(\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})$  e do vértice  $(S)$  (Figura 754), para, mediante alçamentos, completar as projeções pedidas.

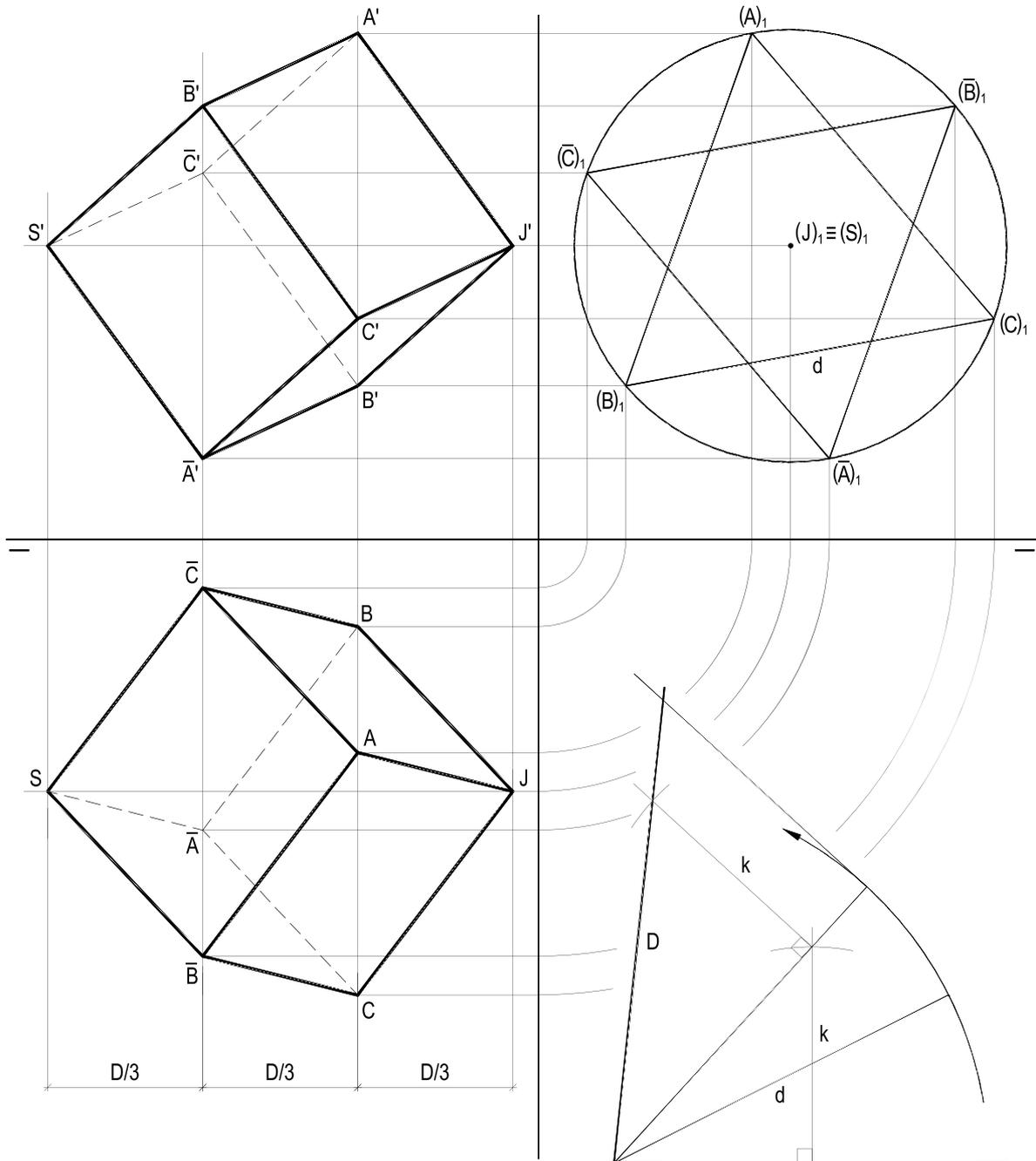


Figura 754

174.13 – O plano ( $\alpha$ ) secciona o octaedro regular (J) – (A)(B)(C)(D) – (S), passando por seu centro (O), sendo perpendicular à diagonal (J)(S). Sabendo que a reta suporte da diagonal (A)(C) concorre com a linha de terra e que (A) tem abscissa inferior à de (C), pede-se construir as projeções do sólido, considerando opaco o plano ( $\alpha$ ). São dados as projeções de (J) e os traços de ( $\alpha$ ).

Solução: A interseção da perpendicular ( $p$ ), traçada, por (J), a ( $\alpha$ ) é o centro ( $O$ ) do octaedro. Com o rebatimento de ( $\alpha$ ) e a determinação da V.G.  $R$  da semidiagonal do sólido, pela mudança de ( $\pi$ ) que torna (J)(O) horizontal, fica imediato construir o círculo ( $O$ )<sub>1</sub>, circunscrito ao quadrado (A)<sub>1</sub>(B)<sub>1</sub>(C)<sub>1</sub>(D)<sub>1</sub>, com (A)<sub>1</sub>(C)<sub>1</sub> colinear com o traço de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'$  $\pi$ ) (Figura 755). O alçado foi feito por afinidade com a projeção horizontal e com o paralelismo das arestas do octaedro. (S) foi obtido por simetria de (J) em relação a (O) e a ordem dos vértices (B) e (D) foi aleatória, por não haver, no enunciado, limitações a isso.

Observe-se a visibilidade decorrente da opacidade imposta ao plano ( $\alpha$ ) (Figura 755).

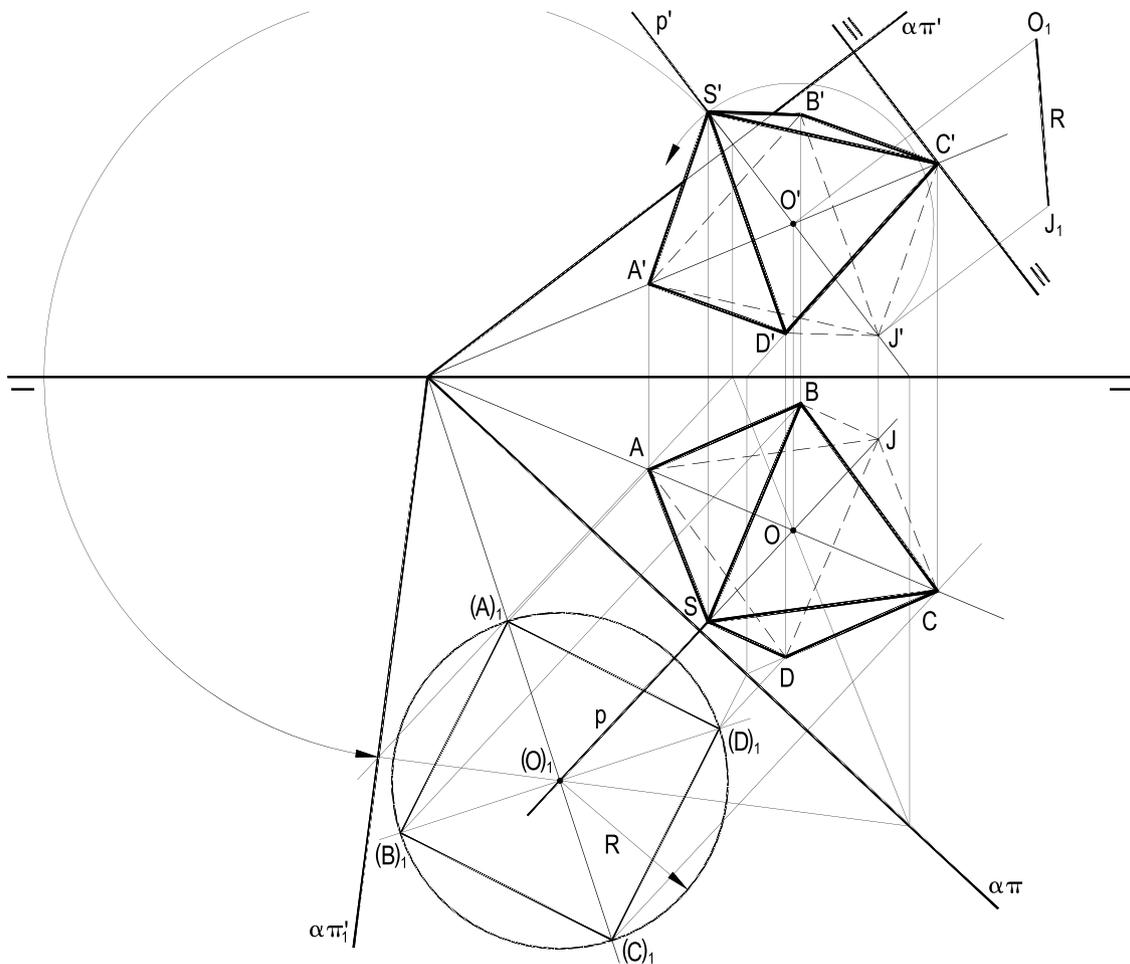


Figura 755



174.15 – Dois octaedros regulares  $(J) - (A)(B)(C)(D) - (S)$  e  $(\bar{J}) - (\bar{A})(\bar{B})(\bar{C})(\bar{D}) - (\bar{S})$  têm suas diagonais  $(J)(S)$  e  $(\bar{J})(\bar{S})$  verticais, estão situados, ambos, no primeiro diedro, são iguais e não possuem qualquer ponto em comum.

Dadas as projeções das arestas  $(C)(D)$ , do primeiro, e  $(\bar{A})(\bar{B})$ , do segundo, e sabendo que os vértices  $(J)$  e  $(\bar{J})$  são os mais altos, pede-se construir as projeções dos dois octaedros, como auxílio para determinar as projeções dos sólidos obtidos neles pelos seccionamentos de todas as arestas do primeiro por seis planos perpendiculares às suas diagonais, que dividam em três partes iguais cada aresta, e por outros seis planos perpendiculares às suas diagonais, que dividam todas as suas arestas ao meio, no segundo octaedro.

Análise: Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 114.9) que todo plano perpendicular a uma diagonal de um octaedro regular e a ele secante, produz, por seção, um quadrado.

No primeiro caso em estudo, por dividir em três partes iguais cada aresta, os seis planos secantes produzem seis quadrados iguais nos ângulos sólidos de cada vértice do octaedro, restando, neste sólido, um hexágono regular, inscrito em cada uma de suas faces (Figura 757). Retiradas as seis pirâmides quadrangulares regulares produzidas junto a cada um dos seis vértices do octaedro, o sólido resultante é um tetradecaedro que tem, então, seis faces quadradas e oito faces hexagonais regulares.

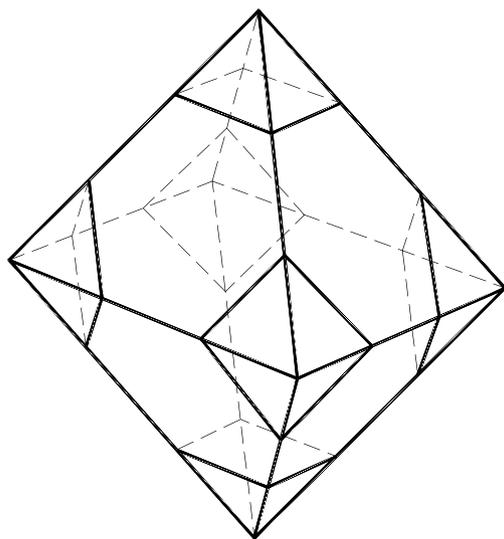


Figura 757

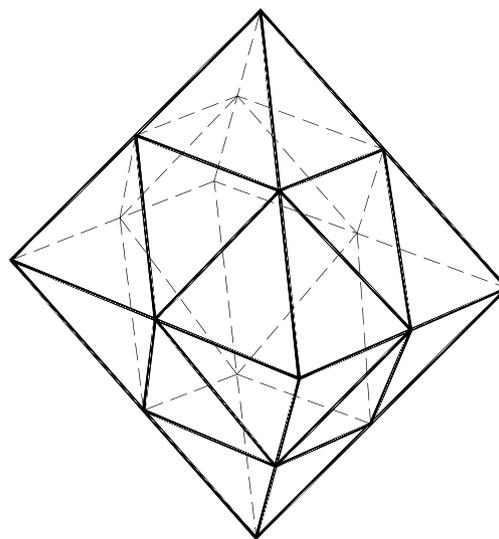


Figura 758

No segundo caso analisado, por dividir ao meio cada aresta do octaedro regular dado, os seis planos secantes produzem seis quadrados nos ângulos sólidos de cada vértice do octaedro e oito triângulos equiláteros, em cada uma de suas faces. Assim, o sólido remanescente, após a retirada das seis pirâmides quadrangulares regulares, é um tetradecaedro que conta com essas seis faces quadradas e com oito faces triangulares equiláteras inscritas nas faces do octaedro original (Figura 758).

Solução: Após as imediatas construções das projeções dos dois octaedros regulares dados, são incluídos os planos horizontais que dividem as arestas convergentes nos vértices nas condições determinadas.

As simples uniões ordenadas dos pontos de corte oferecem, em cada um dos dois casos estudados, os vértices dos dois tetradecaedros pedidos (Figura 759).

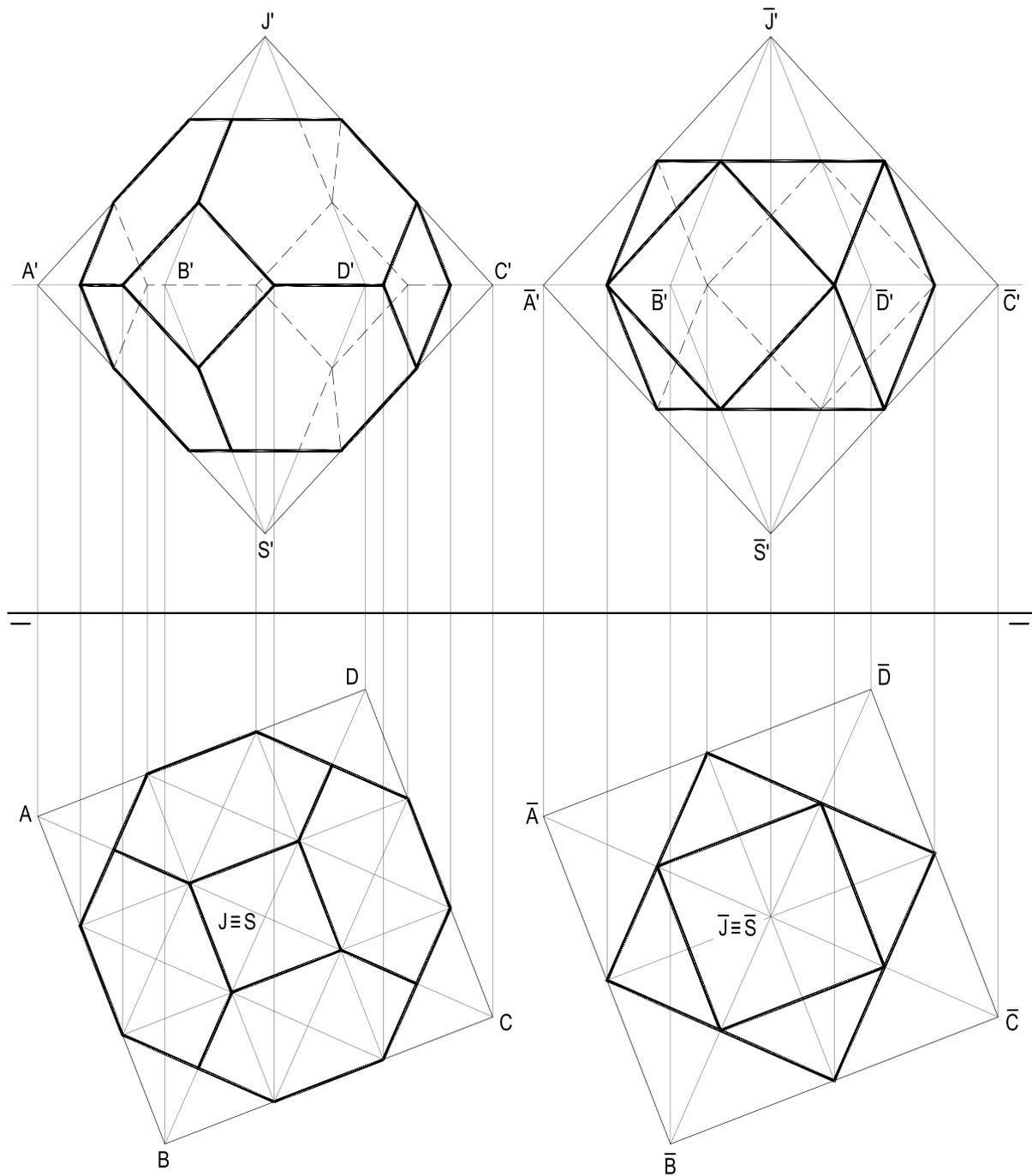


Figura 759

174.16 – Construir as projeções do octaedro regular (J) – (A)(B)(C)(D) – (S), apoiado por sua face (J)(A)(B) num plano de topo ( $\alpha$ ) e situado no primeiro diedro.

Além dos traços de ( $\alpha$ ), são dadas as projeções horizontais dos vértices (A) e (B).

Análise: Sabe-se (*Geometria Espacial*, número 114.31) que, por ter sua face (J)(A)(B) no plano ( $\alpha$ ), a projeção do octaedro em estudo sobre esse plano há de se formar pelas verdadeiras grandezas desta face e a da que lhe é oposta e paralela (S)(C)(D) e que, em tal projeção, hão de coincidir os circuncentros dessas duas faces (Figura 760).

E, considerando a seção (J)(M)(S)(N), produzida no sólido pelo plano mediador das arestas (A)(B) e (C)(D), observa-se o triângulo isósceles (J)(M)(N), em que os lados iguais (J)(M) e (J)(N) são alturas  $h$  de duas faces e o lado (M)(N) mede a aresta  $a$  do octaedro (Figura 761).

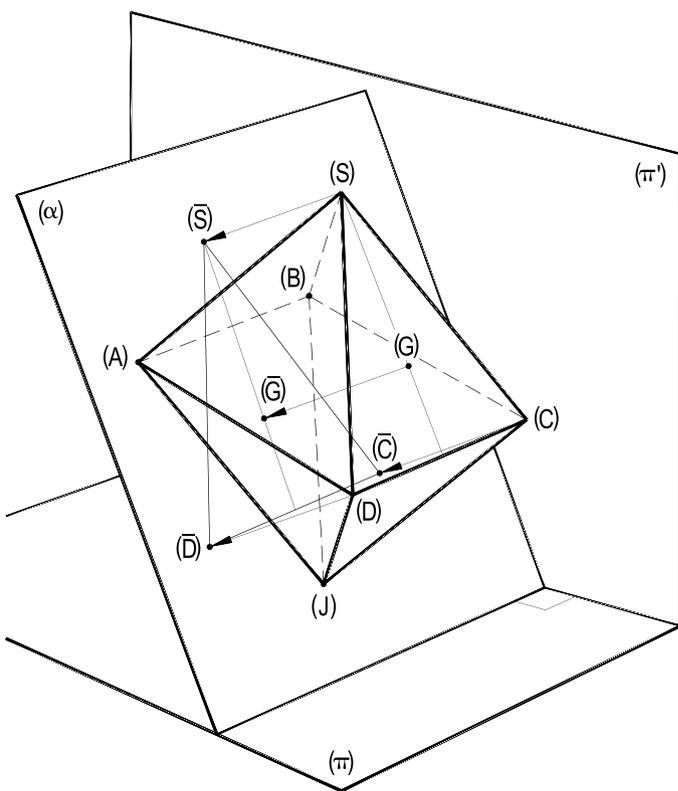


Figura 760

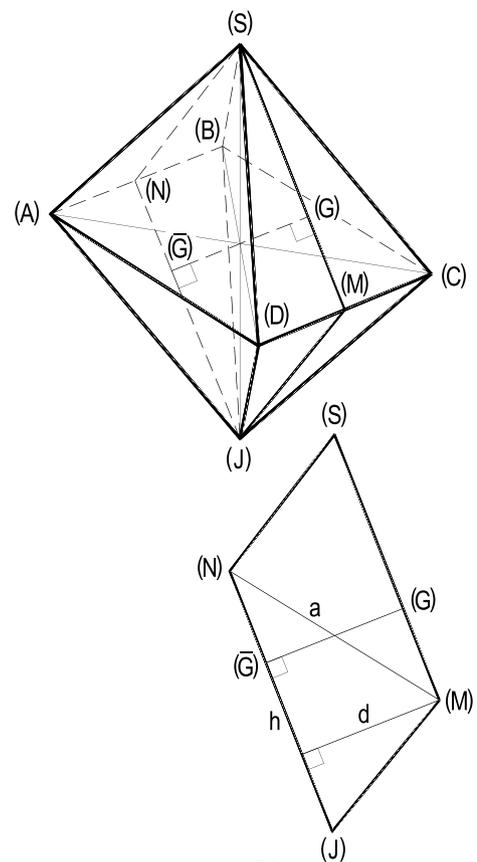


Figura 761

Solução: Pelo rebatimento do plano de topo ( $\alpha$ ), sobre ( $\pi$ ), constrói-se, em V.G., o triângulo equilátero  $(A)_1(B)_1(J)_1$ , com uma solução única, para restar no primeiro diedro. E, com o auxílio do círculo  $(G)_1$  a ele circunscrito, é fácil obter os outros três vértices do octaedro,  $(\bar{S})_1$ ,  $(\bar{C})_1$  e  $(\bar{D})_1$ , projetados sobre ( $\alpha$ ) (Figura 762), que, alçados, proporcionam as projeções horizontais  $\bar{S}$ ,  $\bar{C}$  e  $\bar{D}$  desses três pontos.

A face oposta à dada,  $(S)(C)(D)$ , pertencerá a um plano  $(\beta)$  que, por ter de ser paralelo a  $(\alpha)$ , será, como  $(\alpha)$ , de topo. Para determiná-lo, foi construído, ao lado da écura (Figura 762), o triângulo isósceles  $(J)(M)(N)$ , com lados  $(J)(M) = (J)(N) = h$ , altura da face do sólido e  $(M)(N) = a$ , V.G., da aresta. A altura  $d$ , desse triângulo, relativa ao vértice  $(M)$  é a distância que separa os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ .

Como o octaedro pedido tem de estar no primeiro diedro, há apenas uma solução para o plano  $(\beta)$  (Figura 762), dos vértices  $(S)$ ,  $(C)$  e  $(D)$ , com a marcação, em V.G., dessa distância  $d$  em projeção vertical, por serem frontais as perpendiculares  $(\bar{S})(S)$ ,  $(\bar{C})(C)$  e  $(\bar{D})(D)$  ao plano  $(\alpha)$ .

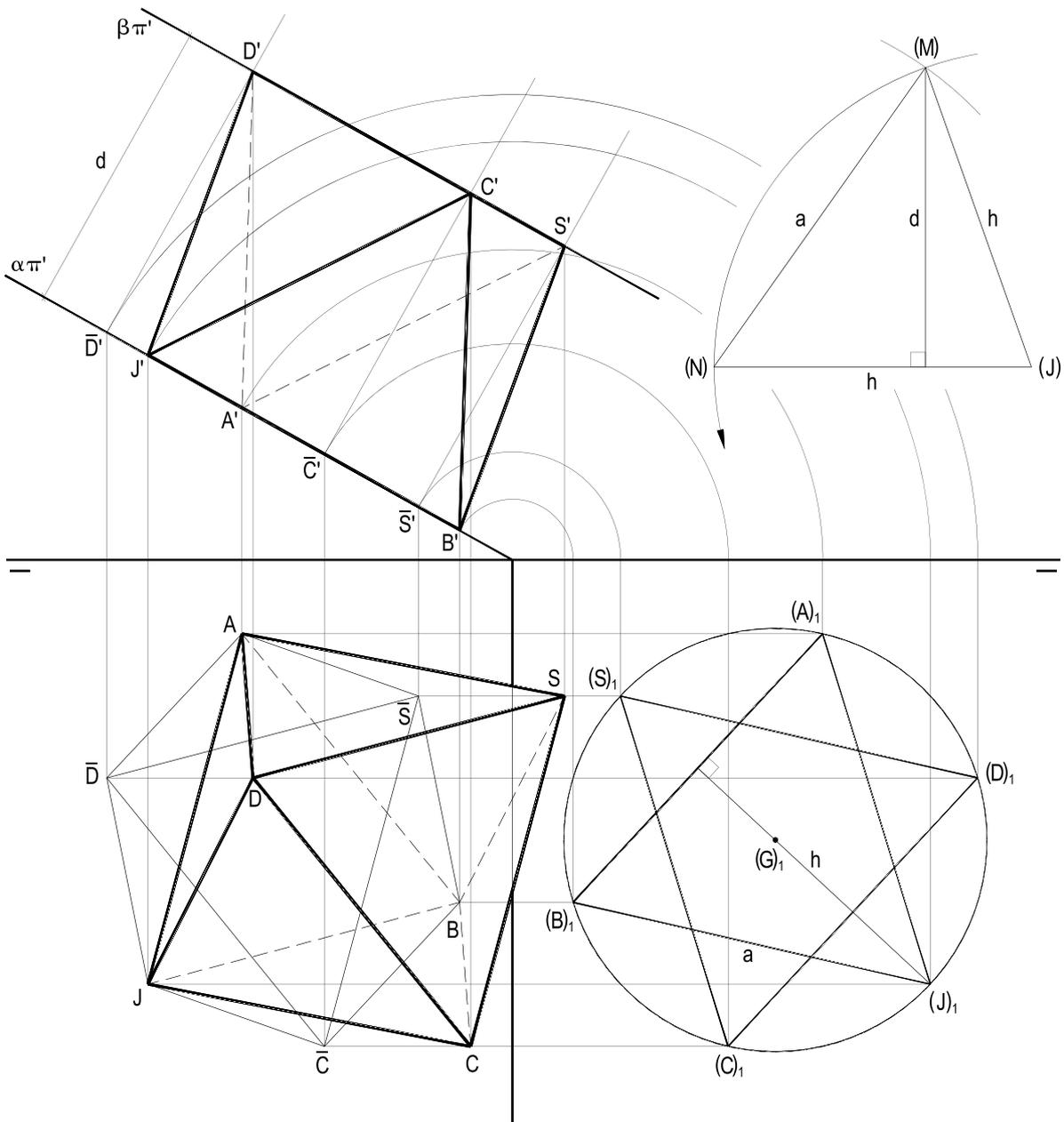


Figura 762



174.18 – Os segmentos (A)(B) e (B)(C), respectivamente, frontal e horizontal, dados por suas projeções, são duas arestas básicas de um paralelepípedo reto, cuja altura é igual à diagonal (A)(C) de sua base (A)(B)(C)(D).

Pede-se construir suas projeções, sabendo que elas não se penetram, em é pura.

Solução: Dadas as projeções de dois lados (A)(B) e (B)(C) consecutivos da base (A)(B)(C)(D), com paralelas, prontamente se obtêm as projeções de seu último vértice (D) e, mediante uma mudança de ( $\pi'$ ), a V.G.  $A'_1C'_1$  da diagonal (A)(C) (Figura 764).

Traçadas as perpendiculares ao plano da base, por seus vértices, com nova mudança de ( $\pi'$ ), leva-se a estas retas o valor da altura  $B'_1\bar{B}'_1$ , em V.G., buscando a solução que evita a sobreposição das projeções do sólido (Figura 764), como imposto.

Apenas com uso de paralelas, completa-se o problema, mesmo com a ausência da linha da terra.

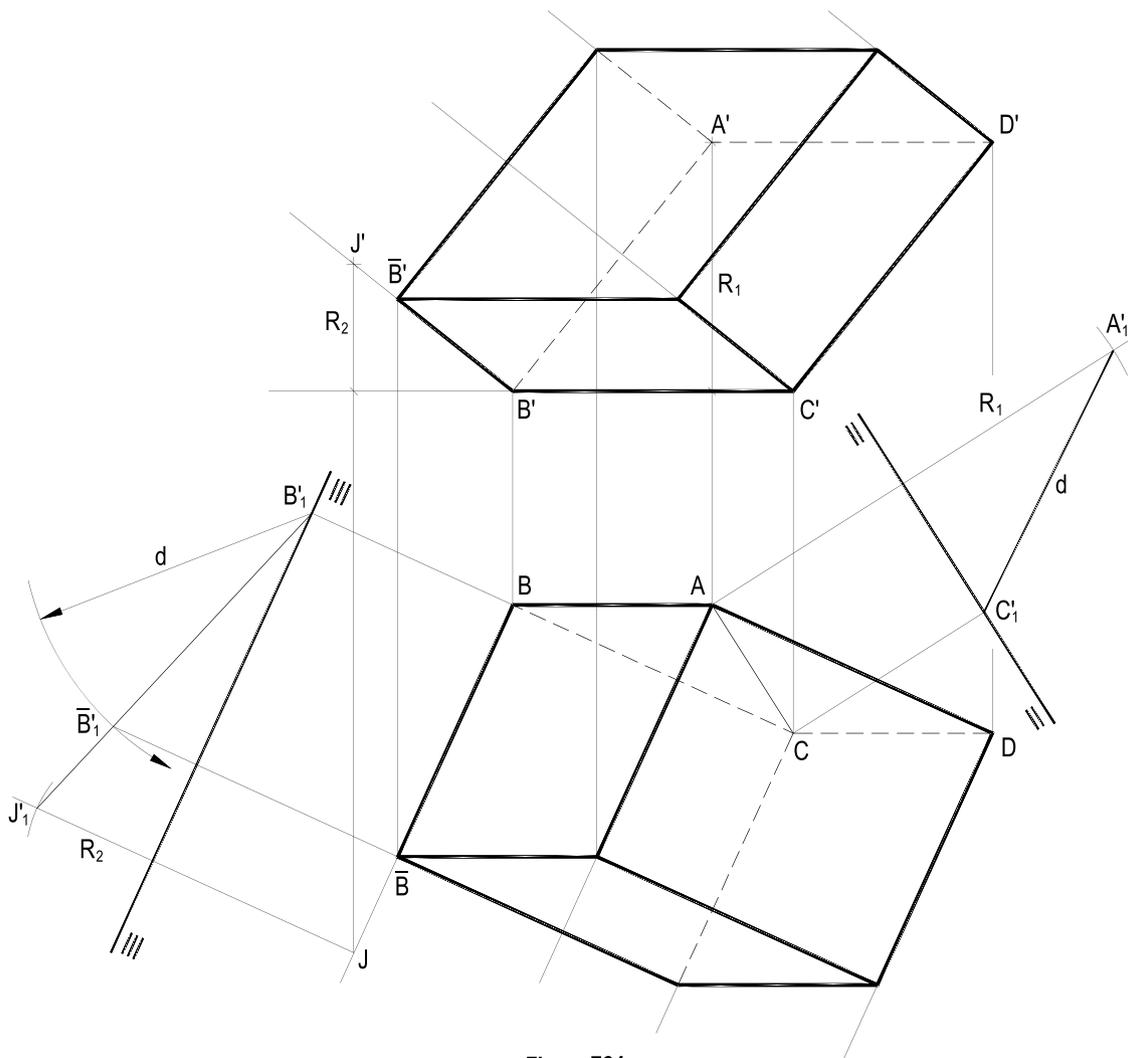


Figura 764

174.19 – O triângulo (A)(B)(C), dado por suas projeções, é diretriz de uma superfície prismática de geratrizes fronto-horizontais, que é seccionada pelos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), dados por seus traços, produzindo-se, assim, um tronco de prisma triangular, cujas projeções são pedidas.

Considerar transparentes os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ).

Solução: O simples traçado das fronto-horizontais pelos vértices do triângulo (A)(B)(C), dado, produz a superfície prismática em questão. E as suas interseções, de imediatas obtenções, com os planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) fornecem os vértices ( $A_1$ ), ( $B_1$ ) e ( $C_1$ ), em ( $\alpha$ ), e ( $A_2$ ), ( $B_2$ ) e ( $C_2$ ), no plano ( $\beta$ ), resultando no tronco de prisma triangular procurado (Figura 765).

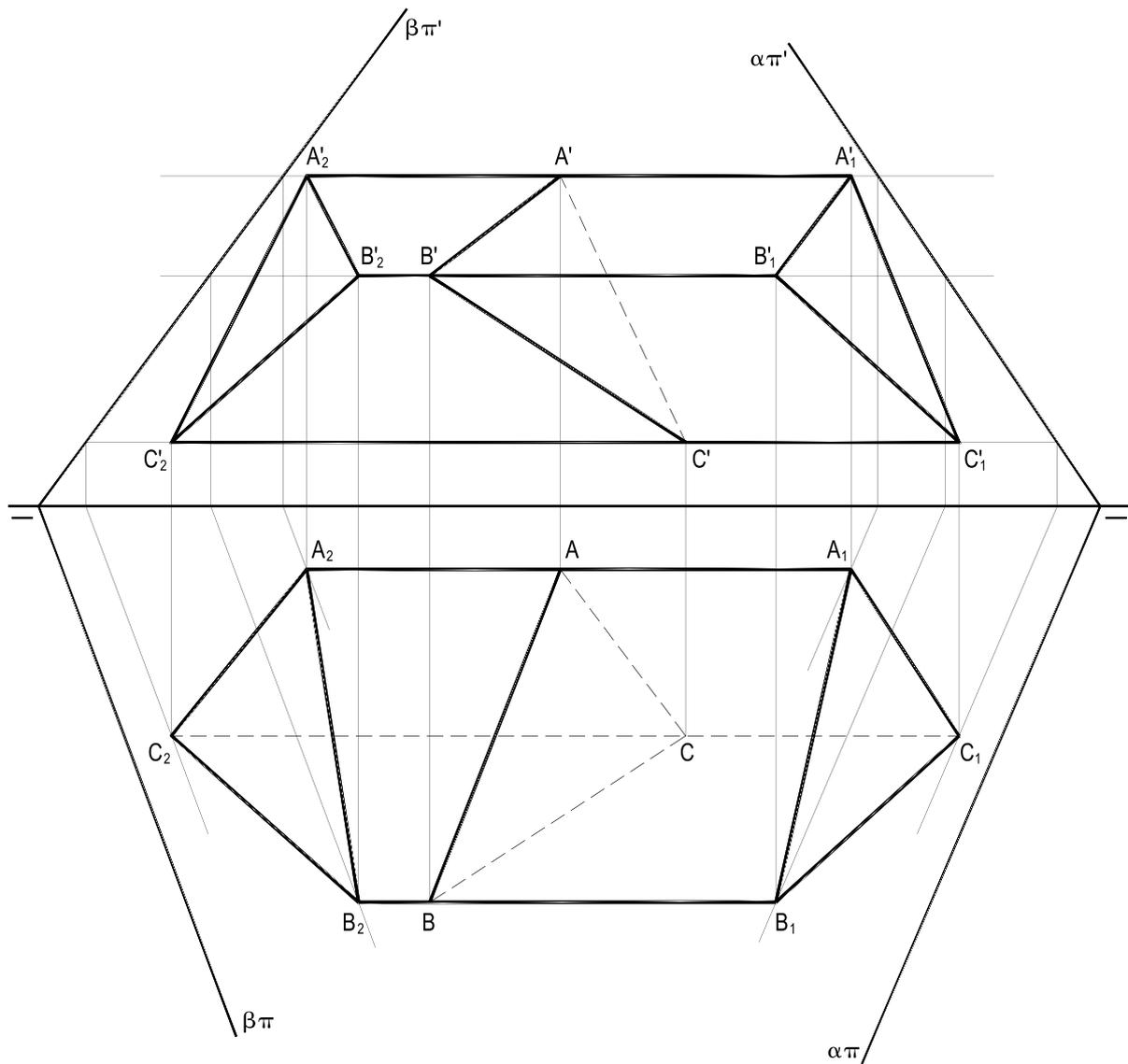
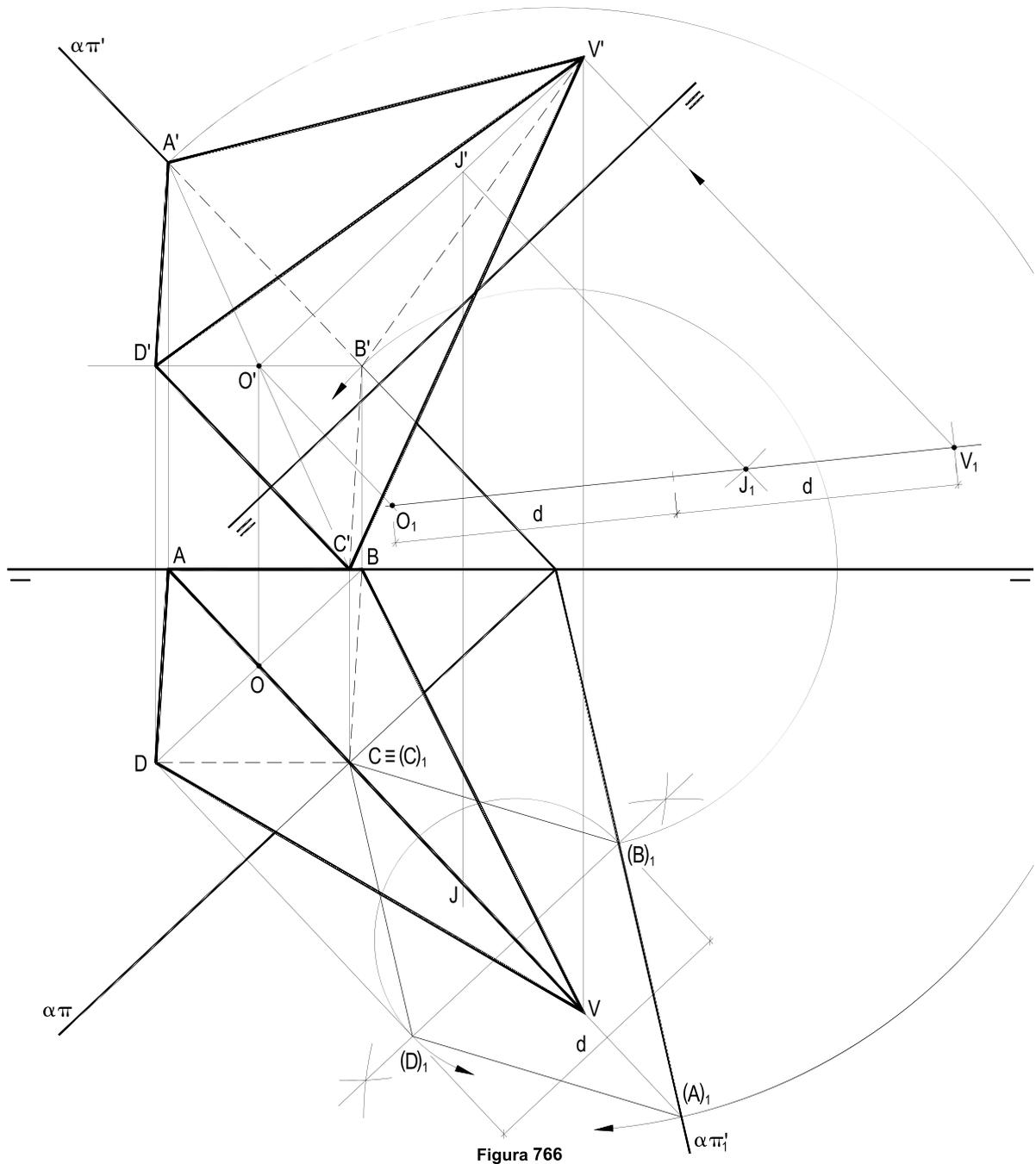


Figura 765

174.20 – O segmento (A)(C), dado por suas projeções, pertence a uma reta de máximo declive de um plano ( $\alpha$ ), no qual se apoia, por sua base romboide (A)(B)(C)(D), a pirâmide reta (V) – (A)(B)(C)(D), com altura igual ao dobro da diagonal básica (B)(D).

Construir as projeções da pirâmide, sabendo que o vértice (B) pertence a ( $\pi'$ ).

Solução: Construídos os traços de ( $\alpha$ ), rebate-se esse plano sobre ( $\pi$ ), para obter a V.G. do losango (A)(B)(C)(D) e, com uma mudança de ( $\pi$ ), que torne horizontal a perpendicular (O)(J) a ( $\alpha$ ), marca-se a V.G.  $O_1V_1$  da altura da pirâmide, resolvendo a questão (Figura 766).



174.21 – Um sólido é composto por dois ortoedros iguais A e B, por duas pirâmides quadrangulares regulares iguais D e E e por um ortoedro menor C, encaixado entre A e B, tendo por vértices os pontos médios das arestas das duas faces mais próximas de A e de B, como indicado na Figura 767.

Os ortoedros iguais de A e B apoiam-se por uma face, cada, no plano  $(\alpha)$ , dado por seus traços, e por uma aresta, cada, em  $(\pi)$ .

As bases de A e de B são quadrados com lados iguais à metade da distância entre os traços de  $(\alpha)$ ; as arestas laterais desses dois ortoedros, e também as arestas laterais do prisma C, são iguais à metade da aresta básica dos dois ortoedros iguais.

As duas pirâmides iguais têm por bases as bases mais externas de A e de B e alturas iguais às arestas básicas desses dois ortoedros.

Pede-se construir as projeções desse sólido.

Solução: Devido a estarem apoiados por uma face em  $(\alpha)$  e por uma aresta em  $(\pi)$ , conclui-se que as arestas laterais dos ortoedros A, B e C são todas fronto-horizontais (Figura 767).

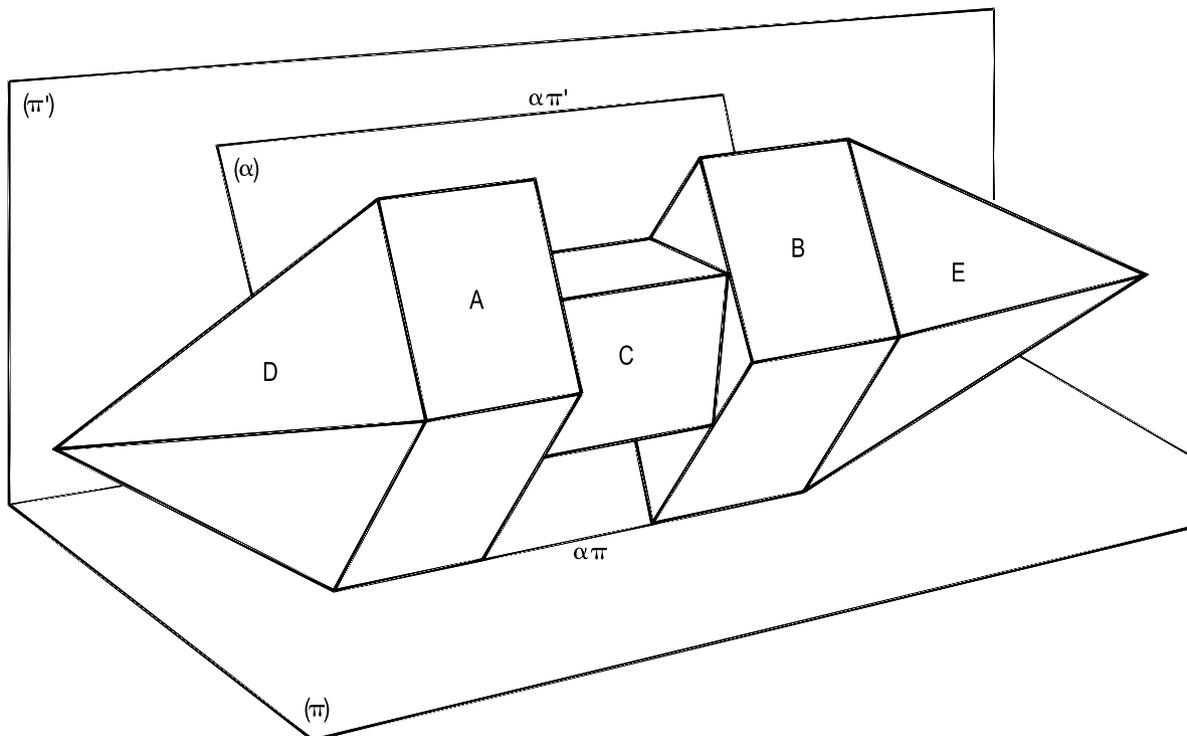


Figura 767

A utilização do rebatimento de um corte de perfil fornece a distância entre os traços do plano ( $\alpha$ ) e, conseqüentemente, a V.G. a da aresta básica a dos ortoedros A e B (Figura 768), além de precisar as posições dos vértices do prisma C, médios das arestas de A e de B, mais próximas entre si e, então, o valor  $\frac{a}{2}$  das arestas laterais dos prismas A, B e C, que poderão ser aplicadas em V.G., sobre as fronto-horizontais.

É, também, imediata a aplicação da V.G. da altura a das pirâmides D e E, sobre as fronto-horizontais traçadas pelos centros de suas bases (Figura 768).

Para definir as arestas visíveis e não, em cada projeção, é de grande utilidade a observação do corte de perfil, valendo notar que o traço horizontal  $\alpha\pi$  do plano dado ( $\alpha$ ) foi apresentado, na época da Figura 768, em traço contínuo, mas fino, na parte em que resta oculto pelo sólido.

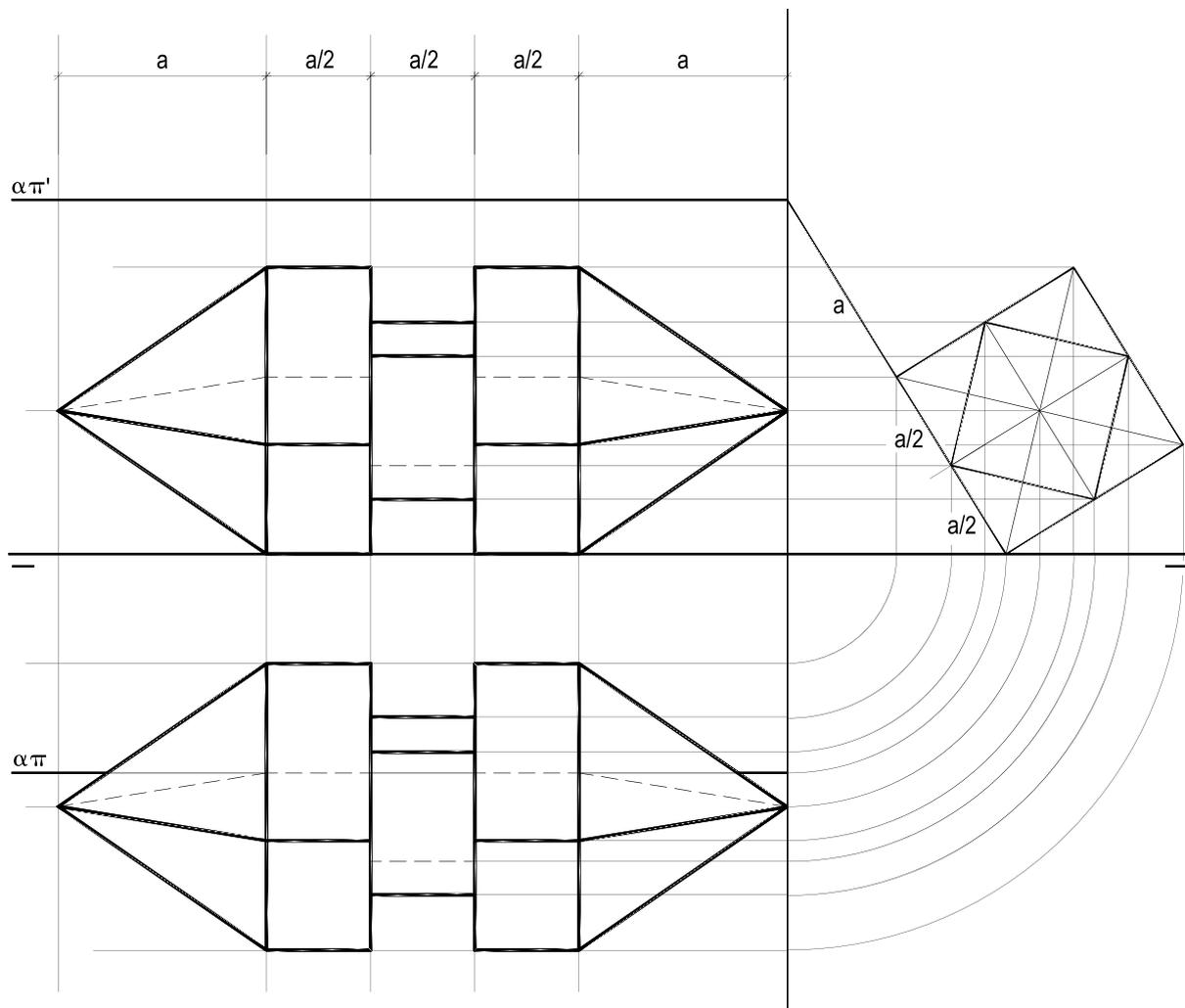


Figura 768

174.22 – Uma pirâmide hexagonal regular (V) tem sua base, com dois lados horizontais, inscrita no círculo de centro (O) e raio igual à cota de (O), pertencente ao plano ( $\alpha$ ). O vértice (V) da pirâmide tem a mesma abscissa que o traço de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'\pi$ ).

Sendo dados os dois traços de ( $\alpha$ ) e a projeção vertical  $O'$  do ponto (O), pede-se construir as projeções do tronco de pirâmide hexagonal regular extraído da pirâmide (V), pela divisão do meio de suas arestas laterais.

Solução: Marcado o ponto (O) em ( $\alpha$ ) e rebatido esse plano sobre ( $\pi$ ), constrói-se, em V.G., o hexágono regular, base da pirâmide (V), determinando esse ponto (V), conforme proposto, na perpendicular traçada por (O) a ( $\alpha$ ).

A divisão do meio de uma aresta lateral de (V), após o alçado do hexágono pertencente a ( $\alpha$ ) e a utilização de paralelas, soluciona a questão (Figura 769).

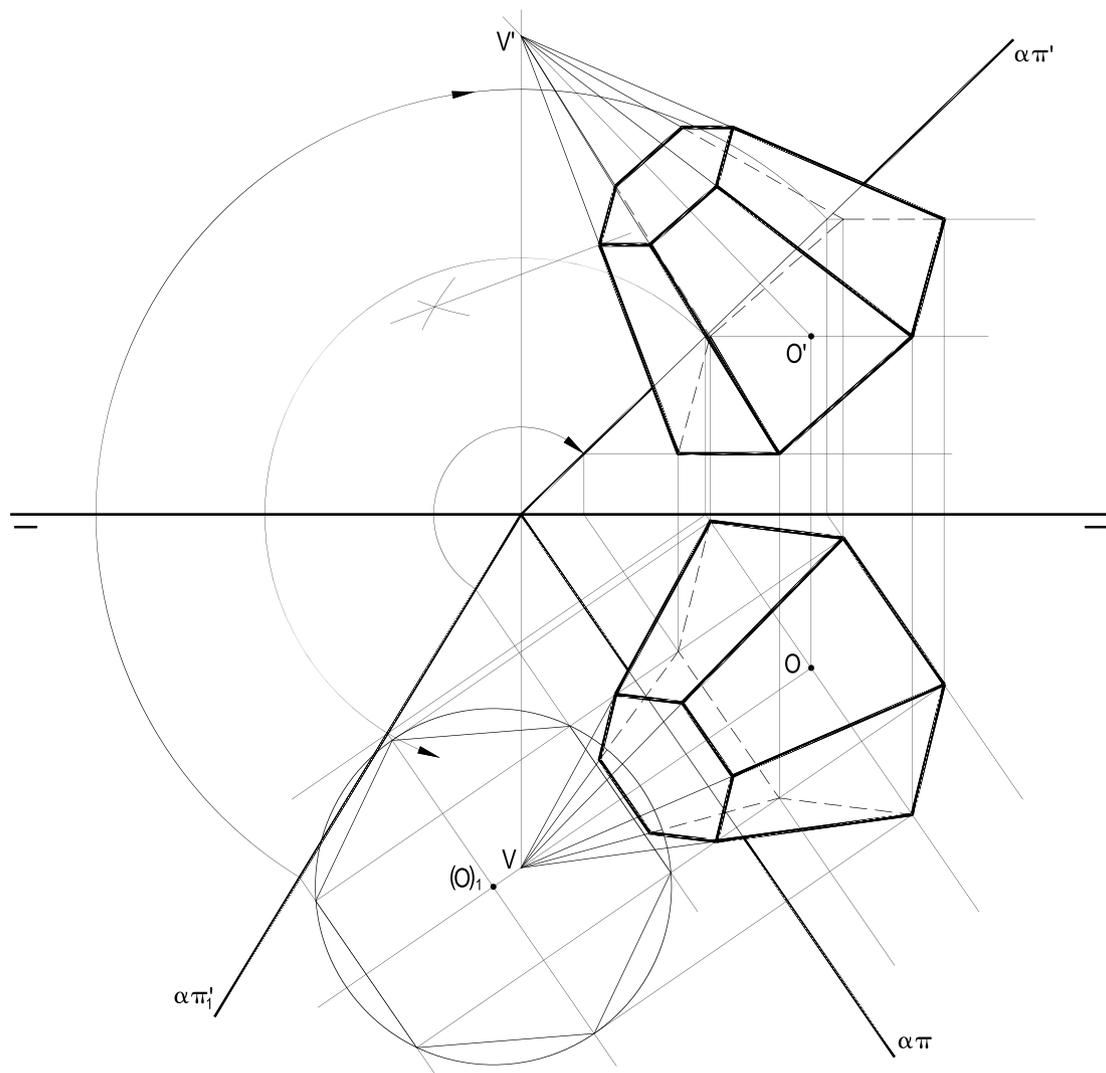


Figura 769

# CAPÍTULO XVI

## SEÇÕES PLANAS EM POLIEDROS

### 175 – Posições relativas entre um plano e um poliedro

Como as arestas e as faces de um poliedro são segmentos de reta limitados a seus dois vértices e parte de planos limitados às suas arestas, respectivamente, um plano pode, em relação a um poliedro, ocupar três posições:

- exterior ao poliedro, quando não atinge nenhuma de suas arestas nem nenhuma de suas faces (Figura 770);
- apoiado no poliedro, quando tem em comum com o sólido um ou mais vértices, ou até uma face, mas sem atravessá-lo (Figura 771);
- secante ao poliedro, quando corta algumas de suas arestas e de suas faces (Figura 772).

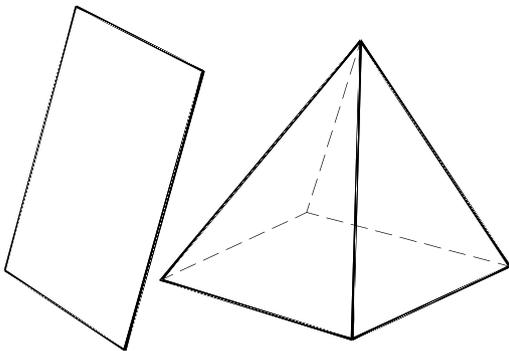


Figura 770

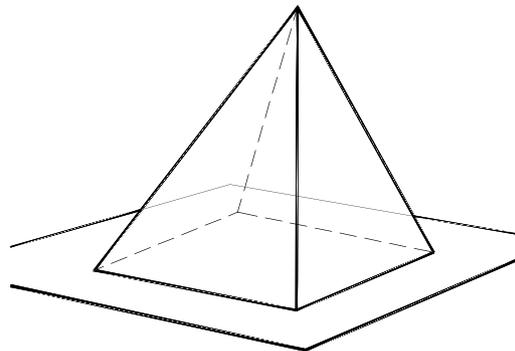


Figura 771

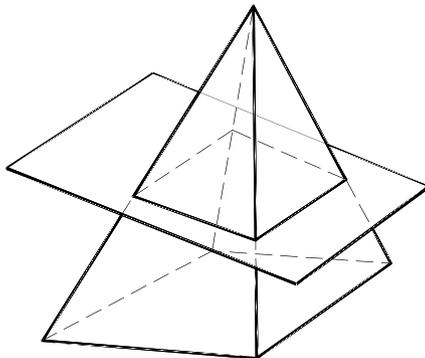


Figura 772

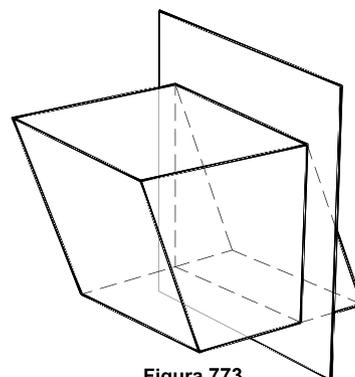


Figura 773

Nesta última hipótese, o polígono produzido pela interseção do plano secante com as arestas e as faces atingidas denomina-se seção plana no poliedro (Figuras 772 e 773).

Como estaremos analisando apenas poliedros convexos, todas as seções planas obtidas serão (número 157) polígonos convexos, que poderão, eventualmente, ter um ou mais vértices em comum com o sólido (Figura 773).

É também especial a situação em que o poliedro é um prisma (Figura 774), ou um tronco de prisma (Figura 775), e o plano secante, atingindo todas as suas arestas laterais, é a elas perpendicular, sendo, então, o polígono produzido denominado seção reta no sólido (*Geometria Espacial*, números 126.2 e 165).

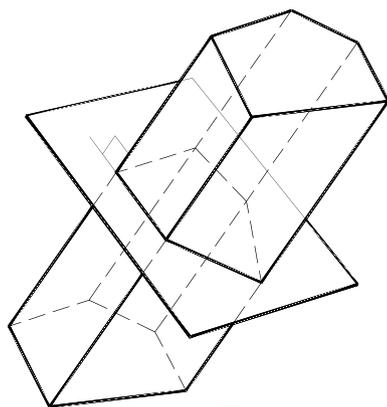


Figura 774

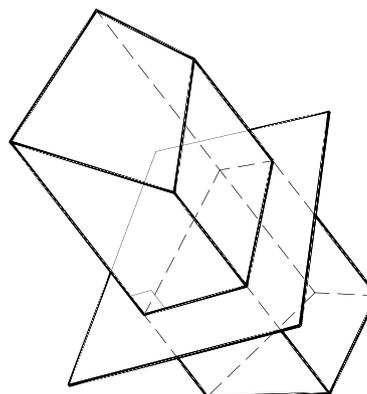


Figura 775

Num prisma, ou num tronco de prisma, há uma infinidade de seções retas, todas aquelas produzidas pelos inúmeros planos que, sendo perpendiculares às suas arestas laterais, atingem todas elas.

Em verdade, as seções retas num prisma, ou num tronco de prisma, são seções retas nas superfícies prismáticas que limitam lateralmente esses dois sólidos, havendo, então, uma infinidade de seções retas nessas superfícies.

Sobre as seções retas num prisma, ou num tronco de prisma, sabe-se (*Geometria Espacial*, número 165) que:

- por pertencerem a planos paralelos, são, para determinado sólido, todas iguais entre si;
- para cada prisma, ou tronco de prisma considerado, a seção reta nada mais é que a projeção ortogonal de suas bases sobre o plano perpendicular às arestas laterais do sólido que produziu tal seção;
- para cada prisma, ou tronco de prisma considerado, a seção reta é, dentre todas as produzidas seccionando apenas as arestas laterais, a de menor perímetro e a de menor área;
- os ângulos internos de uma seção reta são os retilíneos dos diedros formados pelos pares de faces laterais consecutivas do sólido.

## 176 – Seções planas no tetraedro regular

Para estudar as seções planas especiais que podem ser obtidas no tetraedro regular, consideraremos o sólido sempre apoiado por uma de suas faces em  $(\pi)$  e comentaremos as particularidades, caso a caso.

176.1 – Todas as seções produzidas por planos paralelos a uma face do tetraedro regular são triângulos equiláteros homotéticos a essa face (Figura 776).

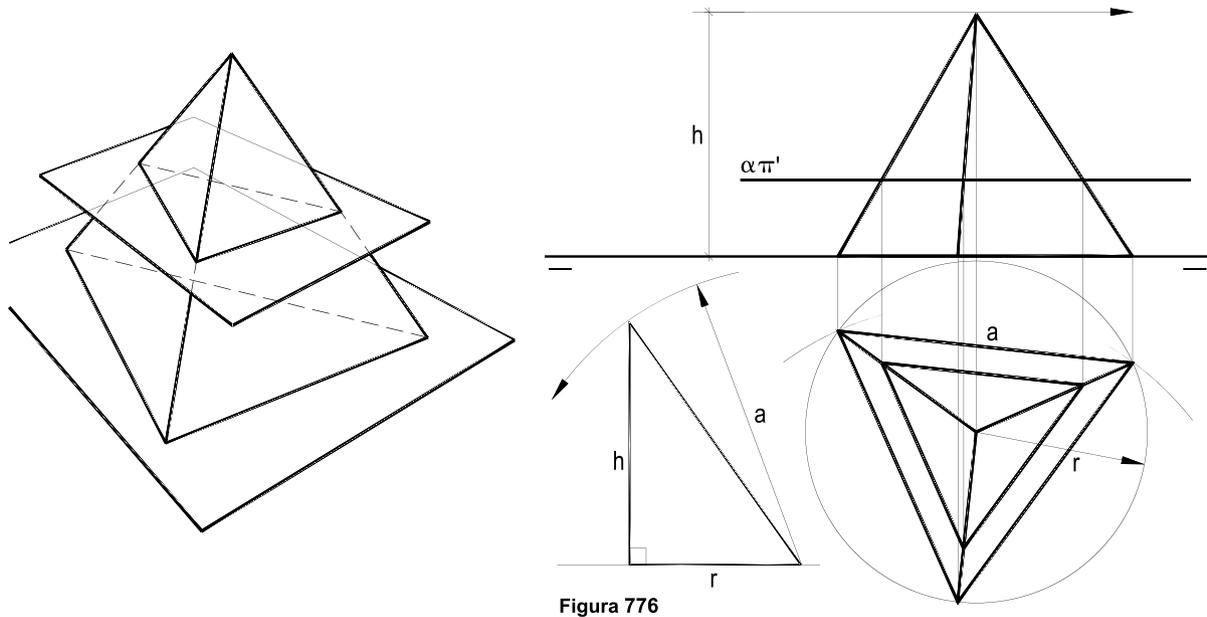


Figura 776

176.2 – Todos os planos pertencentes a uma das arestas do tetraedro regular seccionam o sólido segundo triângulos isósceles (*Geometria Espacial*, número 105.2) (Figura 777).

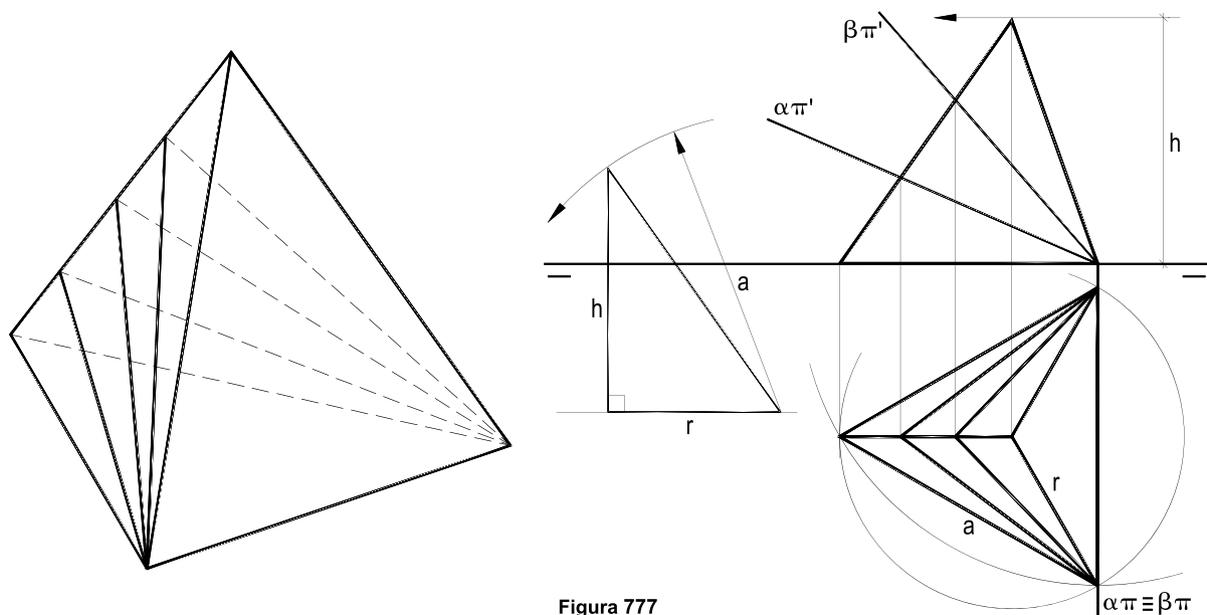


Figura 777

176.3 – Os planos paralelos a apenas uma aresta do tetraedro regular, que atingem as três arestas do sólido convergentes num de seus vértices, cortam-no segundo triângulos isósceles (*Geometria Espacial*, número 105.13) (Figura 778).

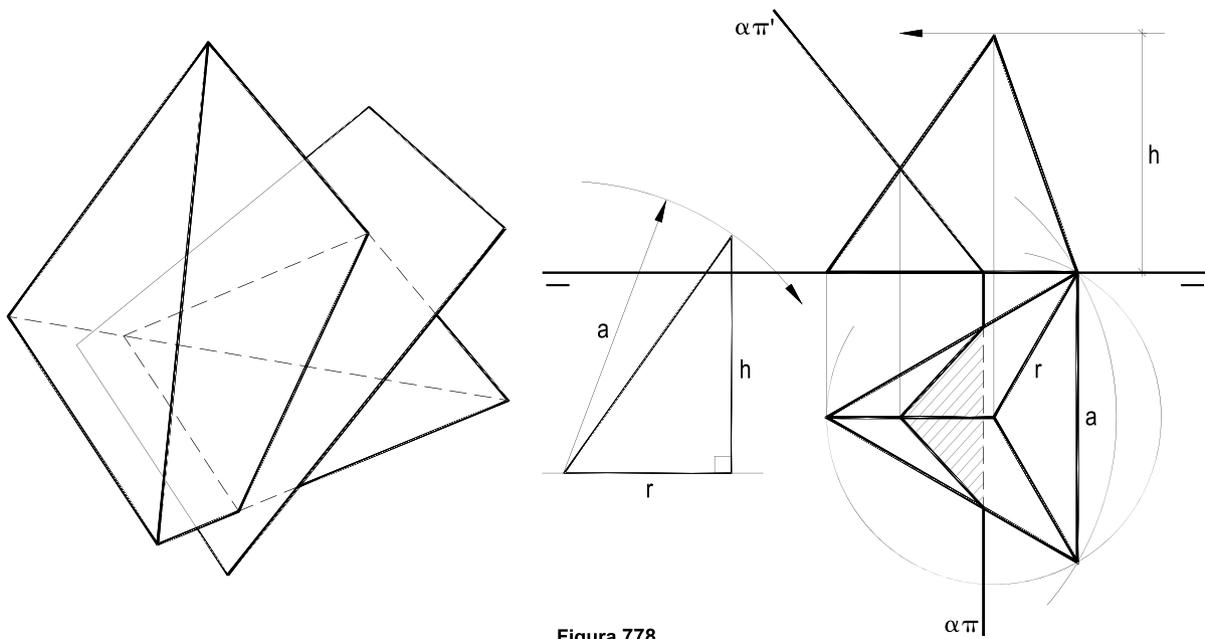


Figura 778

176.4 – Os planos paralelos a apenas uma aresta do tetraedro regular, que atingem quatro arestas do sólido, produzem nele, por seções, trapézios isósceles (*Geometria Espacial*, número 105.13) (Figura 779).

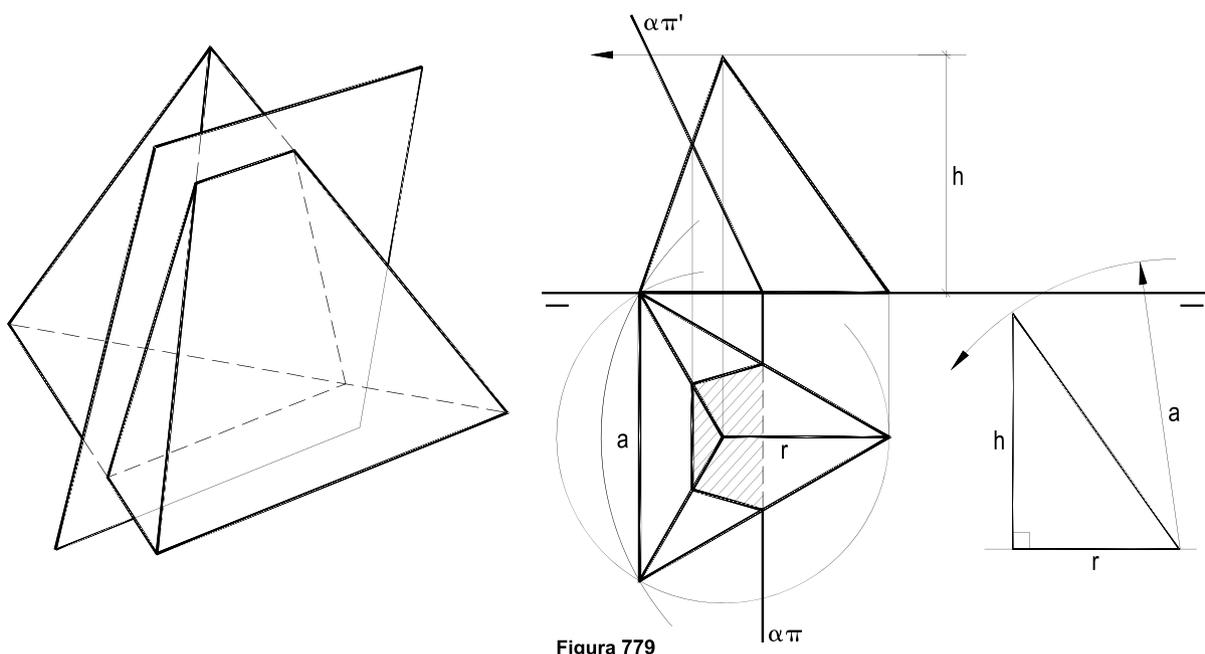


Figura 779

176.5 – Os planos paralelos a duas arestas opostas do tetraedro regular produzem seções retangulares (*Geometria Espacial*, número 105.8) (Figura 780).

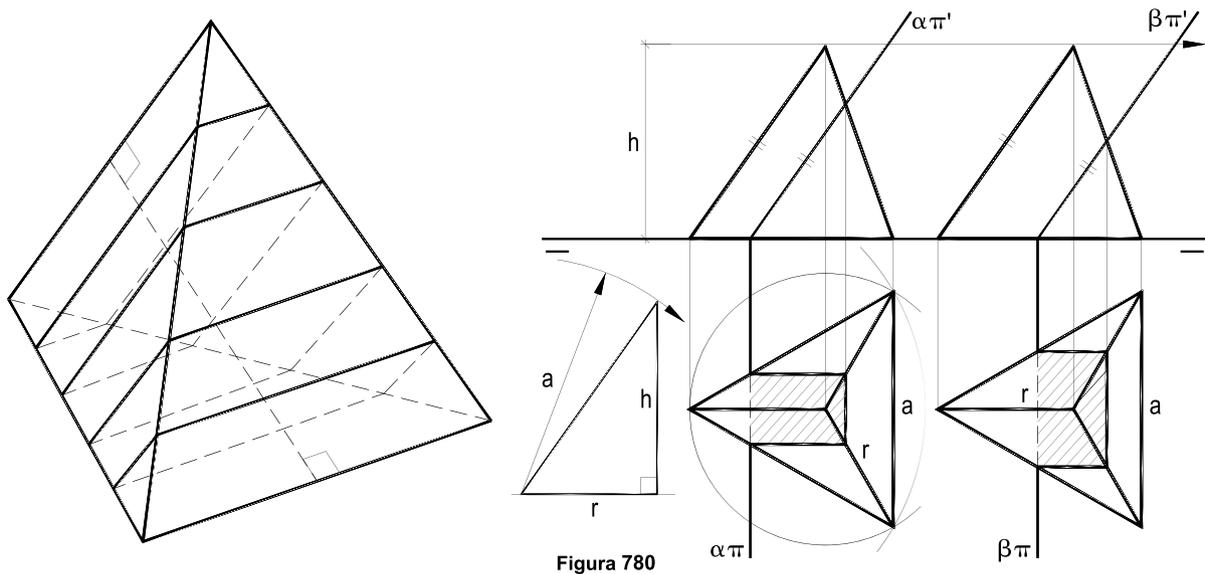


Figura 780

176.6 – No caso particular em que o plano secante, paralelo a duas arestas opostas do tetraedro regular, atinge as outras quatro arestas do sólido em seus pontos médios, a seção produzida é um quadrado de lado igual à metade da aresta do sólido (*Geometria Espacial*, número 105.9).

Disso decorre que o sólido inscrito num tetraedro regular, tendo por vértices os pontos médios de suas arestas, é um octaedro regular, cuja aresta vale a metade da aresta do tetraedro (*Geometria Espacial*, número 155.10).

Na Figura 781, as arestas do tetraedro foram apresentadas finas, para dar destaque ao octaedro.

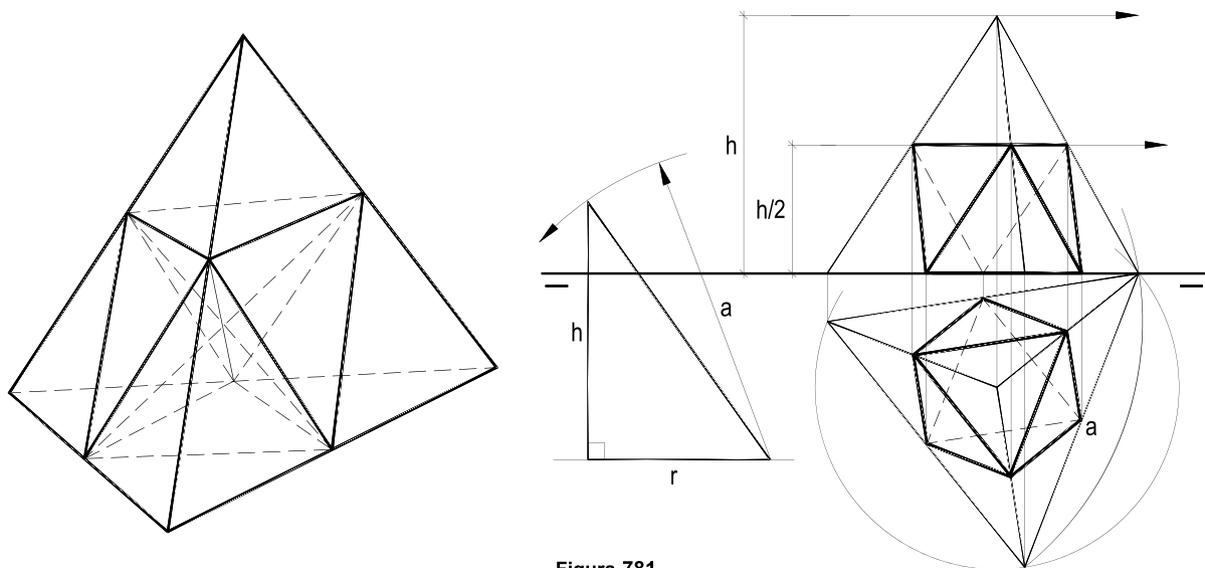


Figura 781

## 177 – Seções planas no hexaedro regular

Tal como feito com o tetraedro regular, para estudar as seções planas especiais que podem ser obtidas no cubo, consideraremos o sólido sempre apoiado por uma de suas faces em  $(\pi)$ , determinando, quando necessário, a V.G. da seção em estudo.

177.1 – Todas as seções produzidas num cubo por planos paralelos a uma face do sólido são quadradas e iguais às suas faces, translações que são dessa face (Figura 782).

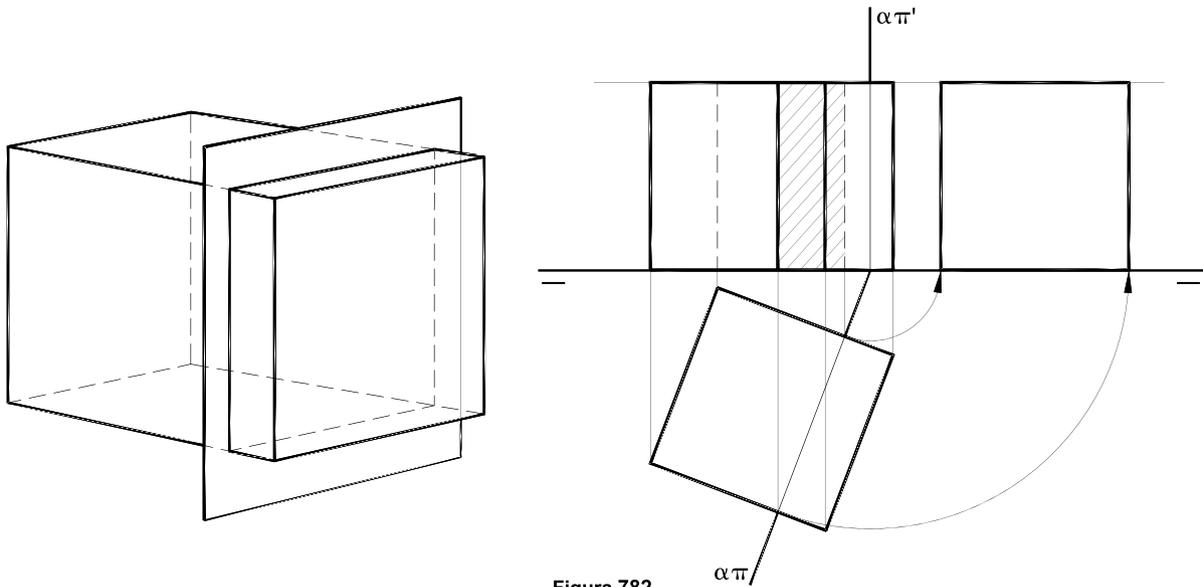


Figura 782

177.2 – Planos perpendiculares a uma face do cubo produzem, no sólido, seções retangulares ou quadradas (*Geometria Espacial*, número 111.2) Na Figura 783, apenas as verdadeiras grandezas das seções estão representadas.

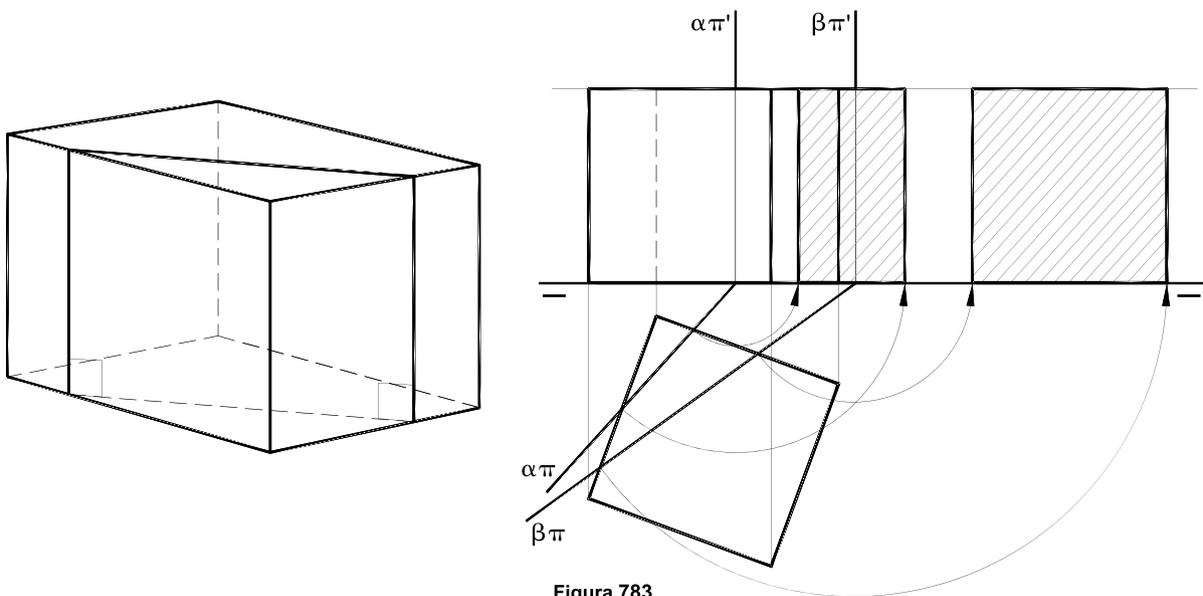


Figura 783

177.3 – Todo plano que corta quatro arestas paralelas de um cubo, e apenas estas, produz, por isso, no sólido, um paralelogramo (*Geometria Espacial*, número 111.3) (Figura 784).

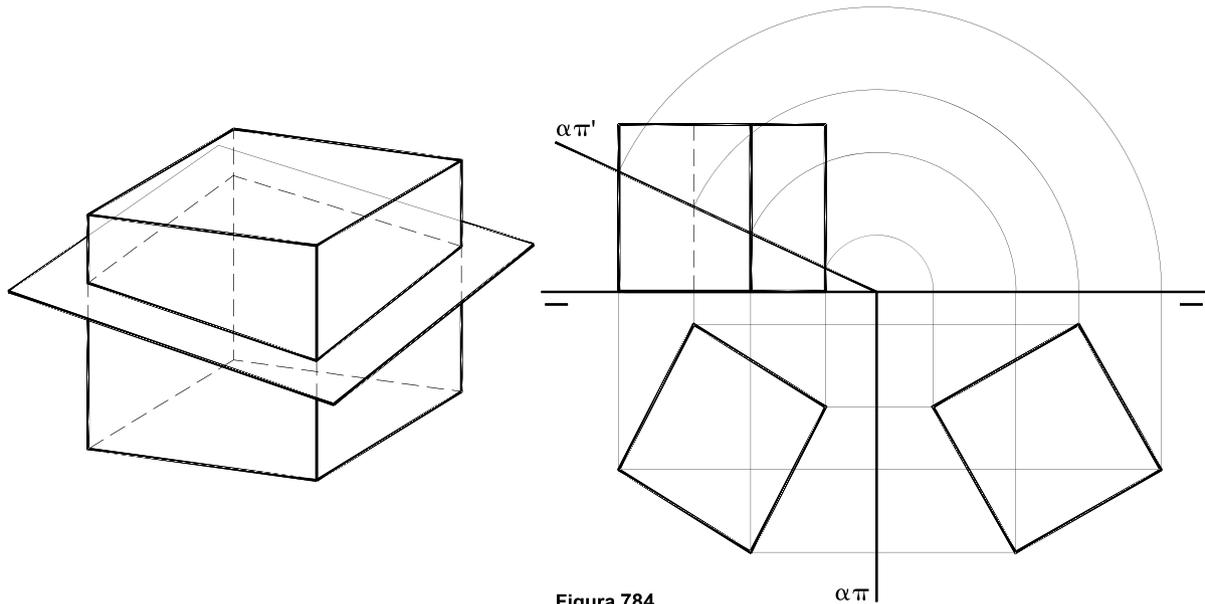


Figura 784

177.4 – Como caso particular da situação anterior, a seção plana será um losango, quando o plano secante ( $\alpha$ ) for paralelo a uma diagonal facial (*Geometria Espacial*, número 111.3), ou até um retângulo, ou um quadrado, nos casos abordados nos itens 177.1 e 177.2 anteriores.

177.5 – Os planos perpendiculares a uma diagonal de um cubo produzem, no sólido, seções triangulares equiláteras, ou hexagonais equiângulas (*Geometria Espacial*, número 111.11), conforme, respectivamente, atinjam as terças partes extremas dessa diagonal (Figura 785) ou seu terço central (Figura 786).

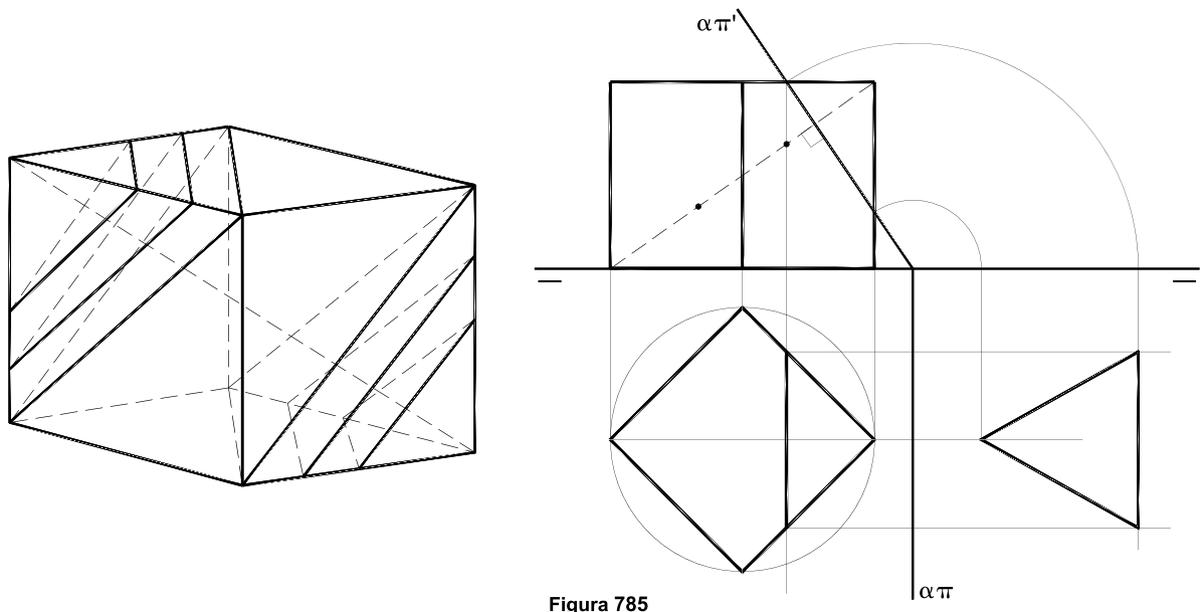


Figura 785

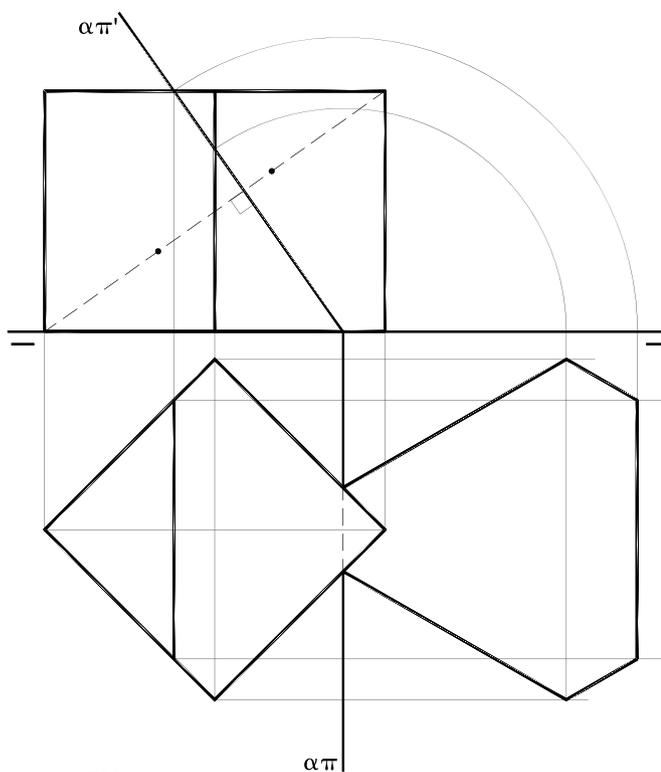
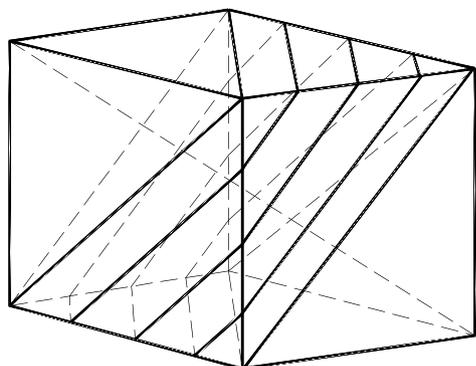


Figura 786

177.6 – O hexágono equiângulo seção, acima estudado, é regular quando o plano seção ( $\beta$ ) é o mediador da diagonal do cubo (*Geometria Espacial*, número 111.12) (Figura 787).

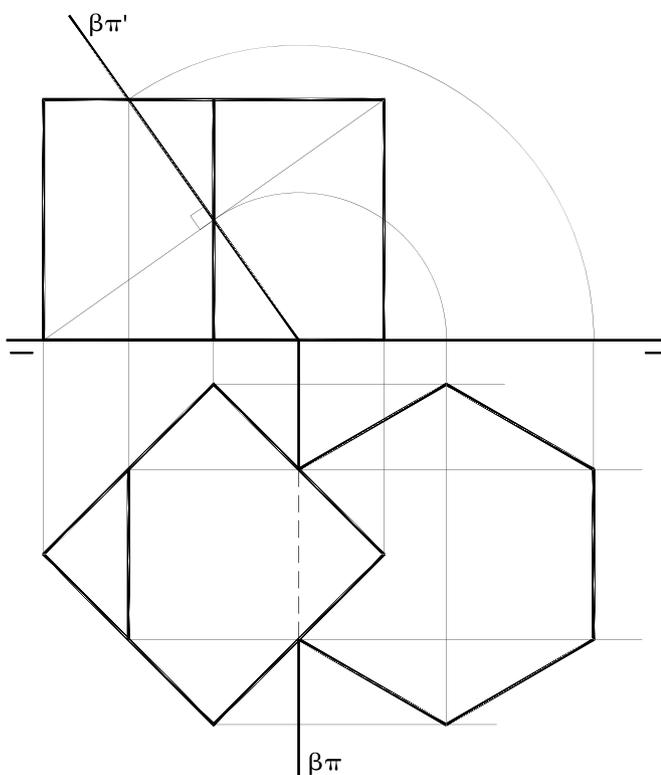
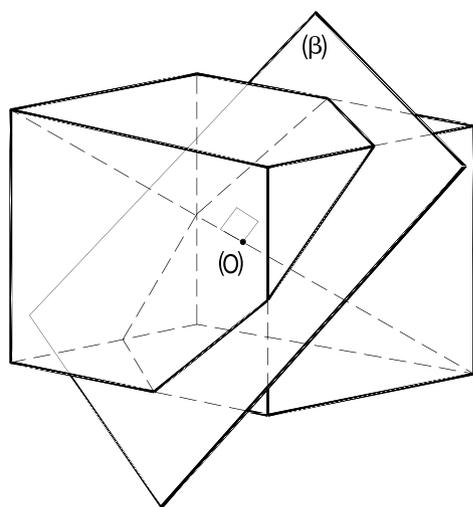


Figura 787

## 178 – Seções planas no octaedro regular

Para estudar as seções planas especiais no octaedro regular, consideraremos sempre o sólido com uma de suas diagonais na posição vertical, determinando, quando necessário, a V.G. da seção abordada.

178.1 – Todas as seções produzidas por planos perpendiculares a uma diagonal do octaedro regular são quadrados, homotéticos à seção diagonal perpendicular a essa diagonal (*Geometria Espacial*, número 114.9) (Figura 788).

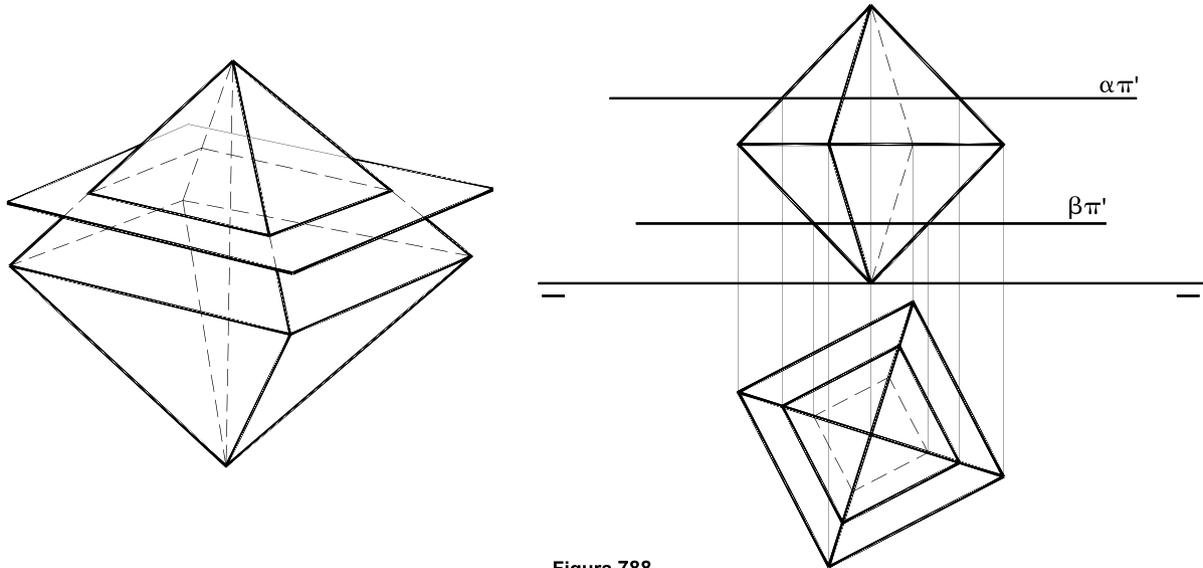


Figura 788

178.2 – Todos os planos pertencentes a uma diagonal do octaedro regular seccionam o sólido segundo um losango (*Geometria Espacial*, número 114.10) (Figura 789).

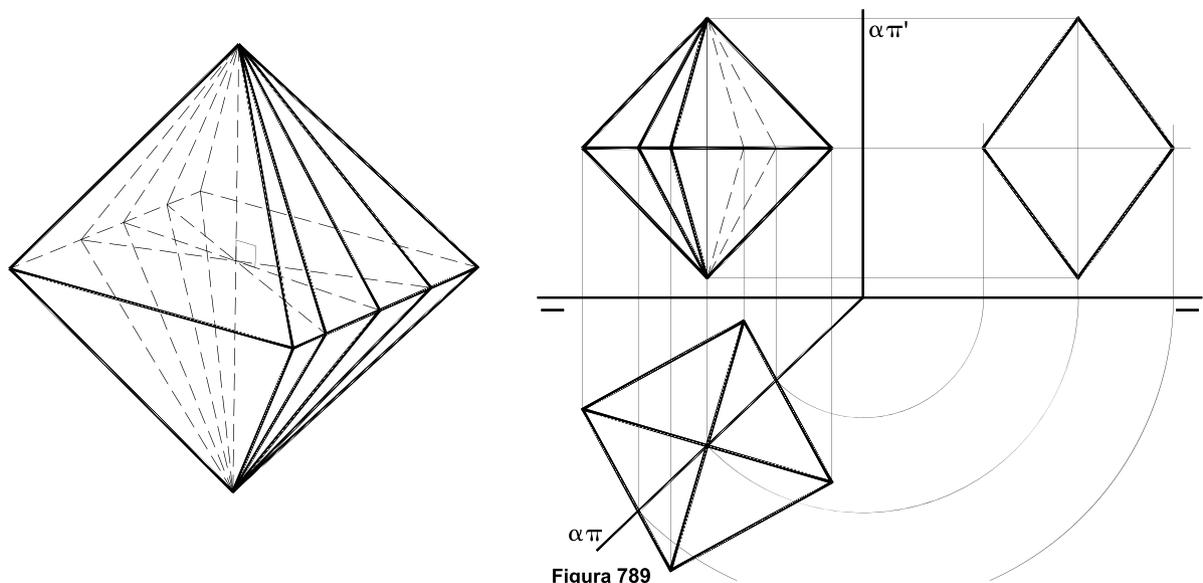


Figura 789

178.3 – Os planos pertencentes a apenas uma aresta do octaedro regular produzem, no sólido, por seções, trapézios isósceles (*Geometria Espacial*, número 114.13) (Figura 790).

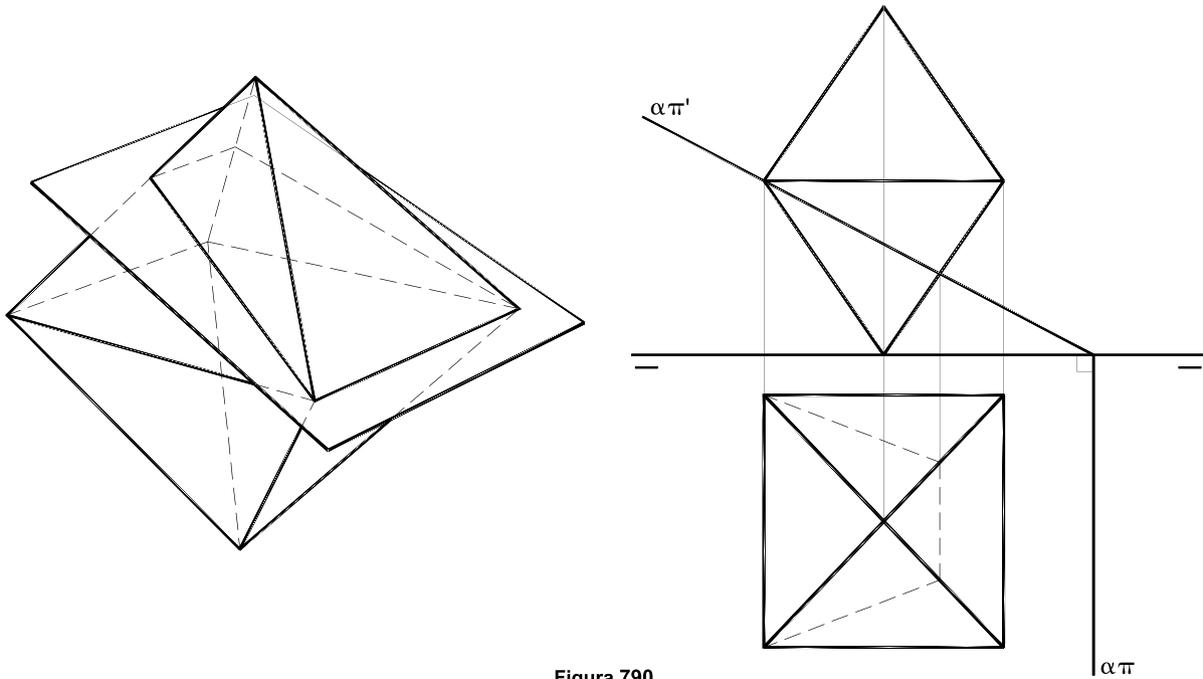


Figura 790

178.4 – Todos os planos paralelos apenas a duas arestas paralelas e secantes a apenas quatro arestas do octaedro regular cortam-no segundo trapézios, por serem, obrigatoriamente, paralelos a um plano pertencente a uma aresta do octaedro (item anterior) (Figura 791).

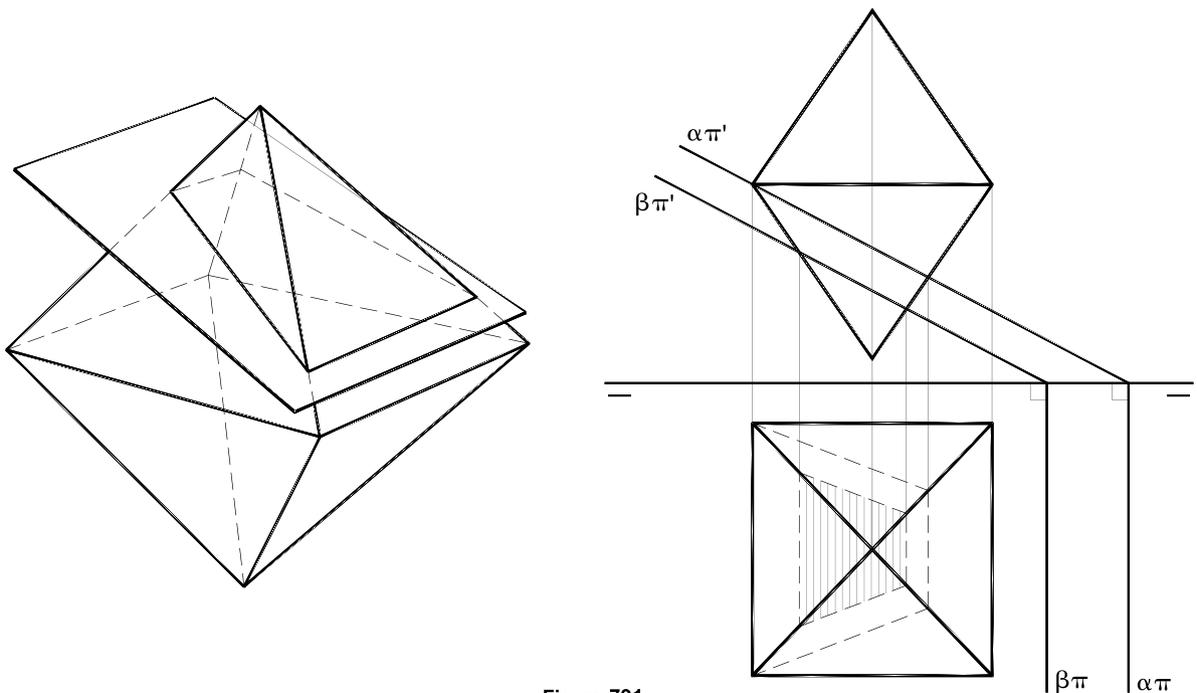


Figura 791

178.5 – Todos os planos paralelos a duas faces opostas do octaedro regular produzem, por seções, no sólido, hexágonos equiângulos (*Geometria Espacial*, número 114.15) (Figura 792).

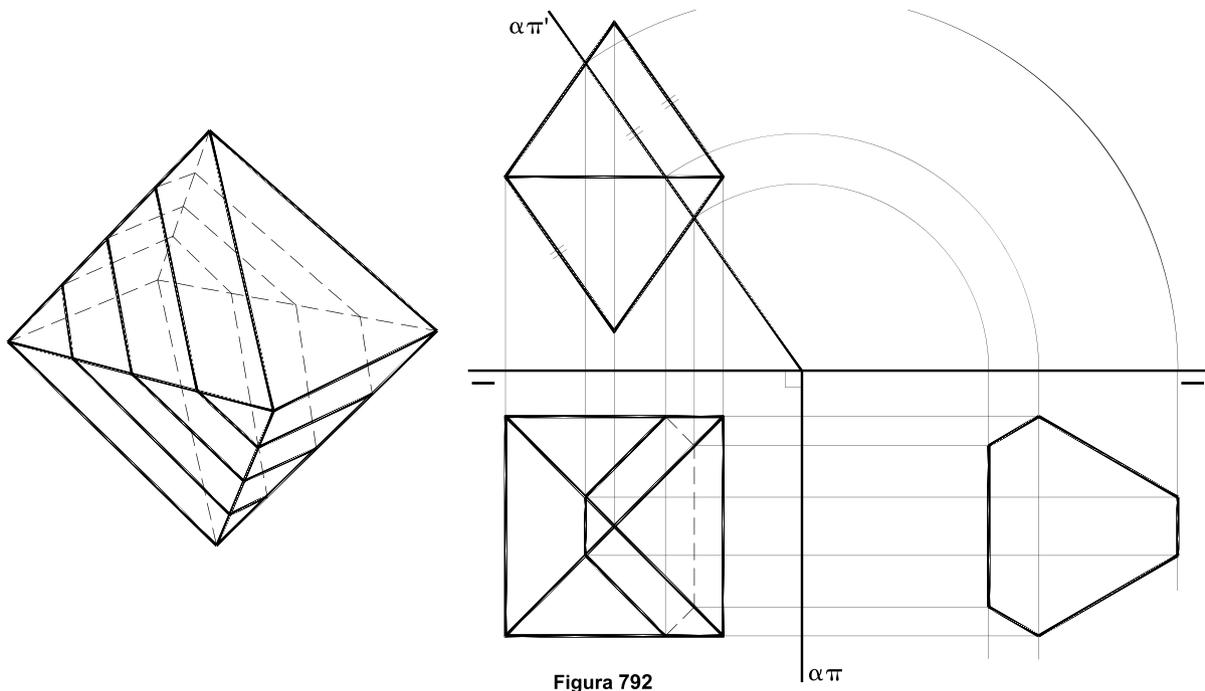


Figura 792

178.6 – No caso particular em que o plano secante ao octaedro regular, além do paralelo a duas faces opostas, equidista delas, isto é, passa pelo centro do sólido, a seção hexagonal produzida é regular (*Geometria Plana*, número 114.16) (Figura 793).

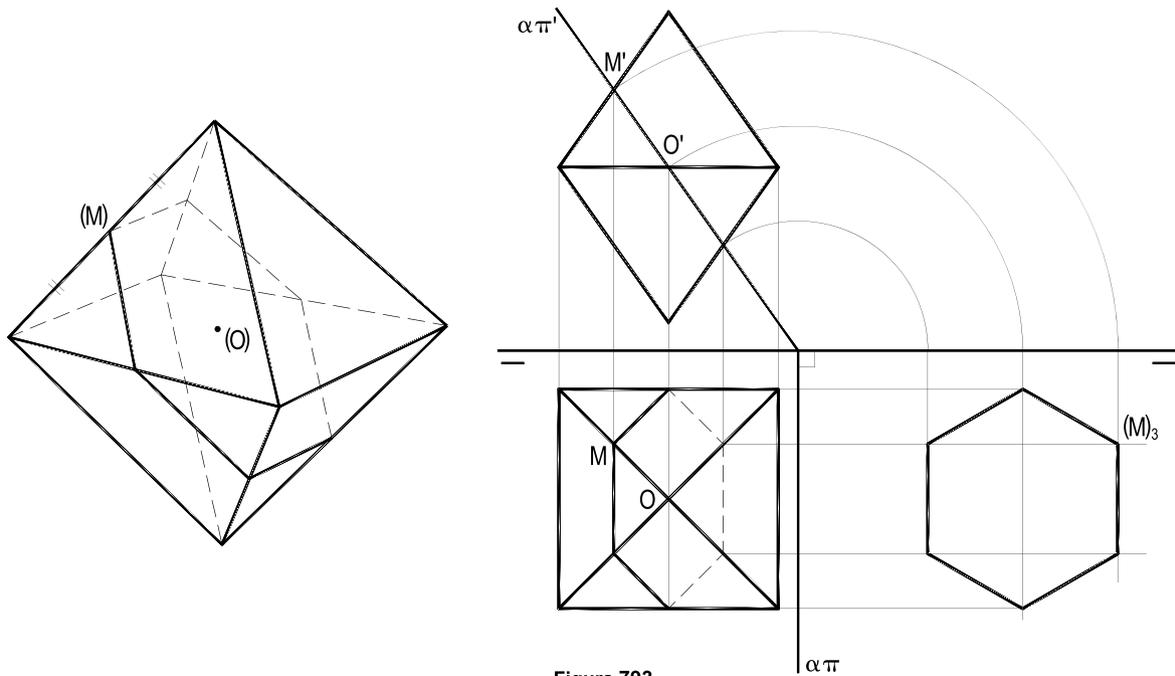


Figura 793

## 179 – Seções planas nos prismas e nos troncos de prismas

Tal como nos estudos anteriores, para apreciar as seções planas especiais produzidas em prismas e em troncos de prismas, consideraremos, sempre, tais sólidos apoiados por uma de suas bases em  $(\pi)$ . Sempre que entendido conveniente, as verdadeiras grandezas das seções planas serão acrescentadas às épuras.

179.1 – Todas as seções planas produzidas em paralelepípedos por planos que atinjam quatro arestas paralelas do sólido são paralelogramos (*Geometria Plana*, número 130.6) (Figura 794).

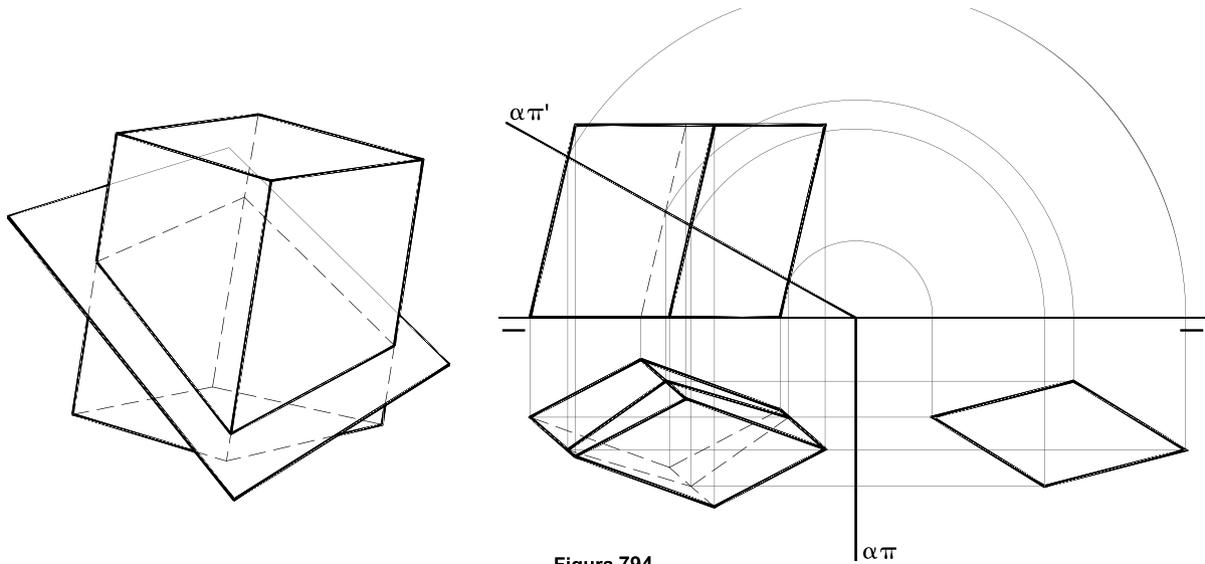


Figura 794

179.2 – Todos os planos paralelos às bases de um prisma, ou a uma das bases de um tronco de prisma, produzem seções planas iguais, por translação, à base a que são paralelos (Figura 795).

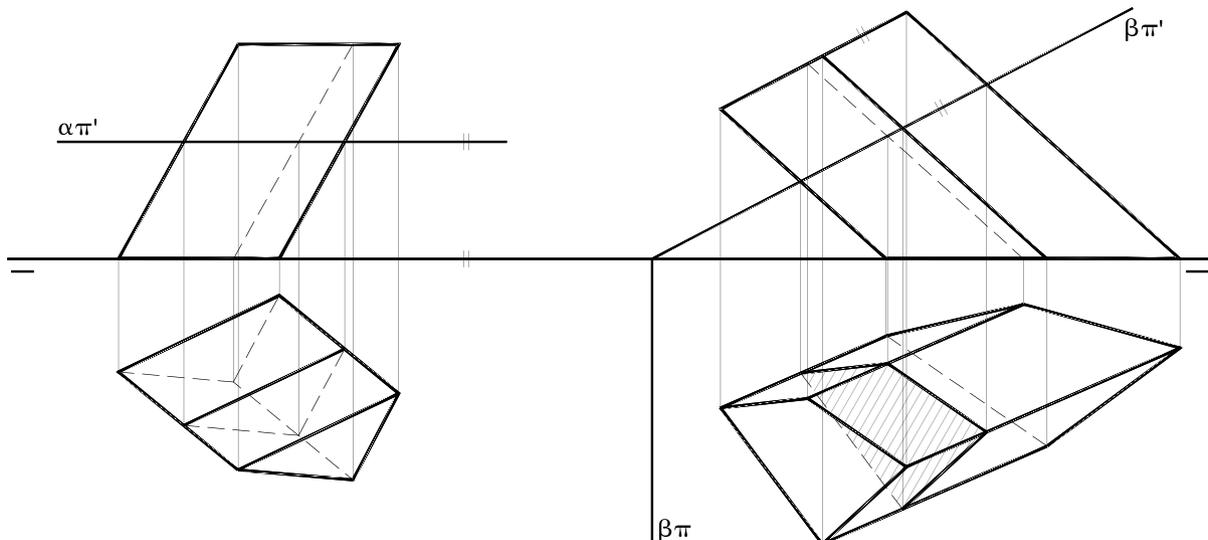


Figura 795

179.3 – Todo plano paralelo às arestas laterais de um prisma produz, no sólido, por seção, um paralelogramo (Figura 796), porque as faces laterais que ele atinge são cortadas segundo uma direção a ele paralela.

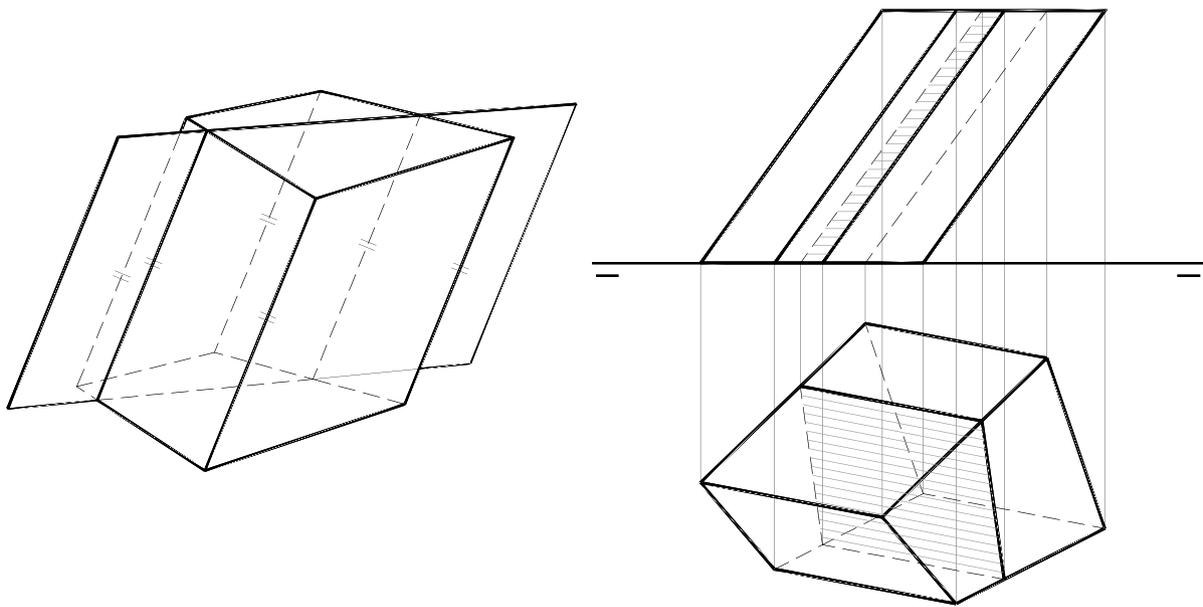


Figura 796

179.4 – Todo plano paralelo às arestas laterais de um tronco de prisma e secante ao sólido produz nele, por seção, um trapézio, cujas bases são paralelas a essas arestas, pelo mesmo motivo destacado no item anterior (Figura 797). Eventualmente (quando o plano secante é também paralelo à interseção dos planos das bases do tronco), tal seção plana passa a ser um paralelogramo.

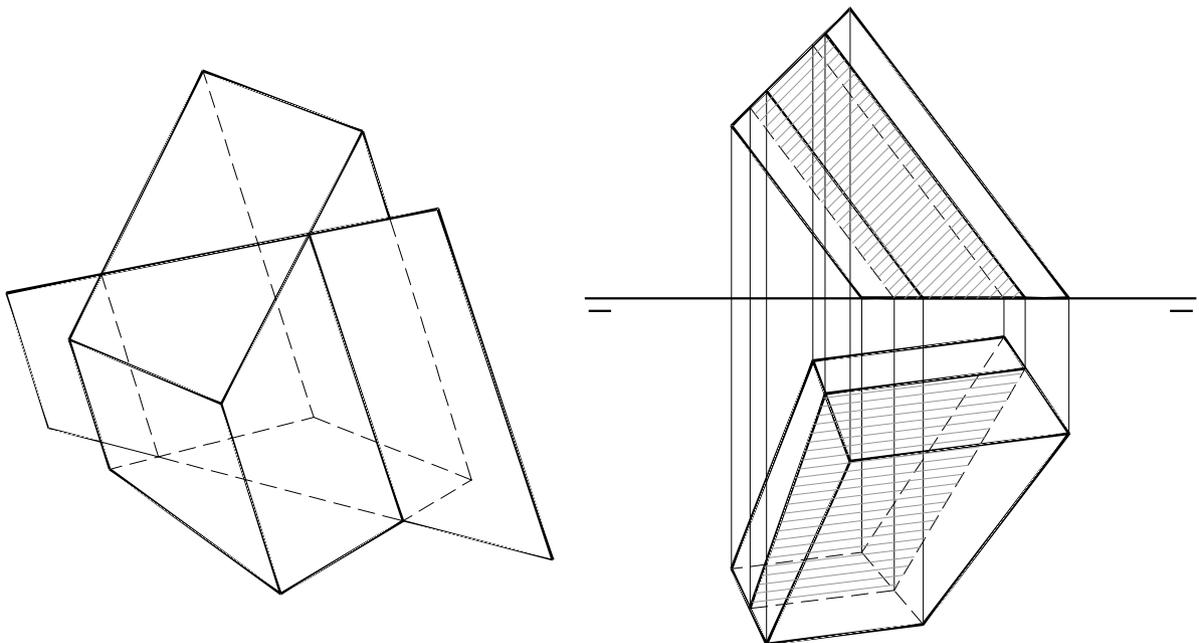


Figura 797

## 180 – Seções planas nas pirâmides e nos troncos de pirâmides

Mais uma vez, para o estudo a desenvolver, os sólidos serão considerados assentes pela base – ou por uma delas, para o caso dos troncos – em  $(\pi)$ .

180.1 – Todo plano paralelo ao da base de uma pirâmide, ou de uma das bases de um tronco de pirâmide, produz, por seção, um polígono homotético ao da base a que é paralelo (Figura 798).

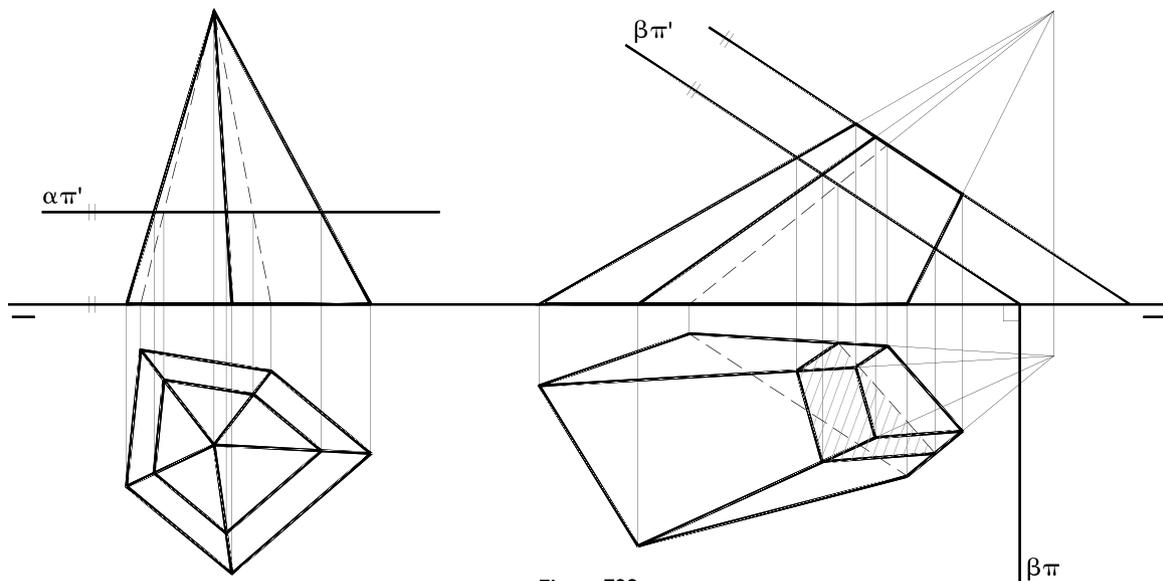


Figura 798

180.2 – Todo plano secante a uma pirâmide e pertencente ao seu vértice produz, por seção, um triângulo; todo plano secante a um tronco de pirâmide de bases paralelas, que contém o vértice da pirâmide da qual se extraiu o tronco, produz, por seção, um trapézio (Figura 799).

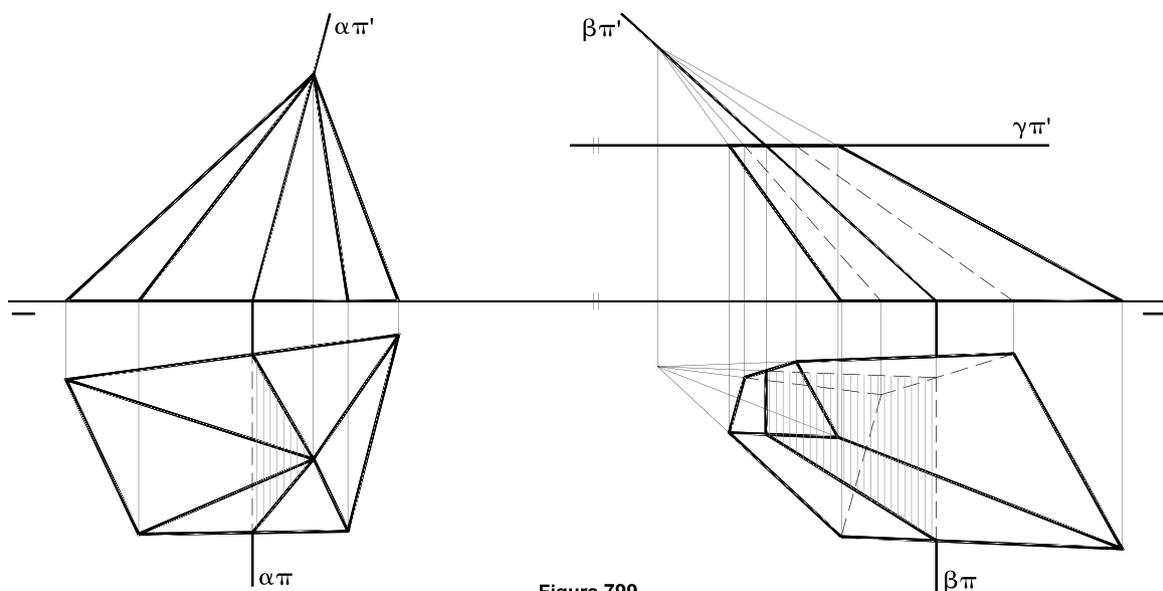


Figura 799

## 181 – Determinação da seção plana num poliedro

A determinação da seção que um plano dado produz num poliedro, também dado, ou construído a partir de informações fornecidas, se faz, obviamente, pela obtenção dos traços das arestas atingidas com o plano secante e pela união ordenada desses pontos.

Naturalmente a resolução será simplificada sempre que o plano secante for projetante.

Vejamos os exemplos seguintes:

181.1 – Determinar as projeções e a verdadeira grandeza da seção que o plano vertical ( $\alpha$ ), transparente, dado por seus traços, produz no prisma hexagonal oblíquo, dado pelas projeções de seus vértices.

Solução: Por ser projetante, o plano ( $\alpha$ ), secante ao poliedro, produz imediata seção nele, identificada em sua projeção horizontal sobre o traço horizontal  $\alpha\pi$  (Figura 800).

A partir dessa projeção horizontal ABCDEF, obtém-se a projeção vertical correspondente e, com um rebatimento do plano ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi'$ ), vem a V.G.  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1(E)_1(F)_1$  da seção plana pedida (Figura 800).

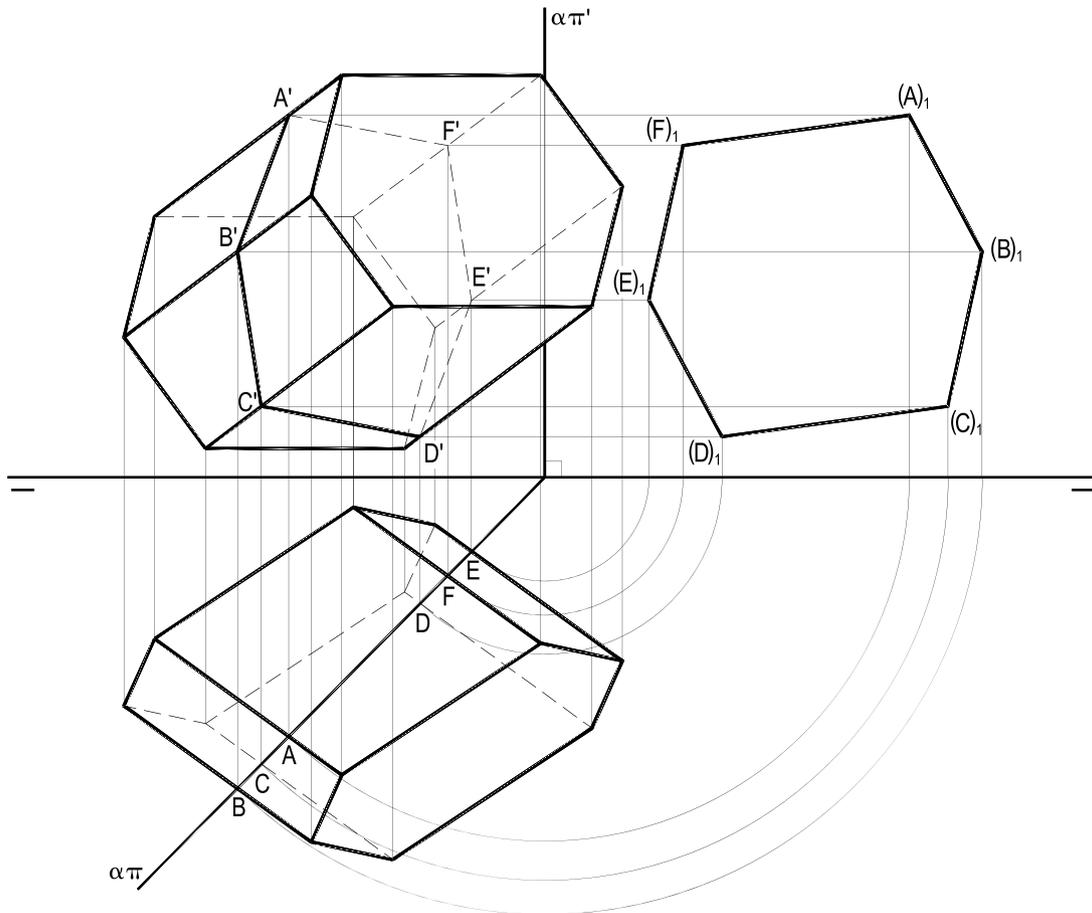


Figura 800

181.2 – A pirâmide hexagonal oblíqua (V)–(A)(B)(C)(D)(E)(F) tem sua base, regular, no plano frontal ( $\gamma$ ) e sua face (V)(A)(B) em ( $\pi$ ), ficando inteiramente situada no primeiro diedro.

Sendo dado o traço  $\gamma\pi$ , as abscissas  $x_A$  e  $x_B$  dos pontos A e B e a projeção horizontal do vértice V, pede-se construir as projeções da pirâmide, bem como as projeções e a V.G. da seção que o plano horizontal, transparente, ( $\alpha$ ) nela produz.

( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) são simétricos em relação a ( $\beta_{13}$ ).

Solução: Por serem simétricos em relação a ( $\beta_{13}$ ), ( $\alpha$ ) tem cota igual ao afastamento de ( $\gamma$ ), como atesta o corte de perfil apresentado na Figura 801.

Obtida, de imediato, a projeção vertical da seção plana pedida, por ser horizontal o plano secante, sua projeção horizontal  $\bar{M} \bar{C} \bar{D} \bar{E} \bar{F} \bar{N}$  se faz em V.G. (Figura 801).

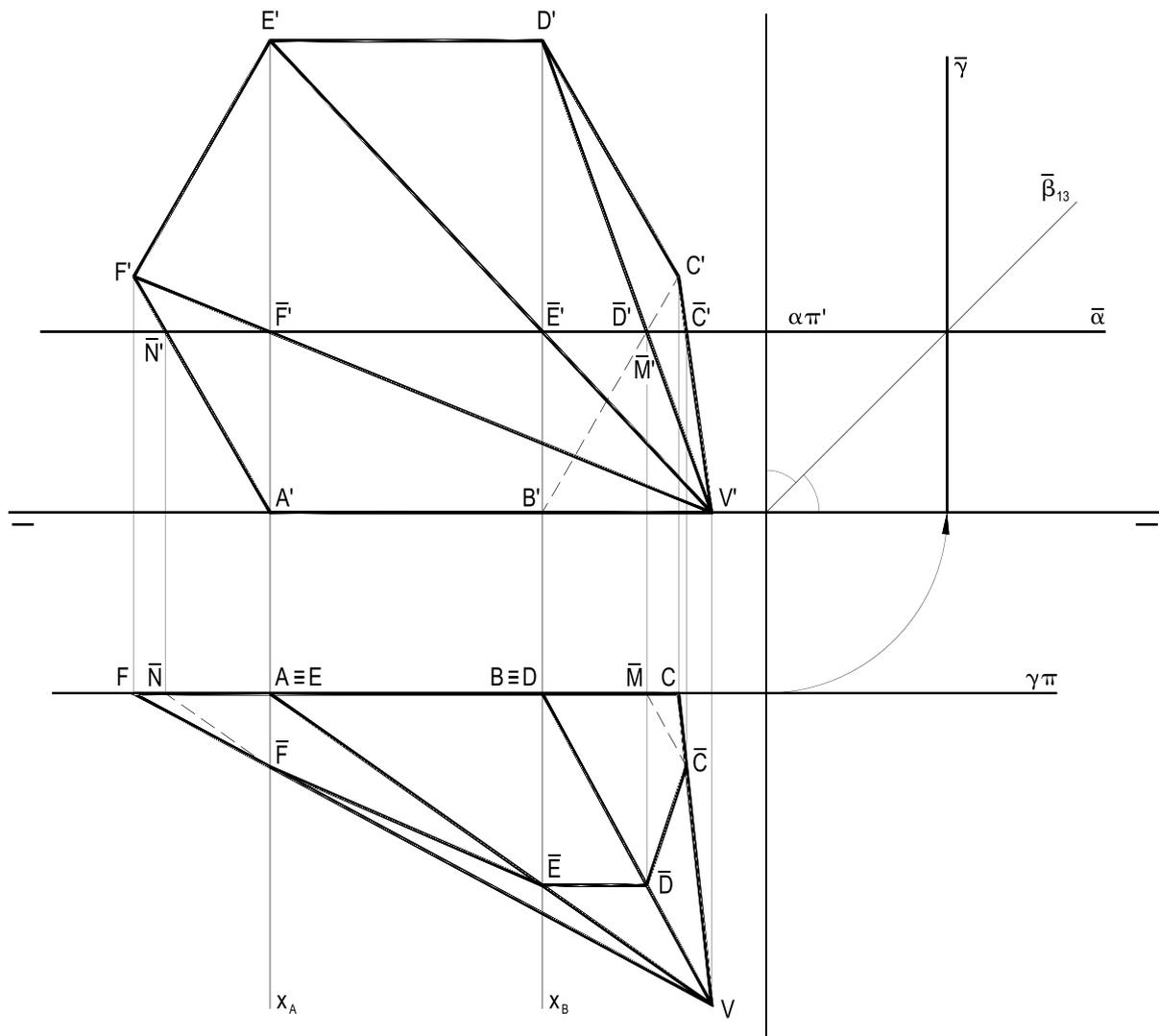


Figura 801

181.3 – Um prisma pentagonal oblíquo tem as bases situadas em planos de topo e as arestas laterais frontais.

Dadas as suas duas projeções, pede-se construir as projeções e a verdadeira grandeza de sua seção reta, produzida por um plano pertencente à origem das abscissas.

Solução: Como as arestas laterais do prisma são retas frontais, a seção reta procurada, por ter de ser perpendicular a essas arestas (número 175), há de ser produzida por um plano ( $\alpha$ ) de topo e e, como imposto, passando pela origem O das abscissas (Figura 802).

E, por ser projetante, ( $\alpha$ ) proporciona imediata seção  $(A)(B)(C)(D)(E)$ , cuja V.G.  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1(E)_1$  é obtida por seu rebatimento sobre  $(\pi')$  (Figura 802).

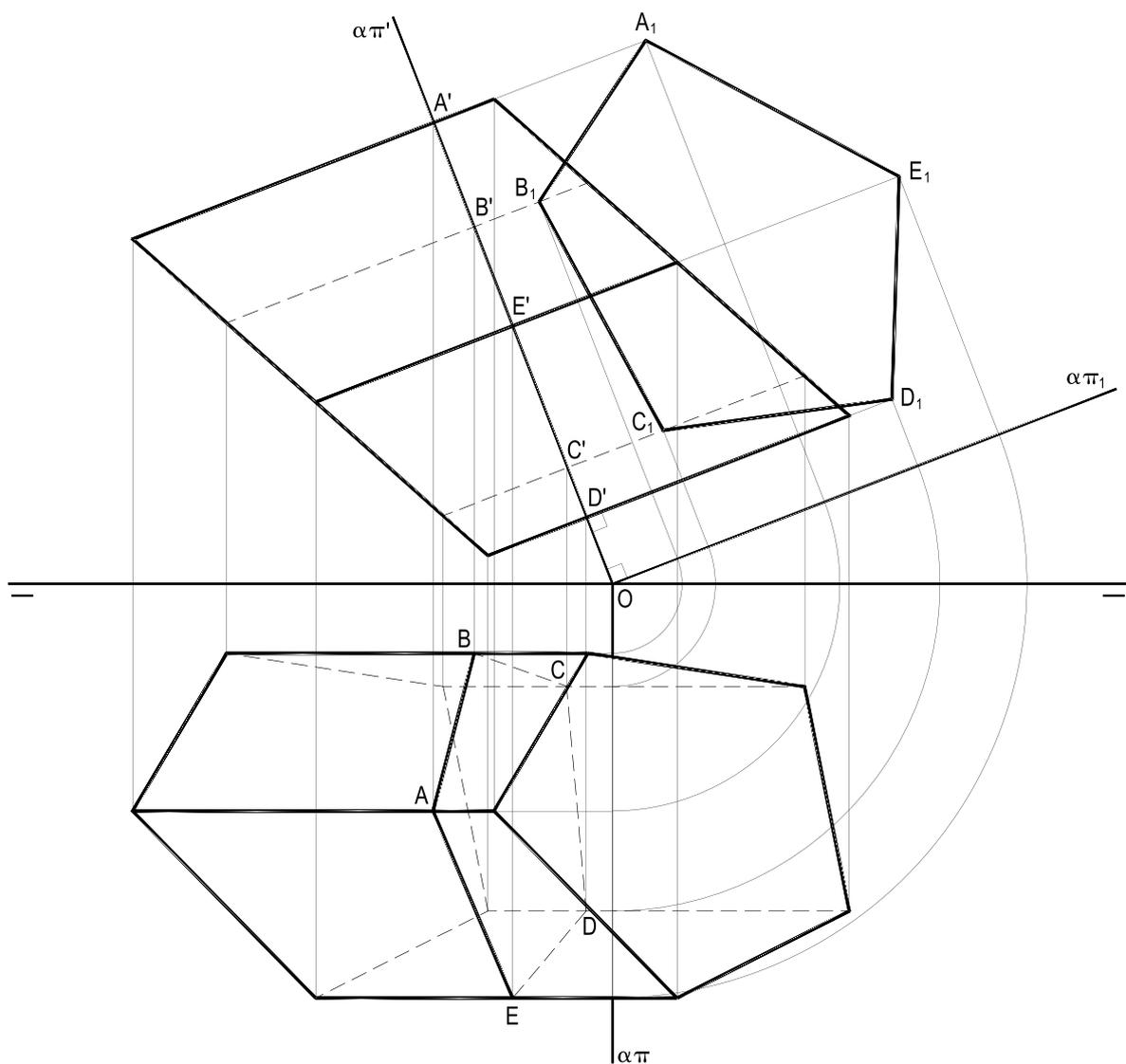


Figura 802

181.4 – O tetraedro regular (J)–(A)(B)(C) tem a face (A)(B)(C) de perfil e está inteiramente situado no primeiro diedro.

Dadas as projeções dos vértices (A) e (B), e sabendo que o vértice (J) tem abscissa inferior a dos demais, pede-se construir as projeções do sólido, bem como as da seção que o plano vertical ( $\alpha$ ), opaco e dado por seus traços, nele produz.

Pede-se, também, a V.G. dessa seção plana.

Solução: Com um rebatimento do plano de perfil da aresta dada (A)(B), obtém-se o vértice (C), bem como a medida  $h$  da altura do tetraedro, o que proporciona a determinação do vértice (J).

A verdadeira grandeza  $(R)_1(S)_1(T)_1$  da seção vem com o rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi'$ ) (Figura 803).

Observe-se que, mesmo sendo opaco, o plano secante, por ser vertical, não interfere na visibilidade da projeção horizontal.

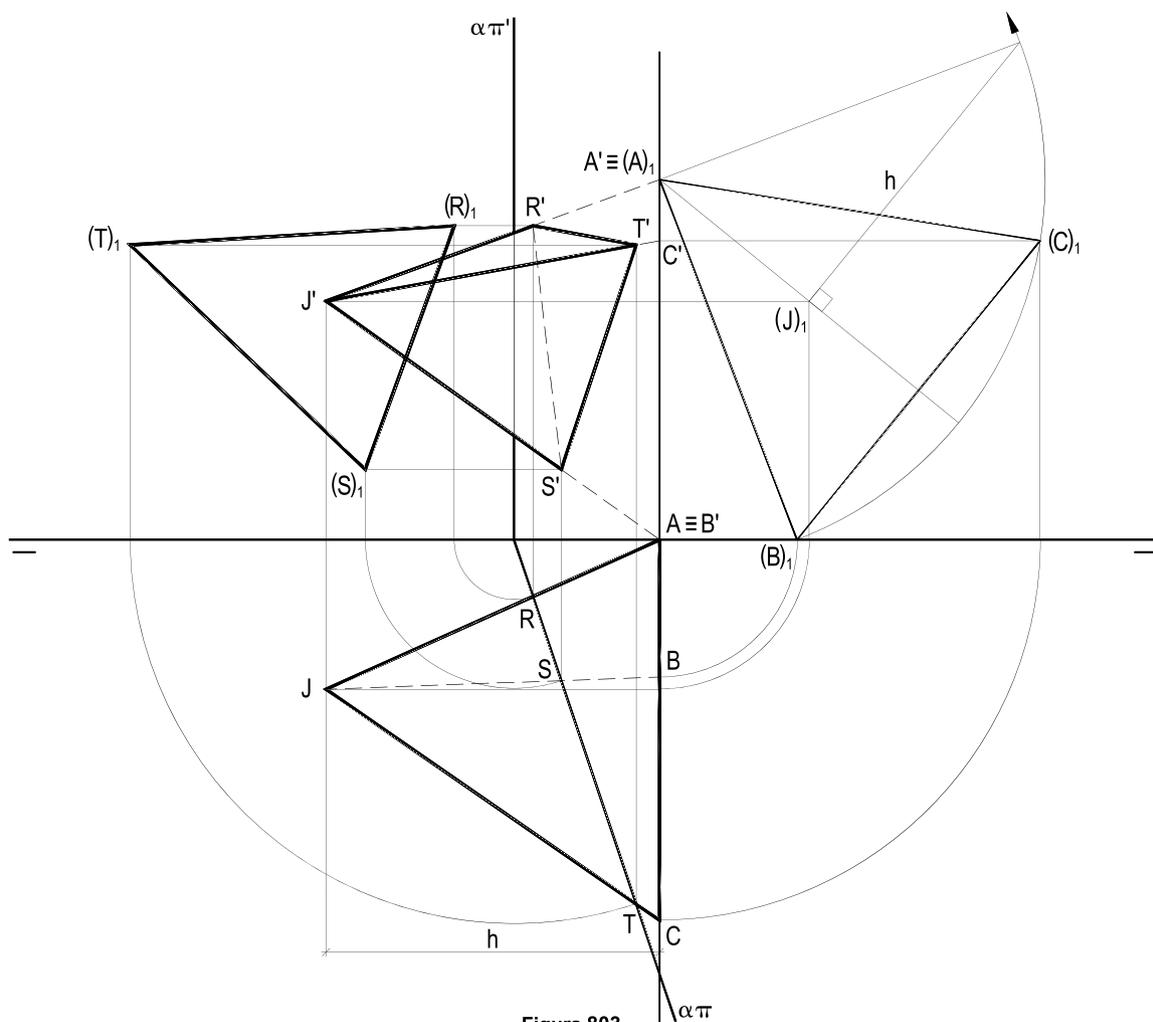


Figura 803

181.5 – Um tronco de pirâmide regular de primeira espécie tem sua base maior (A)(B)(C)(D)(E)(F) em ( $\pi'$ ) e a menor no plano frontal ( $\gamma$ ), dado por seu traço horizontal  $\gamma\pi$ .

Sabendo que o tronco foi extraído da pirâmide regular (V) – (A)(B)(C)(D)(E)(F) e conhecendo o afastamento  $y_V$ , do vértice (V), e as projeções verticais  $A'$  e  $B'$ , dos vértices (A) e (B), pede-se construir as projeções do tronco e da seção nele produzida pelo plano vertical ( $\alpha$ ), dado por seus traços, além da V.G. dessa seção. Considere-se transparente o plano ( $\alpha$ ).

Solução: Conhecidos  $A'$  e  $B'$ , porque as projeções verticais das duas bases se fazem em V.G., é imediato construí-las, como também o é obter a seção plana produzida pelo plano ( $\alpha$ ), por ser ele projetante (Figura 804), cuja V.G. se consegue pelo rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi'$ ).

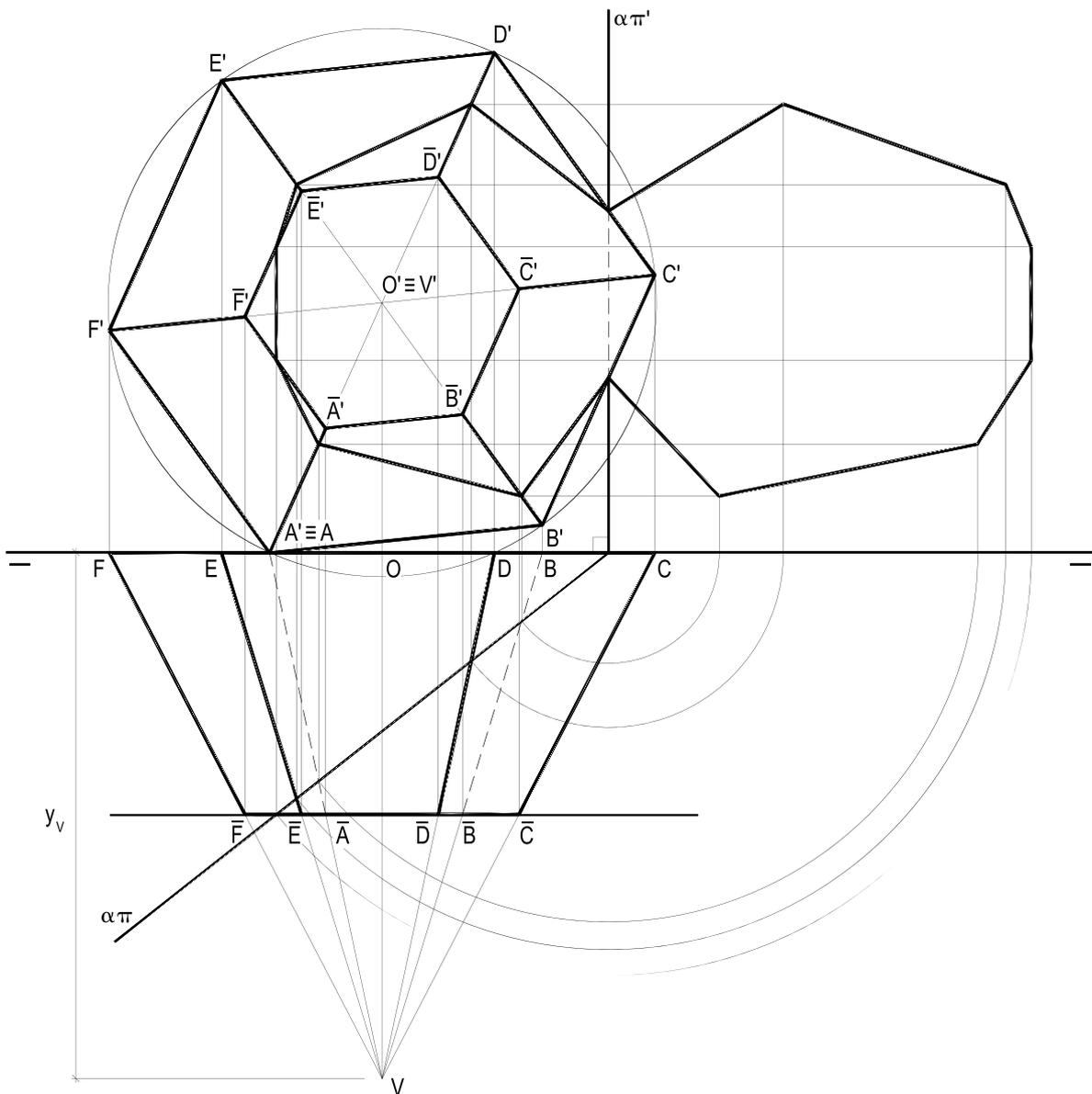


Figura 804

181.6 – Uma superfície prismática fechada pentagonal tem suas arestas paralelas simultaneamente aos planos  $(\varphi)$  e  $(\theta)$ , ambos dados por seus traços. Essas arestas cortam  $(\pi)$  respectivamente nos pontos (A), (B), (C), (D) e (E), dados por suas projeções horizontais.

Construir as projeções de tronco de prisma limitado nessa superfície por dois planos  $(\alpha)$  e  $(\gamma)$ , sabendo que  $(\alpha)$  é a do topo e  $(\gamma)$  vertical, ambos dados por seus traços.

Considerar todos os planos transparentes.

Solução: De início, determina-se a interseção  $(r)$  entre os planos  $(\varphi)$  e  $(\theta)$  (Figura 806), à qual as arestas da superfície prismática em estudo devem ser paralelas (número 62). Tal interseção é rapidamente obtida pela união dos pontos (1) e (2) comuns aos traços de mesmo nome desses dois planos (Figura 806).

Traça-se, então, as paralelas a  $(r)$ , pelos pontos dados (A), (B), (C), (D) e (E) (Figuras 805 e 806), obtendo-se a superfície.

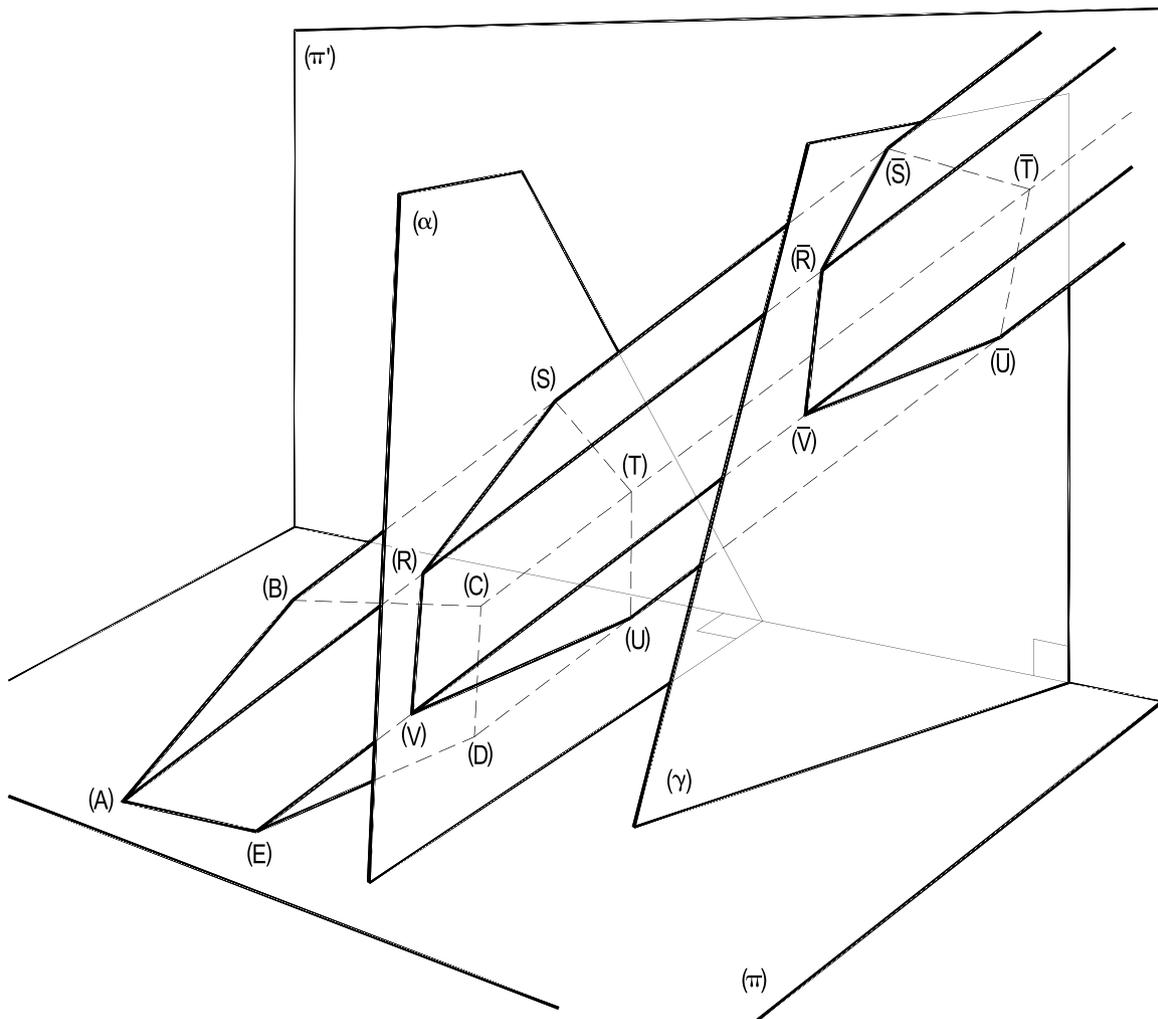


Figura 805

As duas seções  $(R)(S)(T)(U)(V)$  e  $(\bar{R})(\bar{S})(\bar{T})(\bar{U})(\bar{V})$  que os planos  $(\alpha)$  e  $(\varphi)$  produzem na superfície prismática são de simples obtenções, por serem ambos planos projetantes (Figura 806).

Quanto à visibilidade, convém notar, para a projeção horizontal, a menor cota do vértice  $(U)$ , que torna invisível sua projeção horizontal  $U$ , e o fato da segunda base  $(\bar{R})(\bar{S})(\bar{T})(\bar{U})(\bar{V})$  do tronco de prisma estar à frente da outra, garantindo sua visibilidade na projeção vertical do sólido (Figura 806).

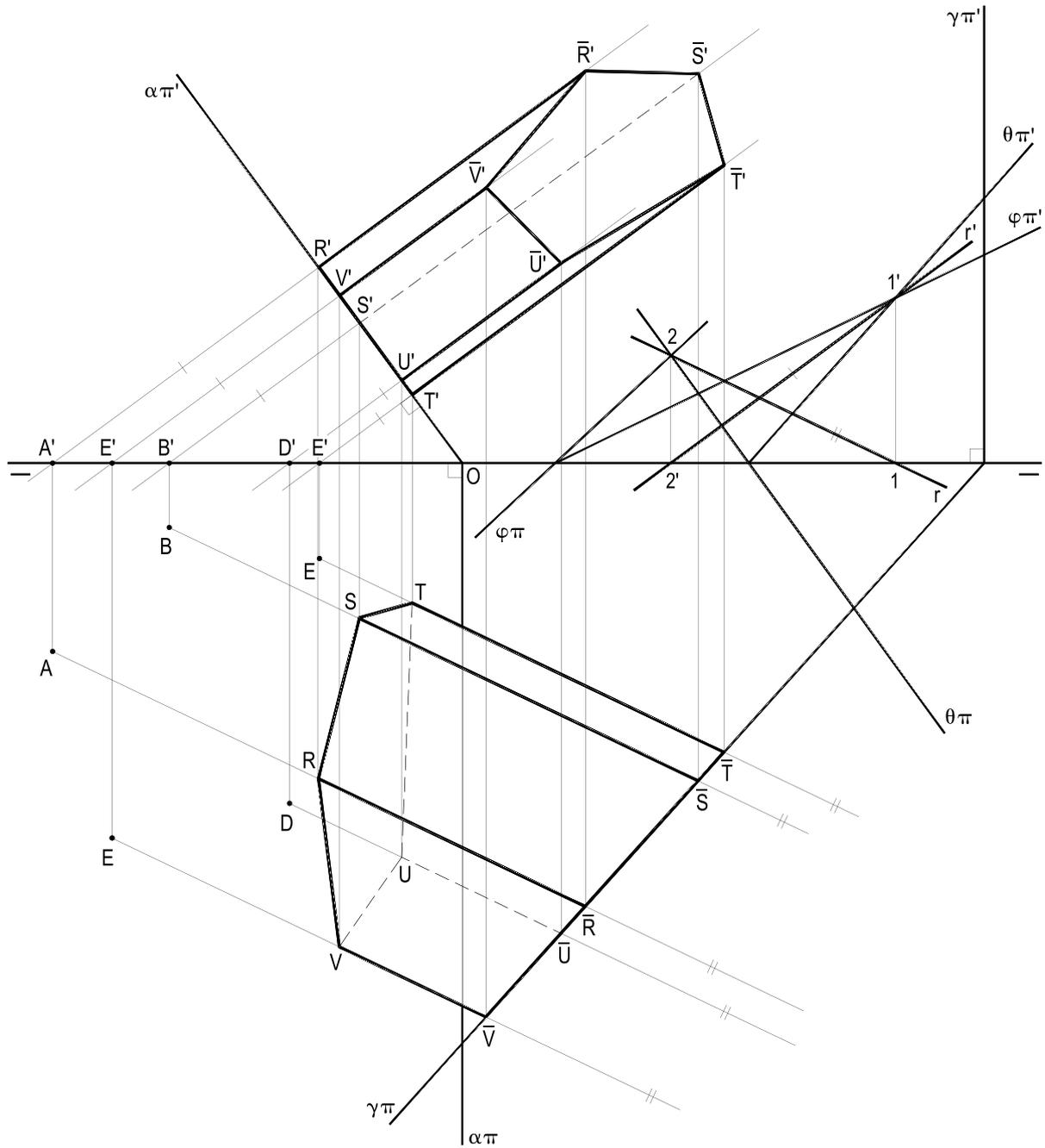


Figura 806

181.7 – Um ortoedro (A)(B)(C)(D) – (R)(S)(T)(U), de bases retangulares, está assente pela base (A)(B)(C)(D) no plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, e tem o vértice (S) no plano de perfil que contém a origem O das abscissas.

Tendo sido dadas as projeções verticais  $A'$  e  $B'$  dos vértices (A) e (B), sabendo que (C) pertence a ( $\pi'$ ) e que o sólido se situa no primeiro diedro, pede-se construí-lo e determinar a seção que o plano frontal ( $\gamma$ ), transparente, dado por seu traço horizontal, nele produz.

Solução: Para construção, em V.G., do retângulo  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1$ , rebata-se o plano ( $\alpha$ ) que o contém, fazendo  $(C)_1$  pertencer a  $\alpha\pi'_1$  (Figura 807).

As arestas laterais, evidentemente, foram traçadas perpendicularmente ao plano ( $\alpha$ ).

A seção pedida é de imediata determinação, por ser ( $\gamma$ ) projetante.

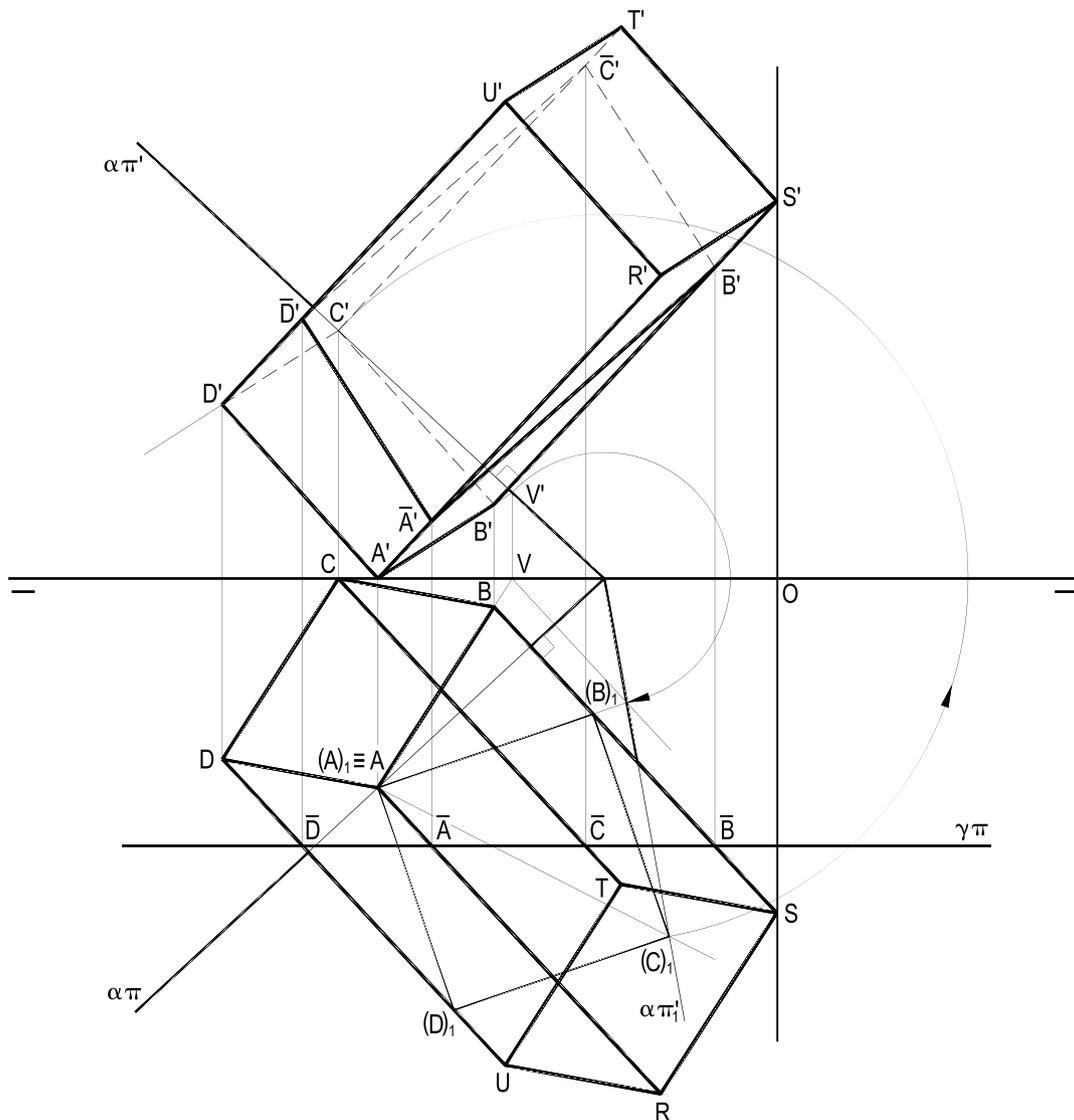


Figura 807

181.8 – O octaedro regular (J)–(A)(B)(C)(D)–(S) é seccionado pelo plano transparente ( $\alpha$ ), dado por seus traços.

Do sólido, apoiado pelo vértice (S) em ( $\pi$ ) e inteiramente situado no primeiro diedro, são dadas as projeções da diagonal vertical (J)(S) e informado que o vértice (A) tem abscissa nula, aliás a menor dentre as de todos os vértices do sólido.

Pede-se construir as projeções do octaedro e da seção que ( $\alpha$ ) produz nele.

Solução: Definido o vértice (A), por suas abscissa e cota e por sua distância em V.G. em projeção horizontal à da projeção do mesmo nome  $V \equiv S$  da diagonal (V)(S), torna-se simples completar o octaedro.

Para a construção da seção plana pedida, foi utilizada uma mudança de ( $\pi$ ), que, transformando o plano secante ( $\alpha$ ) em vertical, simplificou sobremodo a resolução (Figura 808).

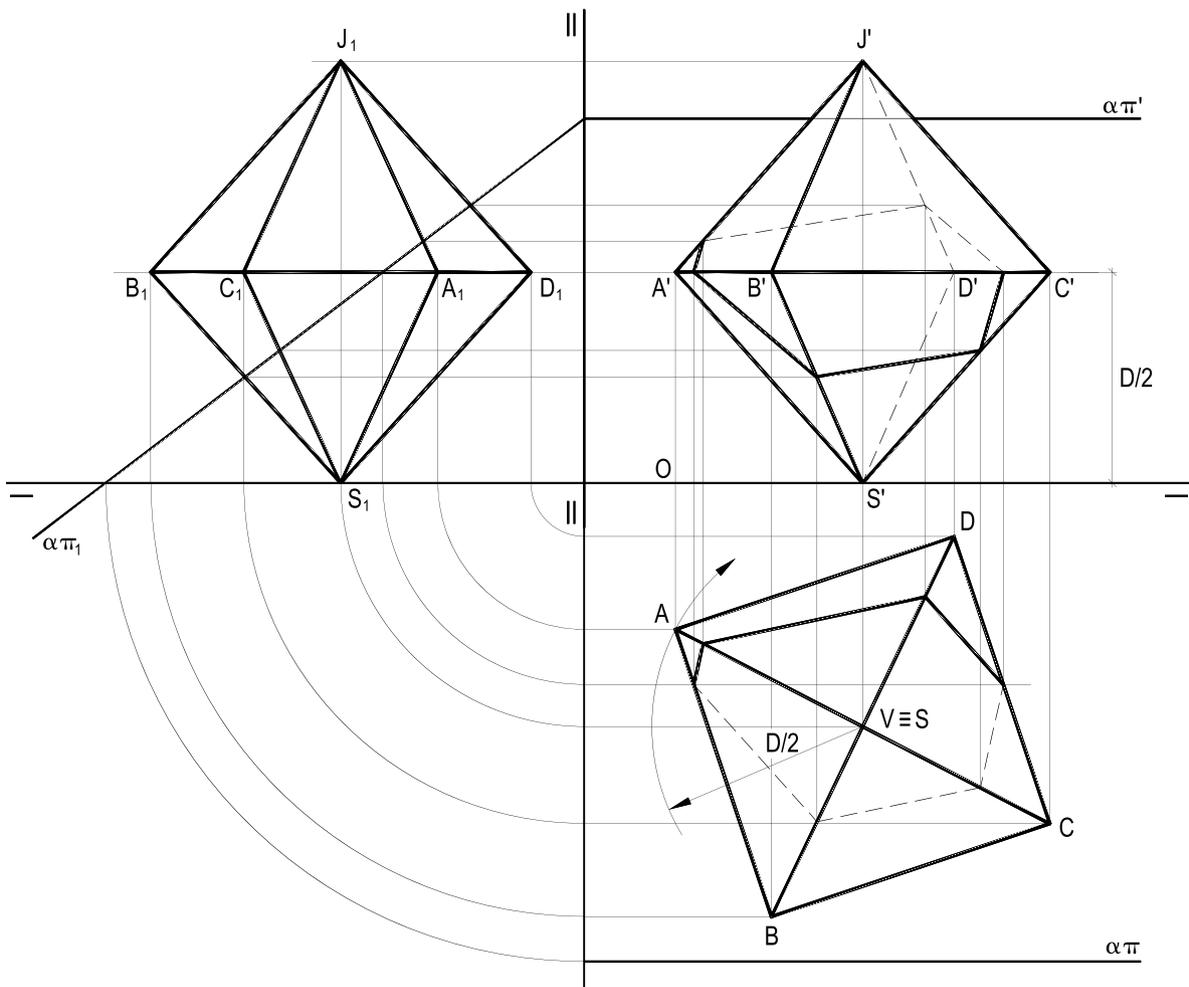


Figura 808

181.9 – Um prisma reto (A)(B)(C) – (R)(S)(T) é seccionado por dois planos horizontais ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), dados por seus traços. Sabendo que o prisma não é cortado pelos planos de projeção e que o vértice (R) tem abscissa nula, pede-se construir as projeções das duas seções planas, admitindo transparentes os dois planos secantes.

São dadas as duas projeções da base (A)(B)(C).

Solução: Devido as posições particulares das arestas (A)(B) e (A)(C), tem-se, de imediato, os traços de seu plano ( $\theta$ ), permitindo as construções das arestas laterais, todas perpendiculares a ( $\theta$ ). A partir do primeiro vértice (R) da segunda base do prisma, fica bem simples completá-la, por paralelas, assim como obter as duas seções planas pedidas, por serem horizontais os planos secantes ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) (Figura 809) que, aliás, apresentam-se em V.G. em suas projeções horizontais.

Observar que uma seção é triangular e a outra quadrangular, por atingir, também, duas arestas básicas do prisma.

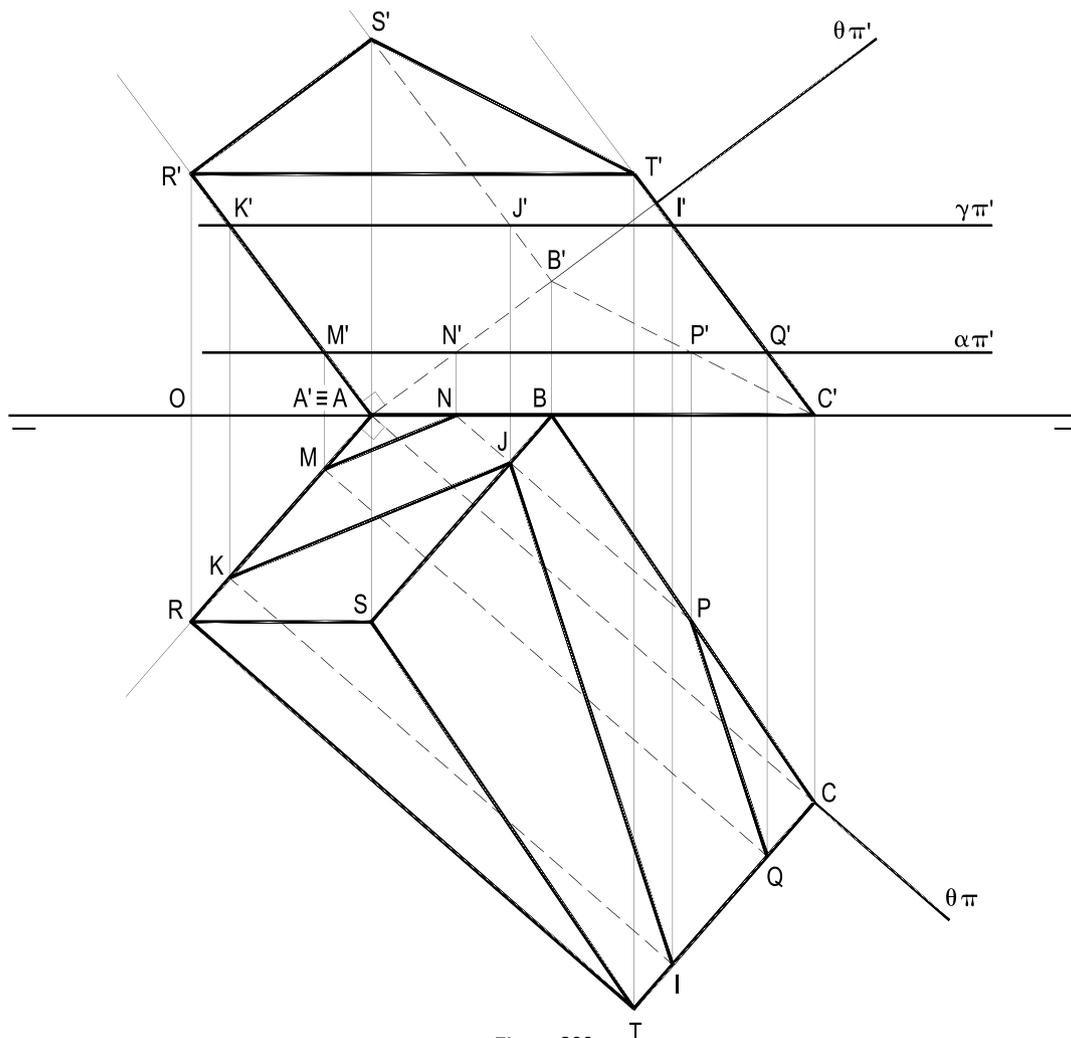


Figura 809

181.10 – Um tronco de prisma quadrangular (A)(B)(C)(D) – (R)(S)(T)(U) tem quatro arestas básicas (A)(B), (C)(D), (R)(S) e (T)(U) fronto-horizontais, a primeira delas em  $(\pi)$ . Suas arestas laterais são paralelas à reta  $(r)$  e as arestas (S)(T) e (R)(U) são paralelas à reta  $(s)$ .

Pede-se construir as projeções da seção plana (M)(N)(P)(Q) que o plano transparente  $(\alpha)$  produz no tronco. São dados os traços de  $(\alpha)$  e as projeções A, B, C, C', r', r, s' e o afastamento  $y_U$  do vértice U.

Solução: Simples a construção do tronco do prisma a partir dos dados e dos paralelismos informados.

Para a construção da seção plana pedida, aproveitando a abundante existência de retas fronto-horizontais, recorreu-se ao rebatimento de um corte de perfil (Figura 810).

Observe-se a representação com linha contínua, mas fina, da porção do traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano secante, obstruída pelo sólido, e como o corte de perfil ajuda na determinação das visibilidades.

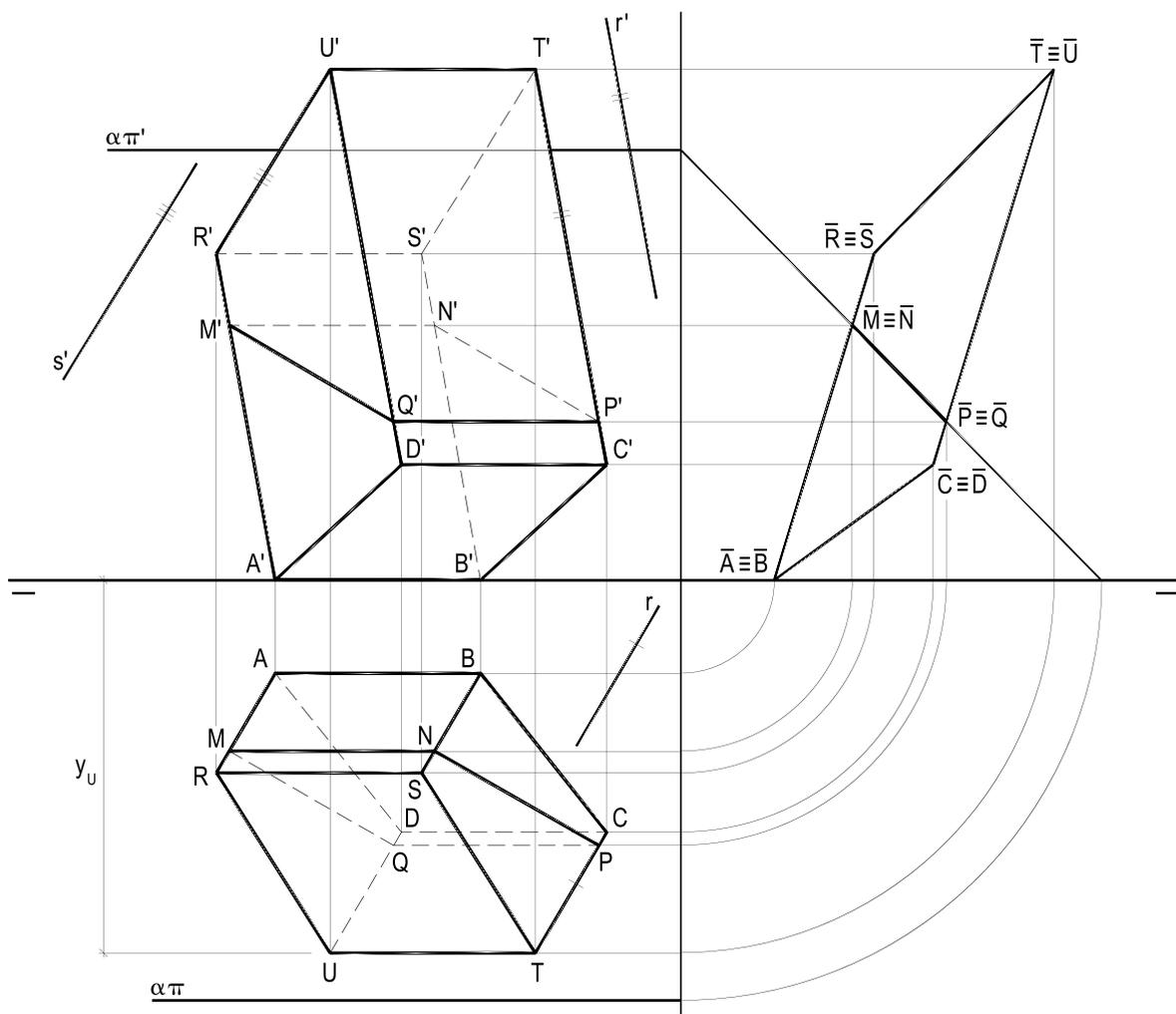


Figura 810

181.11 – A pirâmide hexagonal regular (V) – (A)(B)(C)(D)(E)(F) tem sua base em ( $\pi$ ) e está situada no primeiro diedro.

Dadas as projeções  $V'$ , V e A de seus vértices (V) e (A) e os traços do plano opaco ( $\alpha$ ), pede-se construir as projeções da pirâmide e da seção que ( $\alpha$ ) produz no sólido, além da V.G. desta seção.

Solução: A construção da base é imediata, por vir em V.G. sua projeção horizontal.

Para determinar a seção, visto ser qualquer o plano secante ( $\alpha$ ), foi realizada uma mudança de ( $\pi'$ ), que o tornou de topo. A V.G. da seção foi obtida pelo rebatimento de ( $\alpha$ ) sobre ( $\pi$ ) no novo sistema projetivo.

Observe-se a visibilidade, por ser opaco o plano secante (Figura 811).

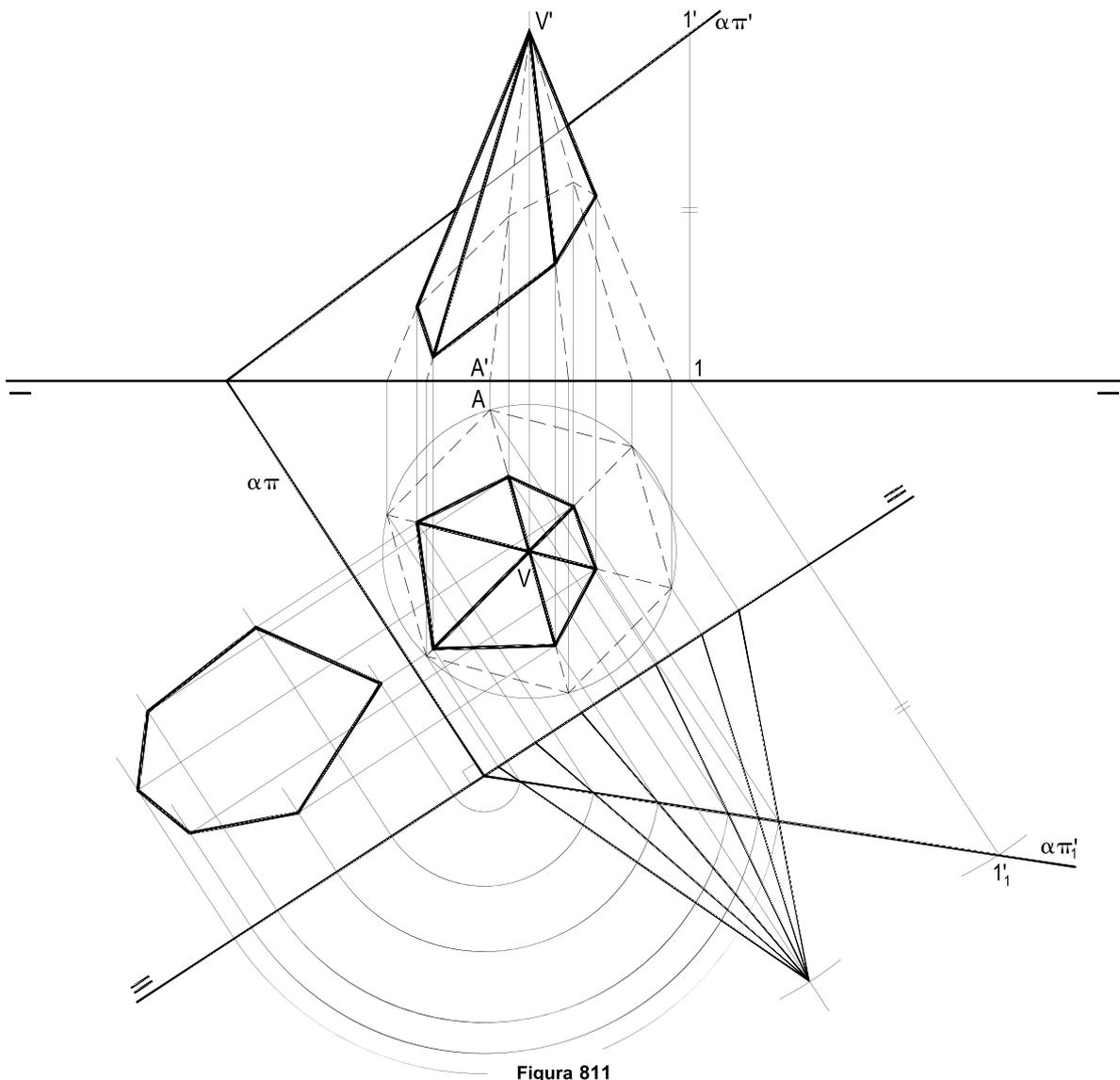


Figura 811

181.12 – O plano  $(\gamma)$ , dado por seus traços, é o mediador da aresta  $(B)(C)$  do tetraedro regular  $(J) - (A)(B)(C)$ .

Sabendo que o vértice  $(A)$  pertence a  $(\pi)$ , que o sólido situa-se no primeiro diedro e sendo dadas as projeções do vértice  $(B)$ , pede-se construir as projeções do tetraedro e da seção que o plano  $(\gamma)$ , considerado transparente, produz no sólido.

Análise: Trata-se de situação muito especial, já anteriormente abordada (número 170), mas, agora, proposta de forma inversa.

Cabe, então, lembrar que o plano  $(\gamma)$ , mediador da aresta  $(B)(C)$ , contém a aresta oposta  $(J)(A)$  (ver número 170 e Figura 706) e que a distância entre essas duas arestas – ou, o que é o mesmo, da distância entre o ponto  $(N)$ , médio de  $(B)(C)$ , à aresta  $(J)(A)$  – é a altura  $(N)(M)$  do triângulo isósceles  $(N)(J)(A)$ , em que os lados iguais  $(N)(J)$  e  $(N)(A)$  são as alturas das faces  $(J)(B)(C)$  e  $(A)(B)(C)$  (ver Figuras 705, 706 e 709).

Deve-se, então, buscar o simétrico  $(C)$  de  $(B)$  em relação a  $(\gamma)$ , determinando, de passagem, o ponto  $(N)$ , pé da perpendicular de  $(B)$  a  $(\gamma)$  e médio de  $(B)(C)$  (Figuras 812 e 813).

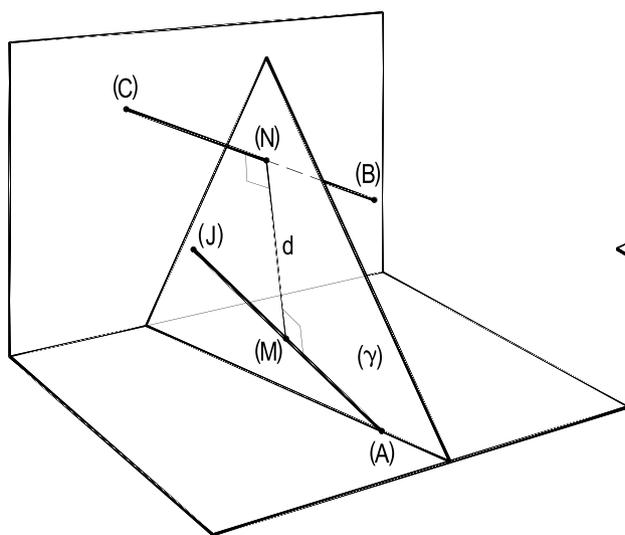


Figura 812

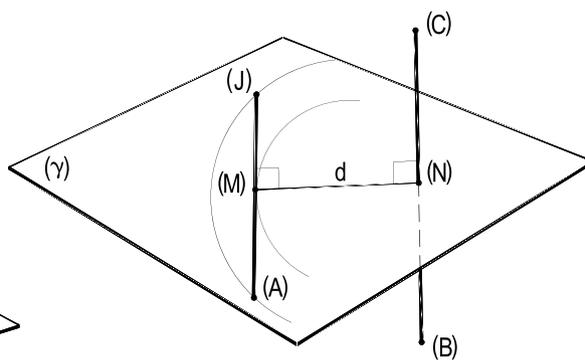


Figura 813

Como o valor da aresta  $(B)(C) = a$  do tetraedro é conhecido, obtido com  $B_1C_1$ , após uma mudança de  $(\pi)$ , que torna  $(B)(C)$  horizontal (Figura 814), pode-se determinar, com uma construção auxiliar, o valor  $d$  da distância entre  $(B)(C)$  e  $(J)(A)$  (Figuras 812, 813 e 814) e, pelo rebatimento de  $(\gamma)$  sobre  $(\pi)$ , para operar em V.G., descrever o círculo de centro  $(N)_1$  e raio  $d$ , ao qual terá de ser tangente a aresta  $(J)_1(A)_1$ , pertence a  $(\gamma)$ , obtendo-se, assim, o rebatimento  $(A)_1$  do vértice  $(A)$  e, então, a tangente  $(A)_1(J)_1 = a$ , que fornece os dois vértices procurados do sólido.

Note-se que das duas opções possíveis para o vértice (A), pertencente a  $\gamma\pi$ , e das quatro tangentes possíveis, apenas uma atende a deixar o tetraedro no primeiro diedro, como imposto pelo enunciado (Figura 814).

A seção (N)(J)(A), produzida no tetraedro pelo plano ( $\gamma$ ), já anteriormente metrificada, na construção auxiliar  $(\bar{N})(\bar{J})(\bar{A})$ , vem também, em épura, por suas projeções (Figura 814).

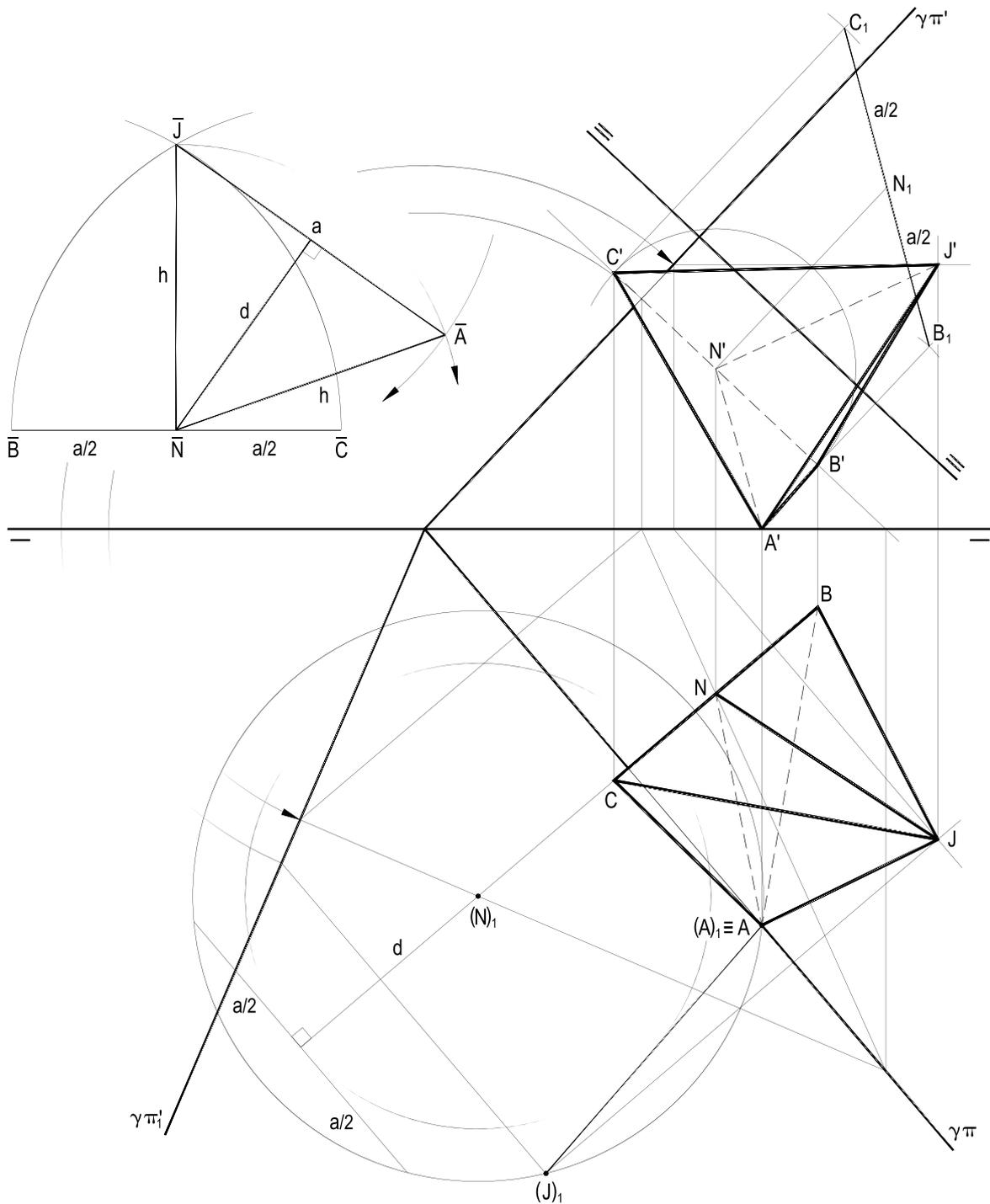


Figura 814

# CAPÍTULO XVII

## CILINDROS – TRONCOS DE CILINDRO

### 182 – Superfícies cilíndricas

Por definição, superfície cilíndrica é a gerada por uma reta de direção constante que se move apoiada numa curva fixa (Figura 815), não coplanar com ela. A reta móvel e a curva fixa são, respectivamente, denominadas geratriz e diretriz da superfície.

### 183 – Classificações

Costuma-se classificar as superfícies cilíndricas conforme as naturezas de suas diretrizes. Há, assim, superfícies cilíndricas circulares, elípticas, parabólicas, hiperbólicas, cíclicas, etc.

É claro, ainda, que uma superfície cilíndrica pode ser aberta (Figura 815) ou fechada (Figura 816), conforme, respectivamente, assim o sejam suas diretrizes.

Por último, uma superfície cilíndrica é convexa quando a seção nela produzida por um plano genérico que corte todas as suas geratrizes é uma curva convexa (Figura 817). Em caso contrário, a superfície é dita côncava ou não convexa. Assim, enquanto todas as retas secantes a uma superfície cilíndrica convexa só conseguem cortá-la em, no máximo, dois pontos, há retas que podem atingir uma superfície cilíndrica côncava em mais de dois pontos (Figura 818).

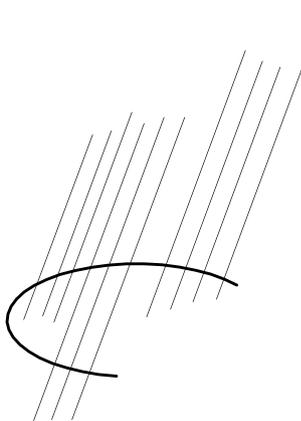


Figura 815

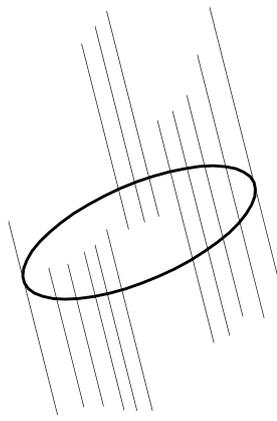


Figura 816

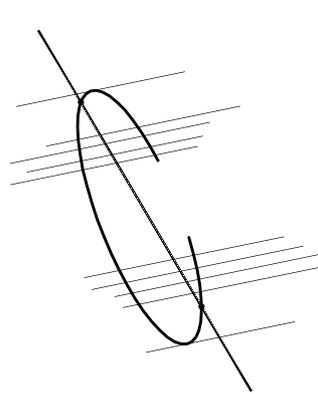


Figura 817

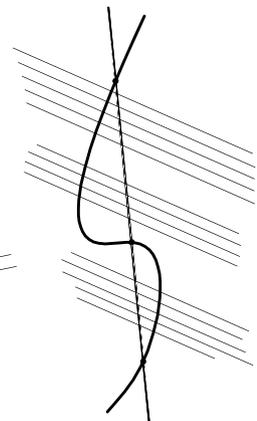


Figura 818

## 184 – Cilindros

Cilindro é o sólido limitado por uma superfície cilíndrica fechada e por dois planos paralelos entre si que cortem todas as geratrizes da superfície. As seções planas, iguais, assim formadas, são denominadas bases do cilindro e a distância  $h$  entre elas, altura do cilindro (Figuras 819 e 820).

Os cilindros são ditos retos ou oblíquos, conforme, respectivamente, suas geratrizes sejam perpendiculares (Figura 819) ou oblíquas (Figura 820) aos planos de suas bases e são classificados atendendo às naturezas das diretrizes das superfícies cilíndricas que os limitam. Há, assim, cilindros circulares, elípticos, etc.

Cilindro de revolução é o sólido gerado pela rotação completa de um retângulo em torno de um de seus lados (Figura 821), que funciona, assim, como eixo para o cilindro, medindo, pois, sua altura  $h$ . Neste caso, o cilindro é, obviamente, circular e reto e os dois lados móveis consecutivos ao eixo são os raios  $r$  das bases do sólido.

Seção meridiana de um cilindro de revolução é toda seção produzida no sólido por um plano que contenha seu eixo. É claro, portanto, que todas as seções meridianas de um cilindro de revolução são iguais entre si, compostas que são por duas posições axialmente opostas do retângulo gerador do sólido (Figura 821). E, por isso, suas dimensões são a altura  $h$  e o diâmetro  $2r$  das bases do cilindro.

No caso particular em que a seção meridiana de um cilindro de revolução é um quadrado, diz-se que o cilindro é equilátero (Figura 822). E, então, sua altura iguala o valor do diâmetro de suas bases.

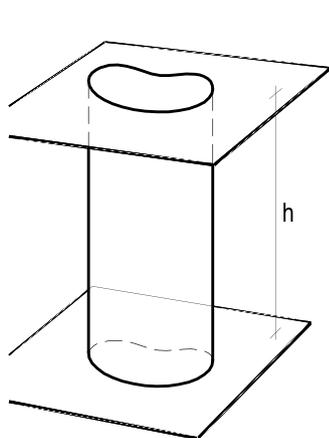


Figura 819

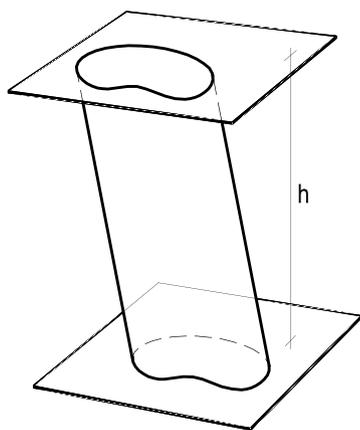


Figura 820

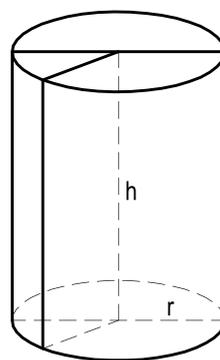


Figura 821

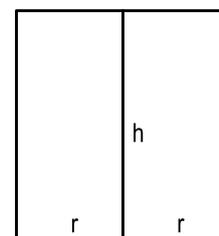


Figura 822

## 185 – Troncos de cilindro

Tronco de cilindro é o sólido limitado por uma superfície cilíndrica fechada e por dois planos não paralelos entre si que cortam todas as geratrizes da superfície e se cortam no exterior do sólido (Figura 823).

Quando a superfície cilíndrica que limita o tronco é de revolução, os troncos que ela delimita são, impropriamente, é verdade, denominados troncos de cilindro de revolução. Assim, um tronco de cilindro de revolução pode ter uma base circular e outra elítica (Figura 824) (*Geometria Espacial*, números 192 e 193) ou as duas elíticas, iguais ou não (Figura 824).

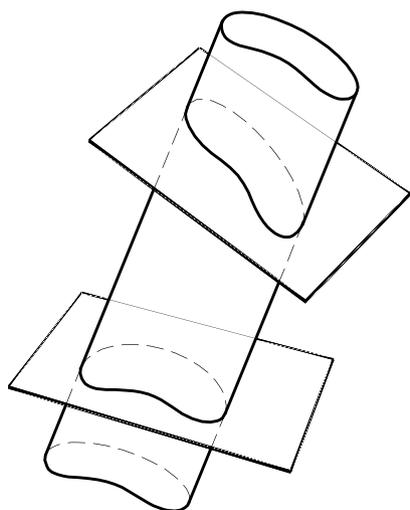


Figura 823

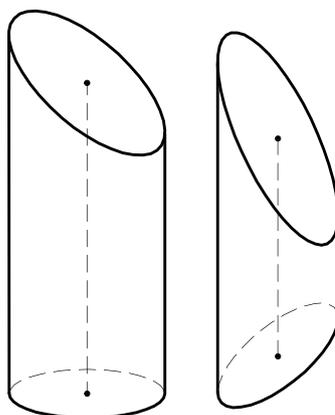


Figura 824

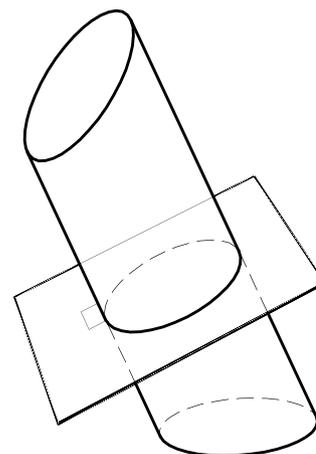


Figura 825

## 186 – Seção reta

Tal como nos prismas, seção reta numa superfície cilíndrica, num cilindro ou num tronco de cilindro, é a seção produzida na superfície, ou no sólido, por um plano perpendicular às suas geratrizes. Nos casos dos sólidos, tais planos devem atingir todas as suas geratrizes (Figura 825).

## 187 – Projeções elíticas do círculo

A partir de agora, com o estudo dos cilindros e de seus troncos e, a seguir, com os cones, troncos de cone, esferas e suas porções, com todos os corpos redondos, enfim, será muito frequente o traçado de elipses, projeções de círculos, sejam por serem bases, sejam por resultarem de seções nesses sólidos.

Vale, por isso, ter especial atenção com os traçados de elipses e das tangentes a elas, por pontos correntes, ou paralelas a direções conhecidas, ou, até, de pontos exteriores, pelo que se sugere consultar o livro *Cônicas*, deste autor, para rever tais construções.

## 188 – Construção de cilindros e de troncos de cilindro

Tal como com os prismas e seus troncos, a construção das projeções de cilindros e de troncos de cilindro bem como a determinação das projeções e das verdadeiras grandezas de seções neles produzidas se fazem em obediência aos dados listados e segundo as construções geométricas cabíveis.

Vejamos alguns exemplos:

188.1 – Construir as projeções do cilindro de revolução assente por uma de suas bases em  $(\pi)$  e situado no primeiro diedro, conhecendo as duas projeções do centro (O) de sua base superior, sabendo que o cilindro tangencia  $(\pi')$ .

Determinar, em seguida, as projeções da seção que o plano  $(\alpha)$ , dado por seus traços, produz no cilindro.

Solução: Por estar assente em  $(\pi)$ , a projeção horizontal do cilindro coincide com as projeções de suas duas bases, ambas com centro em O e tangentes a  $(\pi'\pi)$  (Figura 826). E a vertical, pela posição tão particular do sólido, reduz-se ao retângulo de seu contorno aparente.

Também a seção elítica (e) que o plano  $(\alpha)$  produz no cilindro é de imediata obtenção, por ser projetante o plano secante.

Observe-se (Figura 826) que a projeção horizontal da elipse seção (e) coincide com as das bases do cilindro.

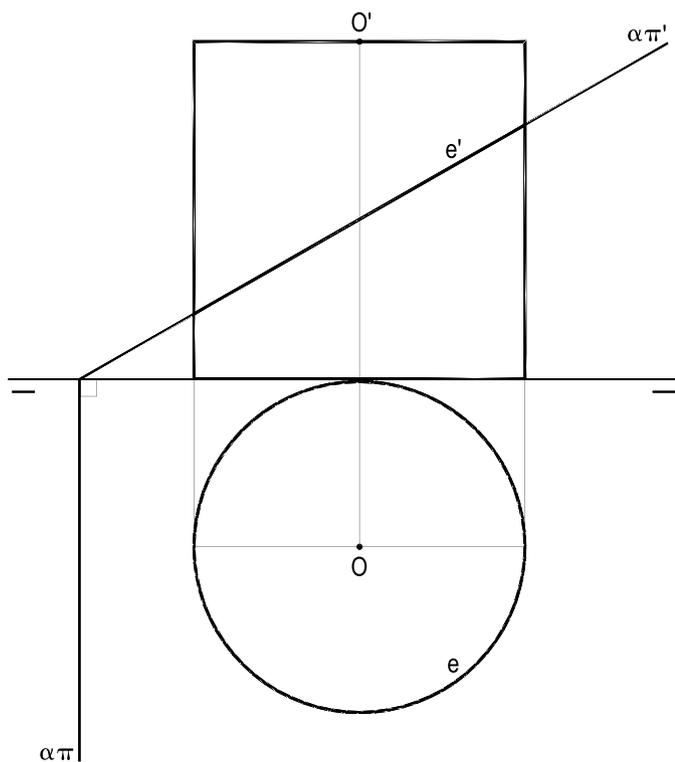


Figura 826

188.2 – Um diedro reto é formado pelos planos verticais  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , dos quais são dados os traços  $\alpha\pi'$ ,  $\alpha\pi$  e  $\beta\pi'$ .

Um terceiro plano  $(\gamma)$ , frontal, tem afastamento igual ao sétuplo do da reta (r), interseção de  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ .

Pede-se completar os traços dos três planos envolvidos, determinar as projeções da reta ( $r$ ) e construir as projeções do cilindro de revolução assente em  $(\pi)$ , por uma de suas bases, e tangente aos planos  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  e  $(\gamma)$ , sabendo que sua altura é igual ao triplo de seu raio e que ele se situa no primeiro diedro.

Construído o cilindro, pede-se determinar a seção nele produzida por um quarto plano  $(\theta)$ , vertical, dado por seu traço horizontal  $\theta\pi$ .

Solução: Pelo ponto  $(J)$ , traço de  $\beta\pi'$  com  $(\pi'\pi)$ , obtém-se  $\beta\pi$ , perpendicular a  $\alpha\pi$ , e as projeções da reta ( $r$ ) e, conhecido seu afastamento, consegue-se o traço  $\gamma\pi$  do terceiro plano.

As bissetrizes dos ângulos que  $\beta\pi$  forma com  $\alpha\pi$  e com  $\gamma\pi$  definem o centro  $(O)$  da base do cilindro pedido, que se completa, em projeção vertical, já que sua altura  $3R$  passa a ser conhecida (Figuras 827 e 828).

A seção que o plano  $(\theta)$  produz no cilindro (Figuras 827 e 829) é o retângulo  $(A)(B)(C)(D)$ , de muito simples obtenção.

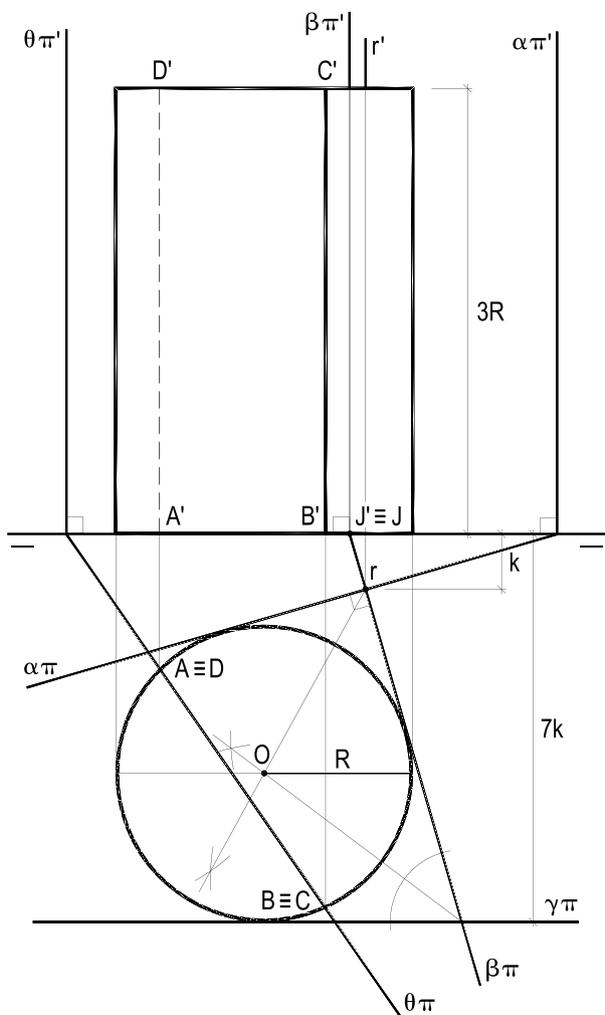


Figura 827

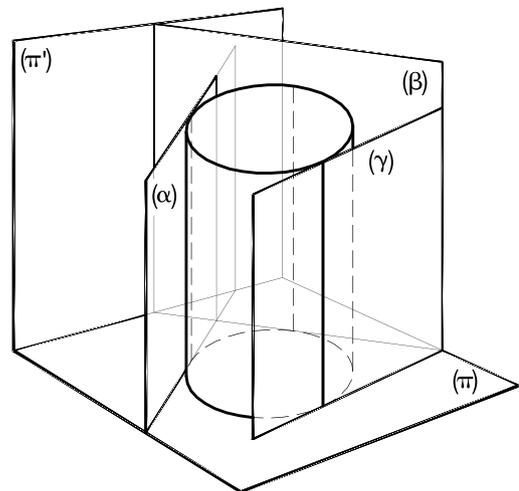


Figura 828

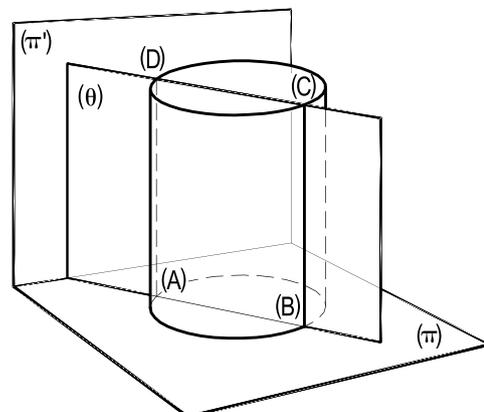


Figura 829

Observe-se que o triângulo formado pelos traços horizontais  $\alpha\pi$ ,  $\beta\pi$  e  $\gamma\pi$  dos três planos dados, todos projetantes em relação a  $(\pi)$ , admite, como se sabe (*Geometria Plana*, número 143), quatro círculos tangentes às retas suportes de seus lados, cujos centros são seu incentro  $I$  e seus três exincentros  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$  (Figura 830), todos centros de bases de cilindros de revolução tangentes aos planos  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  e  $(\gamma)$ , dados.

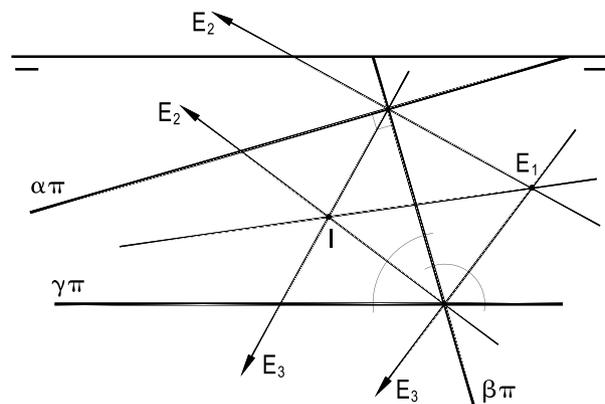


Figura 830

Ocorre que o exicentro  $E_2$  há de corresponder a um cilindro não pertencente inteiramente ao primeiro diedro, como imposto.

Conclui-se, assim, que, para as posições dos três planos dados, o problema proposto comporta outras duas soluções, além da apresentada, relativas aos cilindros de revolução cujas bases inferiores tenham por centros os exincentros  $E_1$  e  $E_3$  (Figura 830), não representados na *épura* da Figura 827.

188.3 – Um cilindro circular oblíquo tem suas bases nos planos de topo paralelos e transparentes  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , dados por seus traços e geratrizes paralelas a  $(\pi)$  e a  $(\pi')$ .

Pede-se construir suas projeções, conhecendo o centro  $(O)$  da base pertencente a  $(\alpha)$ , sabendo que ela é tangente à reta  $(t)$  deste plano.  $(O)$  e  $(t)$  são dados por suas projeções horizontais.

Solução: Rebatido  $(\alpha)$  sobre  $(\pi)$ , obtém-se a primeira base do cilindro.

A segunda, igual à primeira, resulta da translação desta, feita mediante as fronto-horizontais geratrizes do sólido (Figura 831).

Observe-se a representação contínua, mas fina, da porção do traço  $\beta\pi$  ocultada pelo sólido.

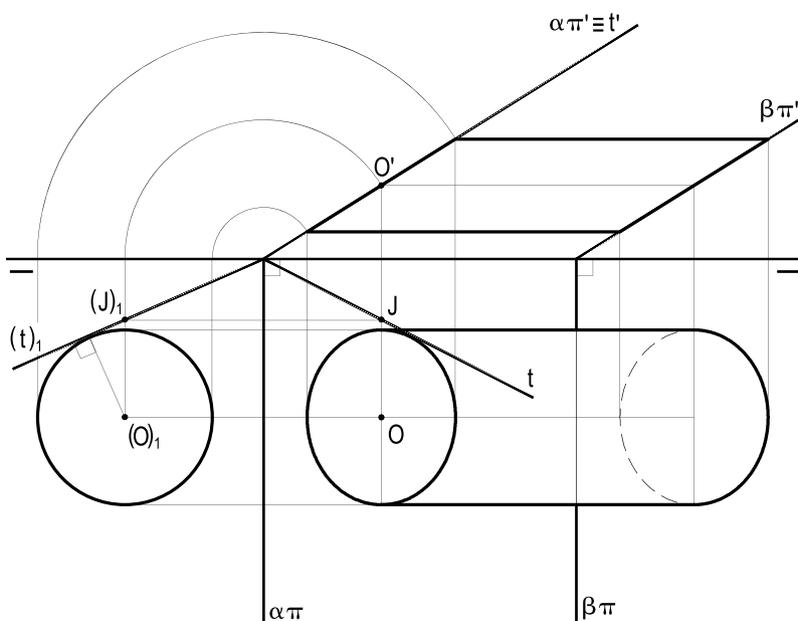


Figura 831

188.4 – Cinco cilindros equiláteros iguais estão dispostos em duas camadas, a primeira contando com três deles tangentes dois a dois e a segunda, com dois, cada um tangente a cada par da primeira camada.

Sabendo que os cinco cilindros estão no primeiro diedro, todos com uma de suas bases em  $(\pi')$  e tais que a camada inferior tem todos os seus três componentes tangentes a  $(\pi)$ , pede-se construir as projeções dos cinco, todos opacos, a partir da projeção vertical  $e'$  do eixo (e) do cilindro colocado mais à esquerda.

Solução: O ponto  $e'$ , dado, projeção vertical do eixo de topo do primeiro cilindro, há de ser o centro do círculo da sua base, em V.G., na projeção vertical.

Como todos os cilindros são equiláteros, suas alturas  $2R$  valem o dobro do raio  $R$  daquele círculo (Figuras 832 e 833).

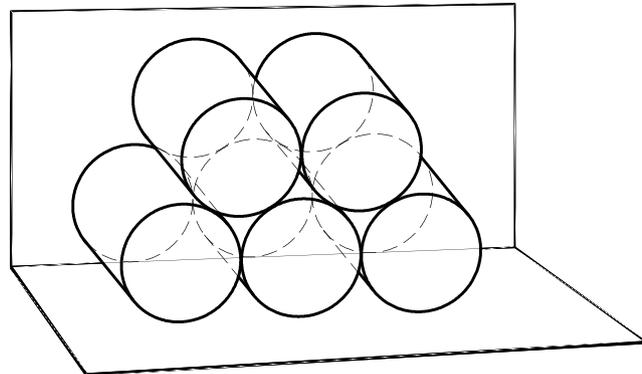


Figura 832

Para a visibilidade, em projeção horizontal, observe-se como a camada superior de cilindros a impacta (Figura 833).

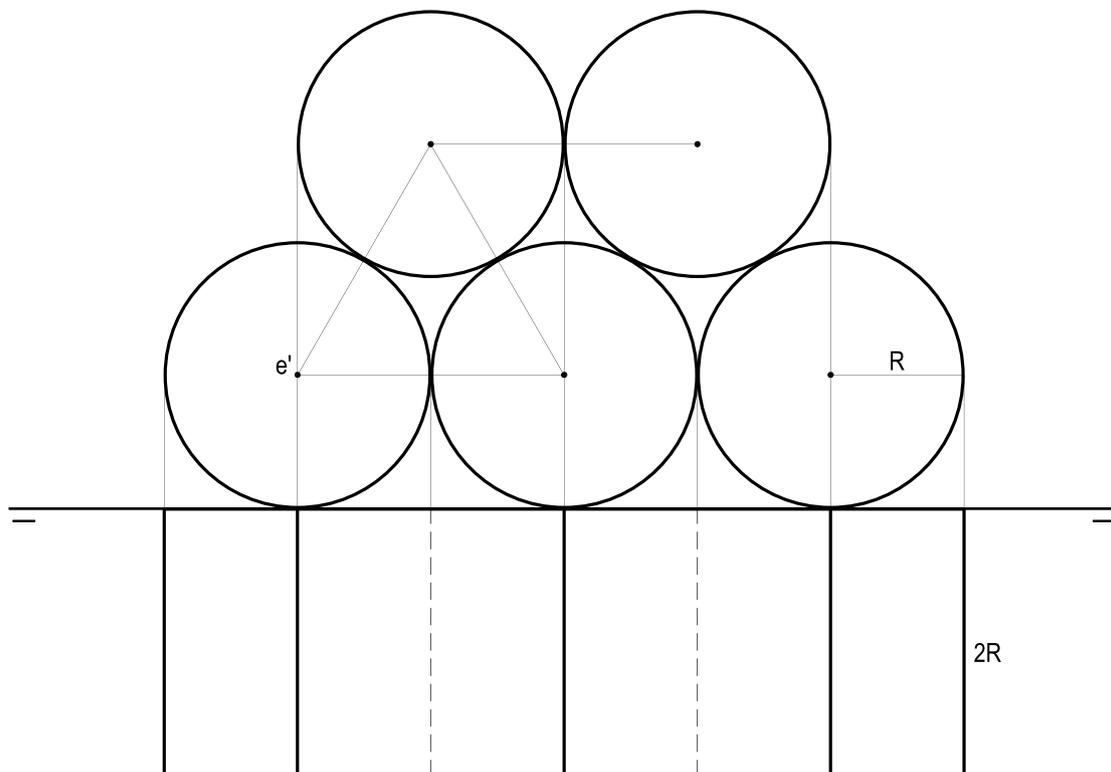


Figura 833

188.5 – Um tronco de cilindro de revolução tem sua base circular pertencendo ao plano vertical ( $\alpha$ ), com centro no ponto ( $O$ ), tocando ( $\pi'$ ) num único ponto ( $A$ ).

A segunda base do tronco pertence ao plano ( $\beta$ ).

Sendo dados os traços de ( $\alpha$ ) e de ( $\beta$ ) e a projeção vertical  $O'$  do ponto ( $O$ ), pede-se construir as projeções do tronco de cilindro, admitindo transparente o plano ( $\beta$ ).

Solução: Marca-se o ponto ( $O$ ) no plano ( $\alpha$ ) que, rebatido sobre ( $\pi'$ ), proporciona a construção da base circular do tronco, em verdadeira grandeza, com o centro em  $(O)_1$  e tangente a  $\alpha\pi'$  no ponto  $(A)_1$ .

Por ser um tronco de revolução, suas geratrizes, devendo ser retas horizontais, perpendiculares a ( $\alpha$ ), são facilmente construídas e, por suas interseções com o plano qualquer ( $\beta$ ), obtém-se a elipse, segunda base do sólido (Figura 834).

Visível, em ambas as projeções, é esta elipse, já que seu plano – ( $\beta$ ) – está à frente do vertical ( $\alpha$ ) (Figura 834).

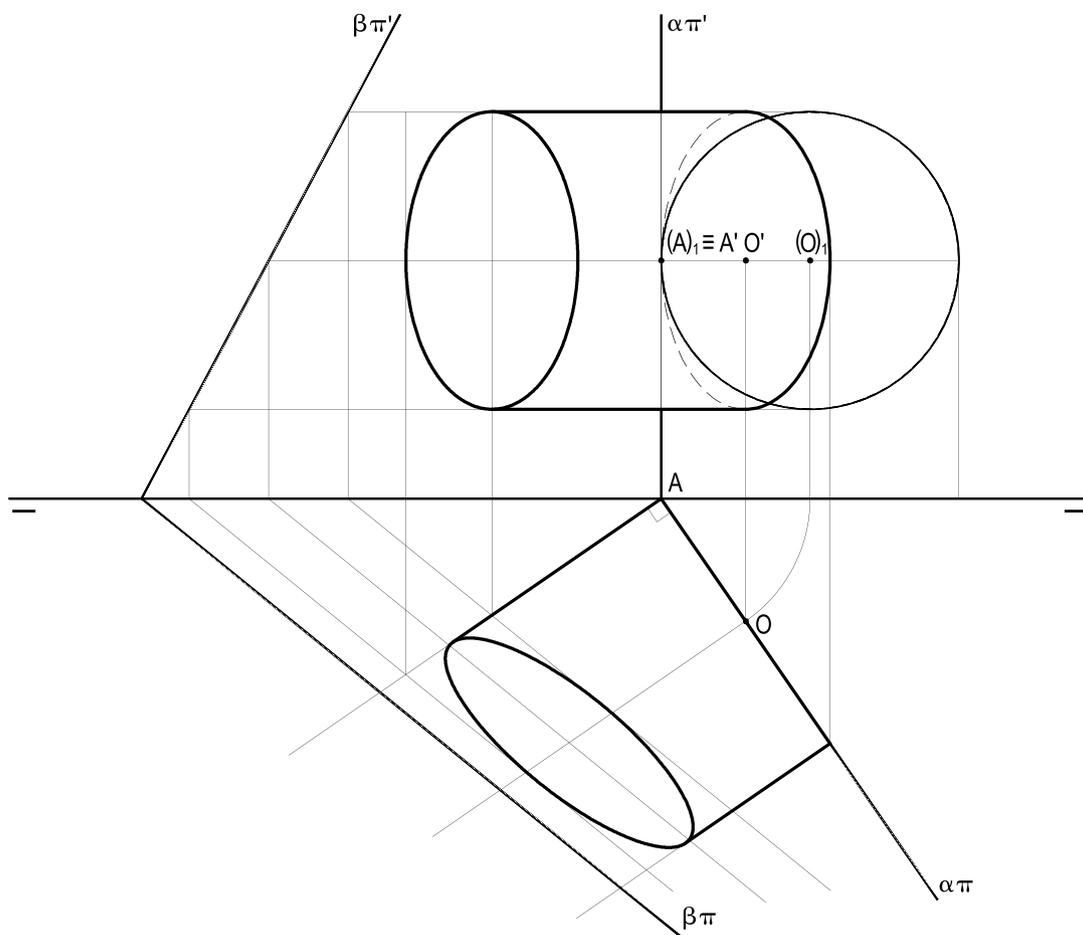


Figura 834



188.7 – Um tronco de cilindro está limitado, por suas bases, pelos planos ( $\pi$ ) e ( $\beta$ ).

Sabendo que a base pertence a ( $\pi$ ), é circular, tem centro no ponto (O) e passa pelo ponto (A) e que o plano transparente ( $\alpha$ ) produz no tronco uma seção reta, pede-se construir as projeções do sólido e determinar a V.G. dessa seção reta.

São dadas as projeções horizontais O e A e os traços dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ).

Solução: Por pertencer a ( $\pi$ ), o círculo do centro (O) e raio (O)(A) apresenta em V.G. sua projeção horizontal e tem sua projeção vertical sobre  $\pi'\pi$ .

E como ( $\alpha$ ) é plano de uma seção reta no tronco, as geratrizes do sólido lhe são perpendiculares, tornando imediata a obtenção da segunda base do tronco, a que pertence a ( $\beta$ ) (Figura 836).

Para a construção da V.G. da seção reta produzida por ( $\alpha$ ), basta rebater esse plano sobre ( $\pi$ ), levando a tal rebatimento os diâmetros RS e TU da projeção horizontal da seção, respectivamente, paralelo e perpendicular ao traço  $\alpha\pi$  (Figura 836), para obter os eixos da elipse, em V.G., e, então, construí-la diretamente.

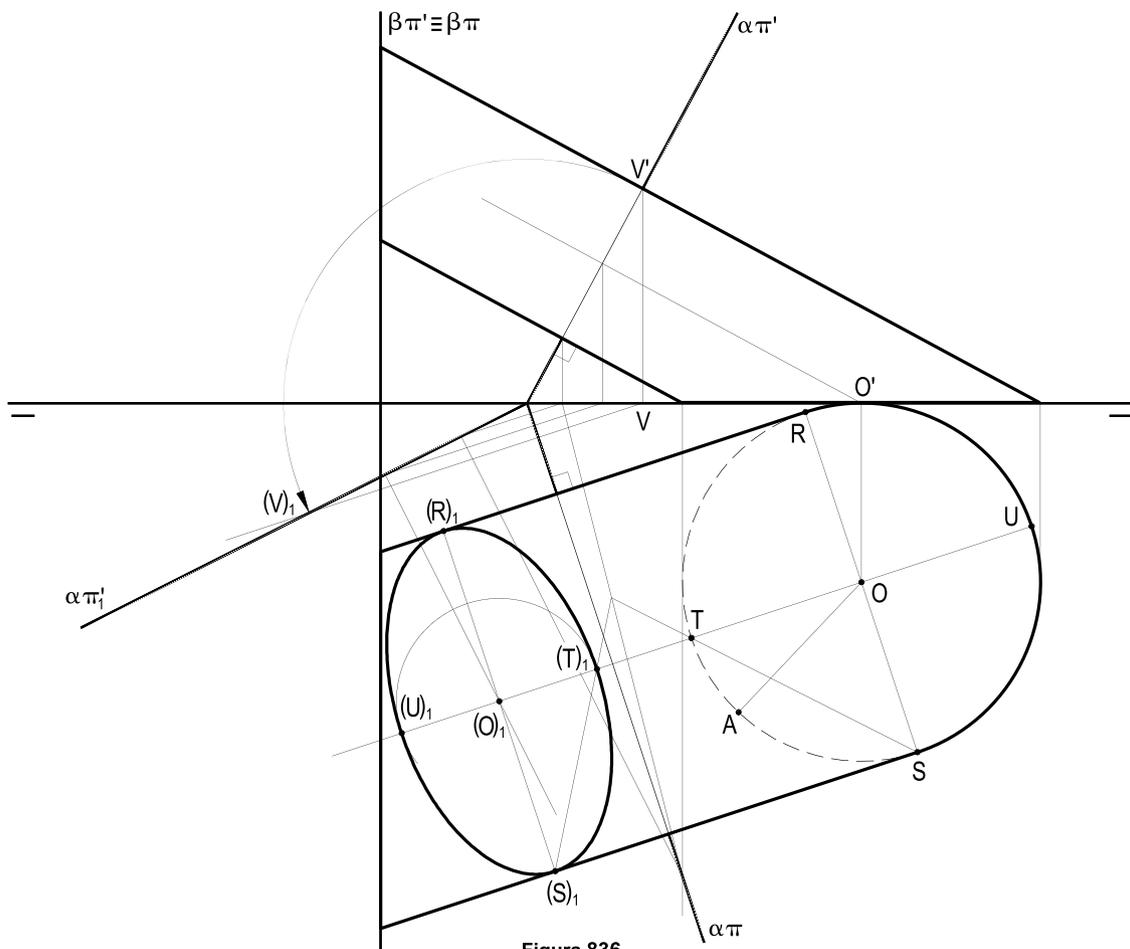


Figura 836

# CAPÍTULO XVIII

## CONES – TRONCOS DE CONE

### 189 – Superfícies cônicas

Por definição, superfície cônica é a gerada por uma reta que passa por um ponto fixo e se apoia numa curva fixa não coplanar com aquele ponto, que é, então, denominado vértice da superfície (Figura 837). A curva fixa é a sua diretriz.

As retas geradoras da superfície são, por isso mesmo, chamadas geratrizes e cada uma dessas partes simétricas que a constituem é uma folha de superfície (Figura 837).

Quando as geratrizes são limitadas ao vértice, transformando-se em semirretas, com tal origem, a superfície cônica gerada passa a ter apenas uma folha (Figura 838).

### 190 – Classificações

Tal como as cilíndricas, as superfícies cônicas costumam ser classificadas conforme as naturezas de suas diretrizes. E, por isso, há superfícies cônicas circulares, elíticas, hiperbólicas, parabólicas, etc.

Uma superfície cônica pode ser aberta (Figura 837) ou fechada (Figura 839), conforme assim sejam suas diretrizes.

Tal classificação aplica-se tanto às superfícies cônicas de uma quanto às de duas folhas.

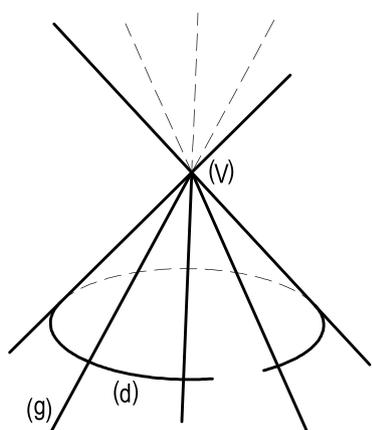


Figura 837

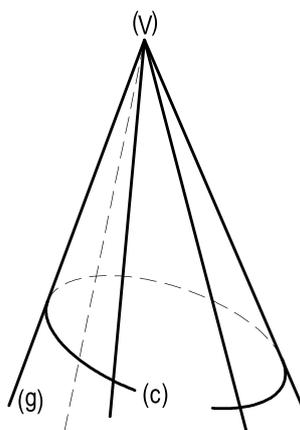


Figura 838

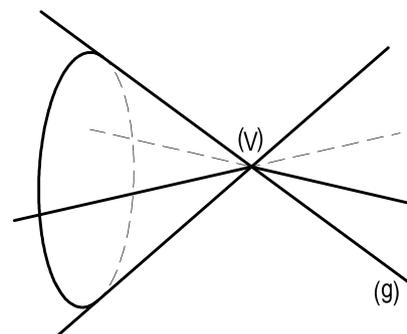


Figura 839

Além disso, uma superfície cônica é dita convexa quando a seção nela produzida por um plano qualquer que corte todas as suas geratrizes é convexa (Figura 840). Em caso contrário, a superfície é denominada não convexa ou côncava (Figura 841).

Assim, enquanto todas as retas secantes a uma superfície cônica convexa só conseguem ter, com ela, no máximo, dois pontos em comum (Figura 840), há retas que podem cortar uma superfície cônica côncava segundo mais de dois pontos (Figura 841). Esta classificação é válida tanto para superfícies cônicas de uma quanto de duas folhas (Figuras 842 e 843).

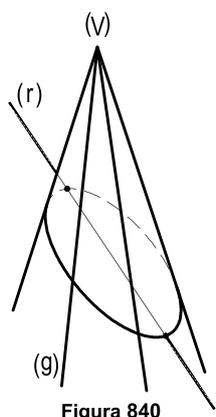


Figura 840

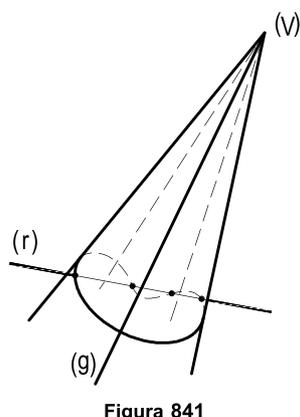


Figura 841

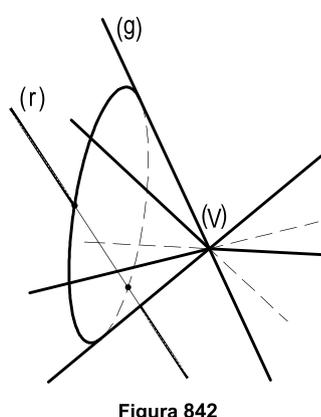


Figura 842

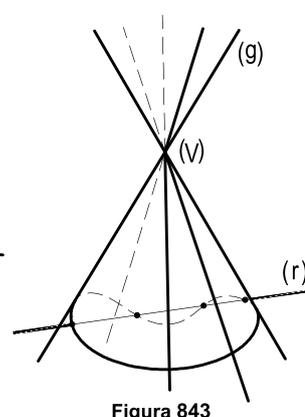


Figura 843

Superfície cônica de revolução, de uma ou de duas folhas, é a gerada pela rotação completa de uma semirreta (Figura 844) ou de uma reta (Figura 845), em torno de uma reta fixa, com ela concorrente num ponto, então denominado vértice da superfície e que, no caso de uma folha, é a origem da semirreta móvel. Os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que a reta, ou semirreta, forma, respectivamente, com o eixo (e) da superfície e com os planos ( $\gamma$ ) perpendiculares ao eixo são constantes para todas as geratrizes (Figuras 844 e 845). Assim (*Geometria Espacial*, números 183.2 e 183.3), o lugar geométrico das retas (r) pertencentes a um ponto (A) e que formam um mesmo ângulo  $\alpha$  com uma reta fixa (s), ou  $\beta$ , com um plano ( $\gamma$ ), é a superfície cônica de revolução de duas folhas, que tem (A) por vértice e eixo (e) paralelo a (s), ou perpendicular a ( $\gamma$ ), respectivamente (Figuras 846 e 847).

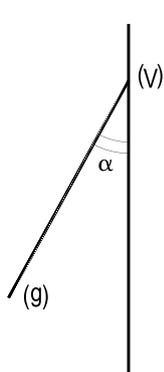


Figura 844

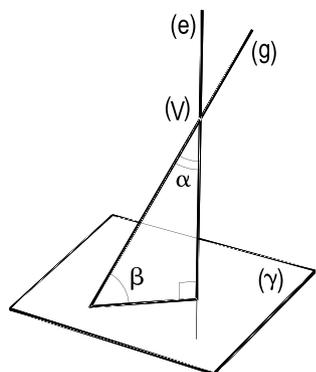


Figura 845

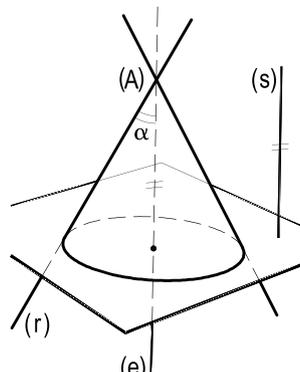


Figura 846

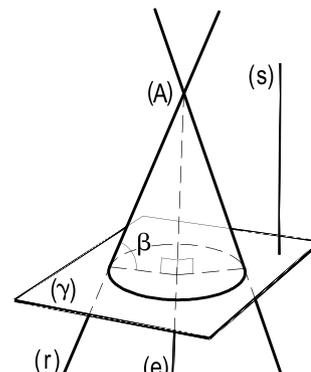


Figura 847

## 191 – Cones

Cone é o sólido limitado por uma superfície cônica fechada de uma folha e por um plano que corta todas as suas geratrizes.

A seção que tal plano produz na superfície é a base do sólido e a distância do vértice da superfície a esse plano é denominada altura do cone.

Os cones são ditos circulares, elípticos, etc., conforme as naturezas de suas bases.

Quando a base de um cone é uma curva simétrica, isto é, que admite centro de simetria (O), e a projeção ortogonal do vértice (V) do cone sobre o plano ( $\gamma$ ) de sua base coincide com (O), o sólido é denominado cone reto, como no caso da Figura 848, do cone (V) de base elítica (c). Quando, ao contrário, a projeção (J) do vértice (V) de um cone sobre o plano ( $\gamma$ ) de sua base não coincide com seu centro, ou quando a base (c) não é simétrica (Figura 849), o cone é dito oblíquo.

Cone de revolução é o sólido gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos, que, então, funciona como eixo do cone e mede sua altura  $h$ , enquanto o cateto móvel e a hipotenusa medem, respectivamente, o raio  $r$  da base e a geratriz  $g$  do cone (Figura 850).

É claro, assim, que um cone de revolução é circular e reto.

Todas as seções meridianas de um cone de revolução, isto é, aquelas produzidas por planos que contêm o eixo do cone, são triângulos isósceles iguais, formados por duas posições axialmente opostas do triângulo (V)(O)(A) gerador (Figura 850).

No caso particular em que essa seção meridiana é um triângulo equilátero, isto é, quando a geratriz do cone de revolução é igual ao diâmetro de sua base, diz-se que o cone é equilátero.

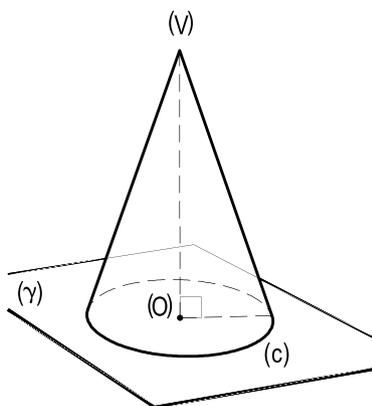


Figura 848

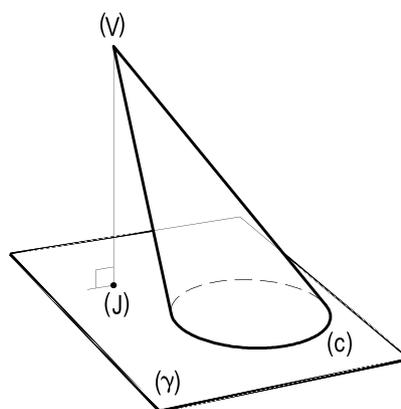


Figura 849

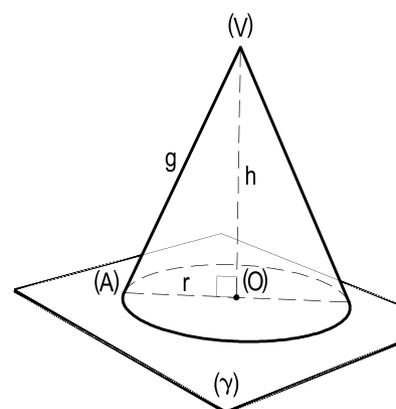


Figura 850

## 192 – Troncos de cone de primeira espécie

Tronco de cone de primeira espécie é o sólido limitado por uma superfície cônica fechada de uma folha e por dois planos, paralelos ou não, que cortam todas as geratrizes dessa folha e que, se secantes entre si, cortam-se no exterior do sólido.

Há, então, duas possibilidades: troncos com bases paralelas (Figura 851) e de bases não paralelas (Figura 852). Nos troncos com bases paralelas, a distância  $h$  entre os planos das bases é denominada altura do tronco de cone (Figura 851) e, vale observar, as curvas das duas bases são necessariamente homotéticas em relação ao vértice do cone, do qual se extraiu o tronco.

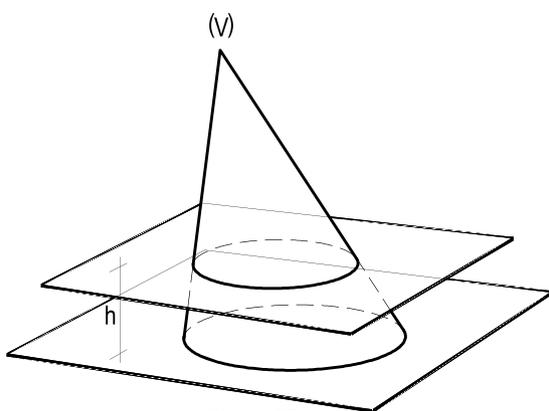


Figura 851

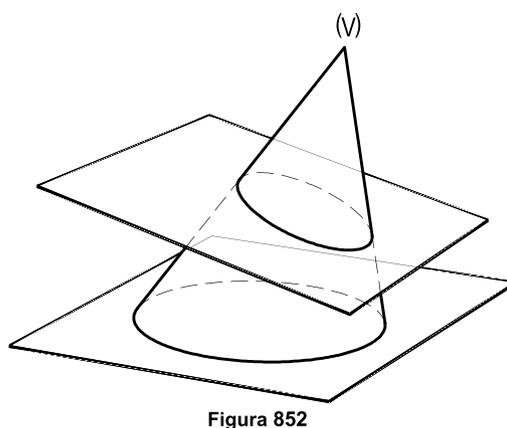


Figura 852

## 193 – Troncos de cone de segunda espécie

Tronco de cone de segunda espécie é o sólido limitado por uma superfície cônica fechada de duas folhas e por dois planos, paralelos (Figura 853) ou não (Figura 854), que cortam, cada um, todas as geratrizes de cada uma das duas folhas da superfície.

Quando os planos são paralelos, a distância  $h$  entre eles (Figura 853) é denominada altura do tronco e suas bases são inversamente homotéticas em relação ao vértice da superfície cônica que limita lateralmente o sólido.

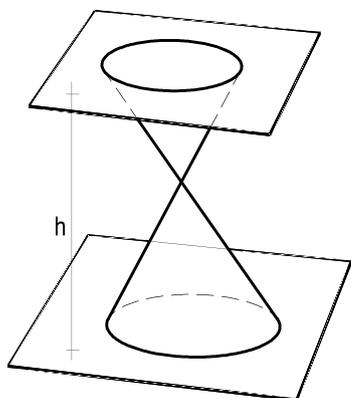


Figura 853

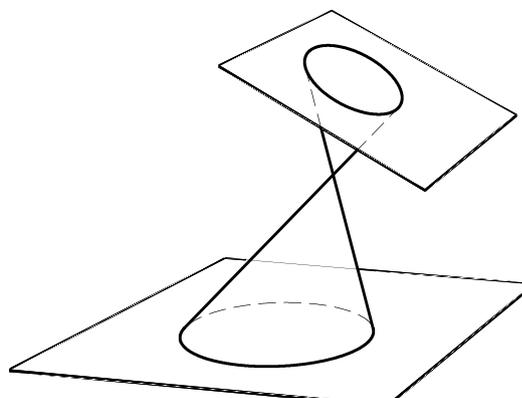


Figura 854

## 194 – Troncos de cone de revolução

Tronco de cone de revolução de primeira espécie é o sólido gerado pela revolução completa de um trapézio retângulo em torno do lado perpendicular às bases.

O lado fixo  $(A)(B)$ , na Figura 855, sendo perpendicular aos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  das bases do sólido, mede sua altura  $h$ , as bases do trapézio, os raios das bases do tronco e o lado oblíquo sua geratriz  $g$ .

Tronco de cone de revolução de segunda espécie é o sólido gerado por um par de triângulos retângulos inversamente homotéticos em relação a um dos vértices de suas hipotenusas (Figura 856), numa revolução completa em torno de seus catetos colineares.

Os catetos fixos  $(A)(O)$  e  $(A)(O')$  formam o eixo do tronco e sua soma  $(O)(O')$  mede a altura do sólido. Os catetos móveis  $(O)(B)$  e  $(O')(B')$  são os raios  $R$  e  $R'$  das duas bases do tronco e a soma  $(B)(B')$  das hipotenusas  $(A)(B)$  e  $(A)(B')$  dá o valor da geratriz  $g$  do tronco (Figura 856).

É claro que os troncos de cone de revolução podem ser considerados como subtração de dois cones de revolução (os de primeira espécie) ou como soma deles (os de segunda espécie).

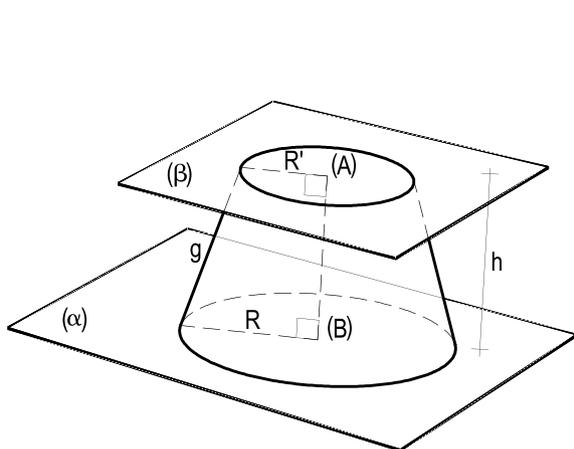


Figura 855

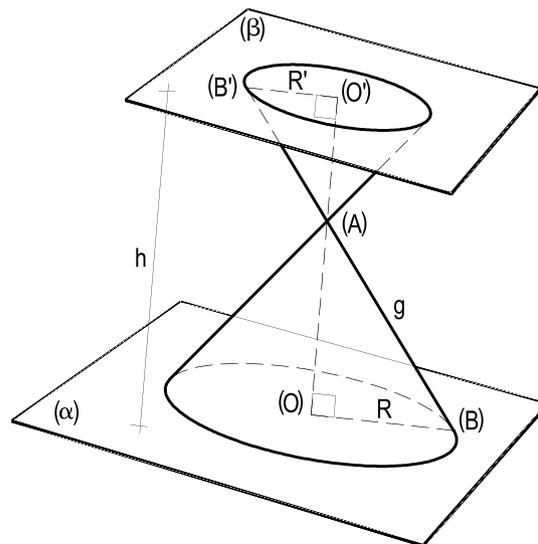


Figura 856

## 195 – Construção de cones e de troncos de cone

Os problemas diretos consistem nas determinações das projeções de cones e de troncos de cone, segundo condições impostas e nas obtenções das verdadeiras grandezas de seções neles produzidas por planos dados, com específicos condicionamentos.

Vejamos alguns exemplos:

195.1 – Dados, por seus traços, os planos de topo ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), o frontal ( $\gamma$ ) e o qualquer ( $\theta$ ), pede-se construir as projeções do cone circular oblíquo, assente por sua base no plano ( $\gamma$ ), base essa que só tem um ponto em comum com o plano ( $\alpha$ ), outro com ( $\beta$ ) e outro com ( $\pi$ ). O cone, que está inteiramente no primeiro diedro, tem seu vértice ( $J$ ) pertencendo ao plano ( $\theta$ ) e ao bissetor ímpar, com afastamento igual ao quádruplo do plano ( $\gamma$ ).

Escolher o sólido que corresponda à menor base para o cone e considerar transparentes todos os planos.

Solução: Por pertencer a um plano frontal, o círculo base do cone tem sua projeção vertical em V.G. E, para ter apenas um ponto em comum com os dois planos de topo dados e com ( $\pi$ ), tem de ter sua projeção vertical tangente a  $\alpha\pi'$ , a  $\beta\pi'$  e a  $\pi'\pi$ , devendo, por isso, ser ou o círculo inscrito no triângulo formado por essas retas ou um dos exinscritos a ele. As limitações de pertinência do sólido ao primeiro diedro e à menor dimensão para sua base fazem com que a escolha única se faça pelo círculo inscrito (Figura 857). O vértice ( $J$ ) é de imediata obtenção, completando a resolução da construção pedida.

Observe-se que, para traçar com rigor o contorno da projeção vertical, foram precisamente construídas as tangentes de  $J'$  ao círculo  $O'$  (Figura 857).

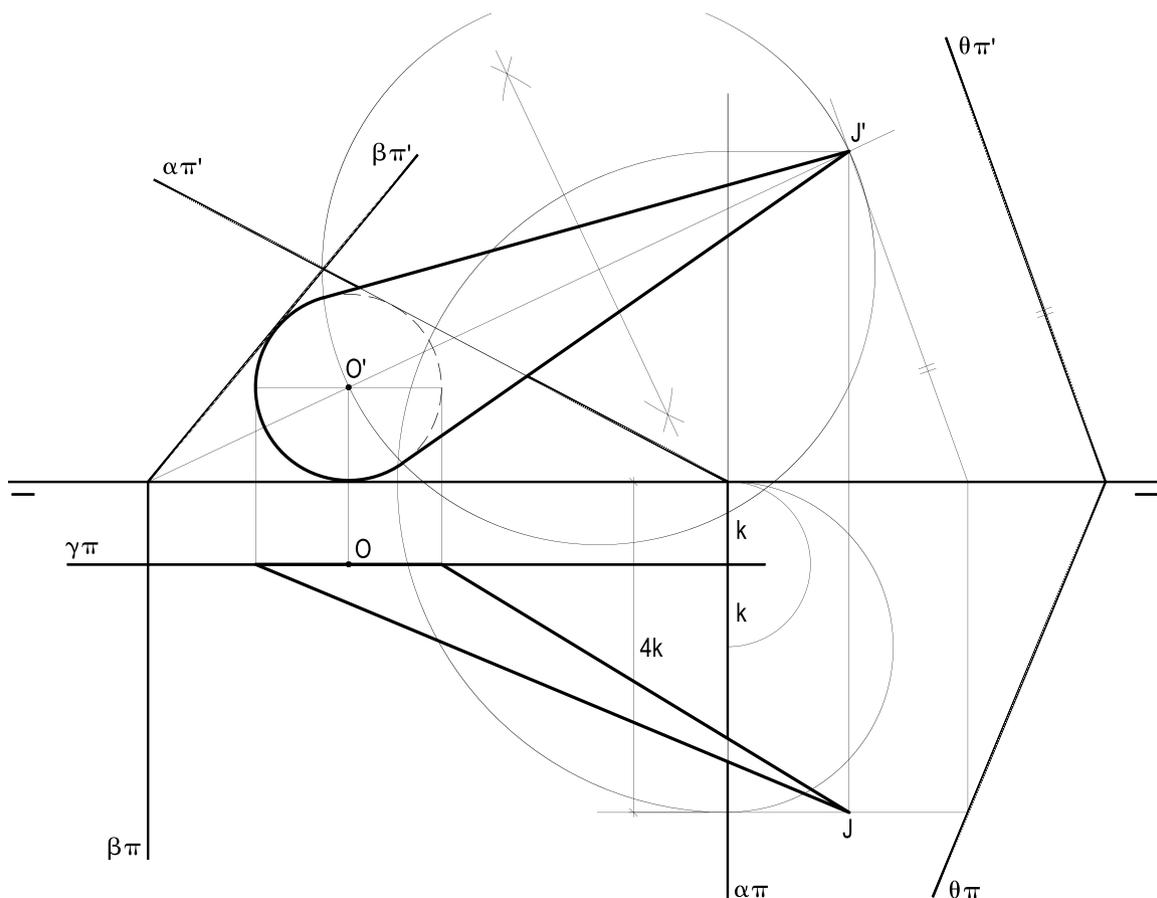


Figura 857

195.2 – Um cone circular obluo, de vertice (J), esta assente em ( $\pi$ ) por sua base, um crculo de centro (O) e raio (O)(A). Ele e seccionado por um plano horizontal ( $\alpha$ ), que divide ao meio sua altura, produzindo um tronco de cone de primeira especie, com bases paralelas, cujas projeoes so pedidas.

O plano transparente ( $\gamma$ ), de topo, pertencente ao ponto (J), proporciona uma seao no tronco, cujas projeoes e cuja V.G. so, tbem, pedidas.

So dadas as projeoes O, A, J e o trao  $\gamma\pi'$ .

Soluao: O plano ( $\alpha$ ), de imediato traado, produz a segunda base do tronco, tbem em V.G. na projeao horizontal, homotetica da primeira, em relaao a J, na razao  $\frac{1}{2}$ .

O plano secante ( $\gamma$ ), de topo, por conter o vertice (J), produz, como seao, no tronco, o trapezio (R)(S)(T)(U), de simples construao, cuja V.G.  $(R)_1(S)_1TU$  e obtida pelo rebati-mento de ( $\gamma$ ) sobre ( $\pi$ ) (Figura 858).

Tbem a visibilidade e bem simples.

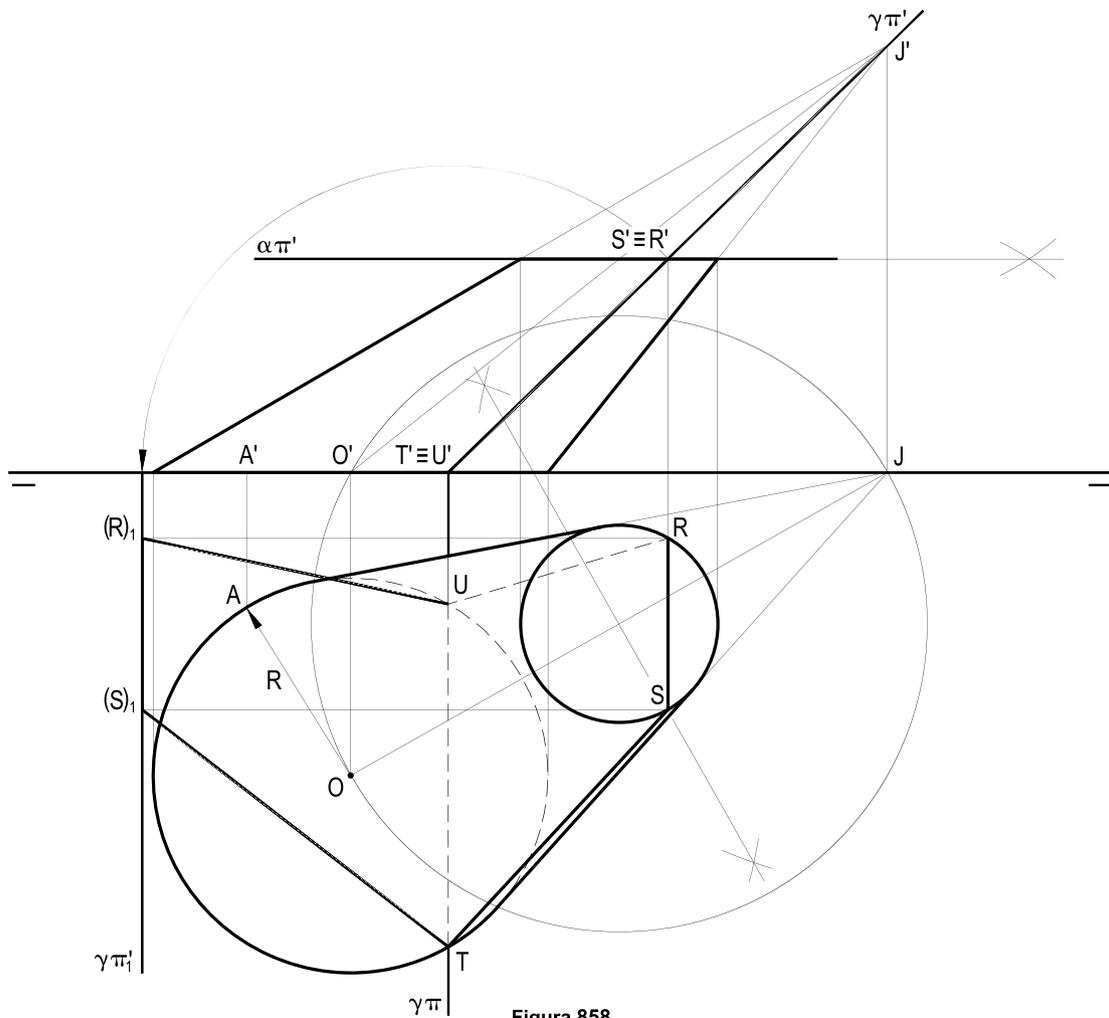


Figura 858

195.3 – Dois cones de revolução têm a base comum, situada num plano de perfil, tendo o ponto dado (O), por centro. Sabendo que tal ponto (O) pertence ao bissetor ímpar, que o círculo base comum dos dois cones tem apenas um ponto no plano frontal ( $\gamma$ ), que o cone menor, com abscissas maiores que as de (O), tem altura igual ao raio da base e que o maior, oposto àquele, tem altura igual ao diâmetro da base, pede-se construir as projeções dos dois sólidos, bem como as das seções que ( $\beta_{13}$ ) neles produz.

São dados o traço  $\gamma\pi$  do plano ( $\gamma$ ) e a projeção  $O'$  do ponto (O). Todos os planos são transparentes.

Solução: Com auxílio de um corte de perfil, define-se a V.G. do círculo (O), cujo centro pertence a ( $\beta_{13}$ ) e que é tangente a ( $\gamma$ )<sub>1</sub>, e, após os alçamentos, as projeções dos triângulos (V)(A)(B) e (J)(A)(B), seções que ( $\beta_{13}$ ) produz nos dois sólidos.

Para a visibilidade, é interessante, observando o corte de perfil, notar que (B), para ambas as projeções, é invisível, ao contrário de (A) (Figura 859).

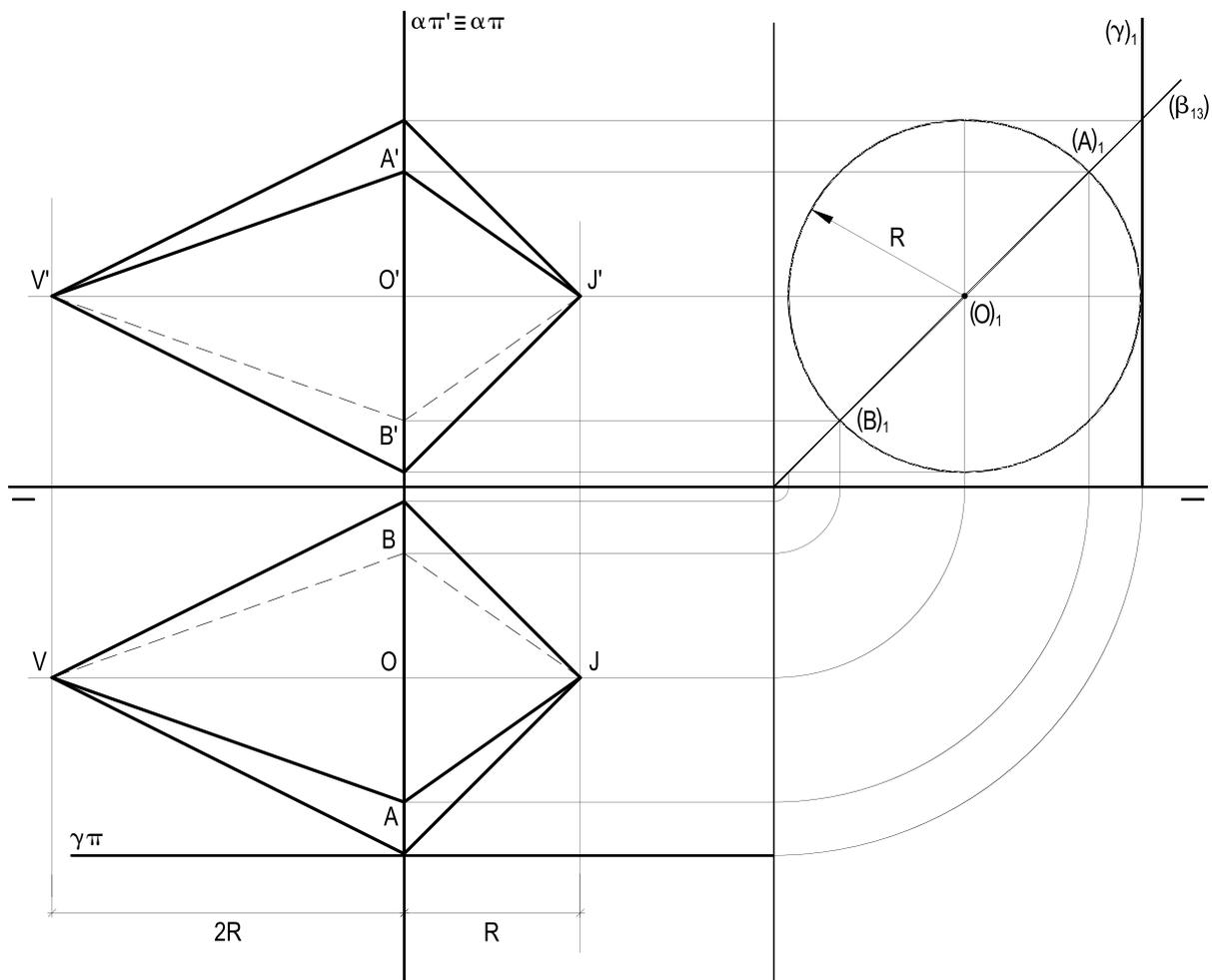


Figura 859

195.4 – Um sólido é formado por um cilindro de revolução e por dois cones de revolução, que têm suas bases coincidindo, respectivamente, com cada uma das bases de cilindro.

Sabe-se que essas duas bases pertencem aos planos de topo ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), paralelos, dados por seus traços e que os três corpos redondos têm alturas iguais.

Dadas as projeções horizontais do ponto ( $O$ ), centro da base pertencente ao plano ( $\alpha$ ) e de um ponto ( $A$ ), dessa base, pede-se construir as projeções do sólido.

Todos os planos são transparentes.

Solução: Mediante um rebatimento sobre ( $\pi$ ), é possível construir, em V.G., o círculo de centro ( $O$ )<sub>1</sub> e raio ( $O$ )<sub>1</sub> ( $A$ )<sub>1</sub> e, pelo seu alçamento e repetições da altura  $h$  do cilindro para os dois cones (Figura 860), completa-se a construção.

Observe-se que o rebatimento foi transladado, para a esquerda, para evitar poluição da épura.

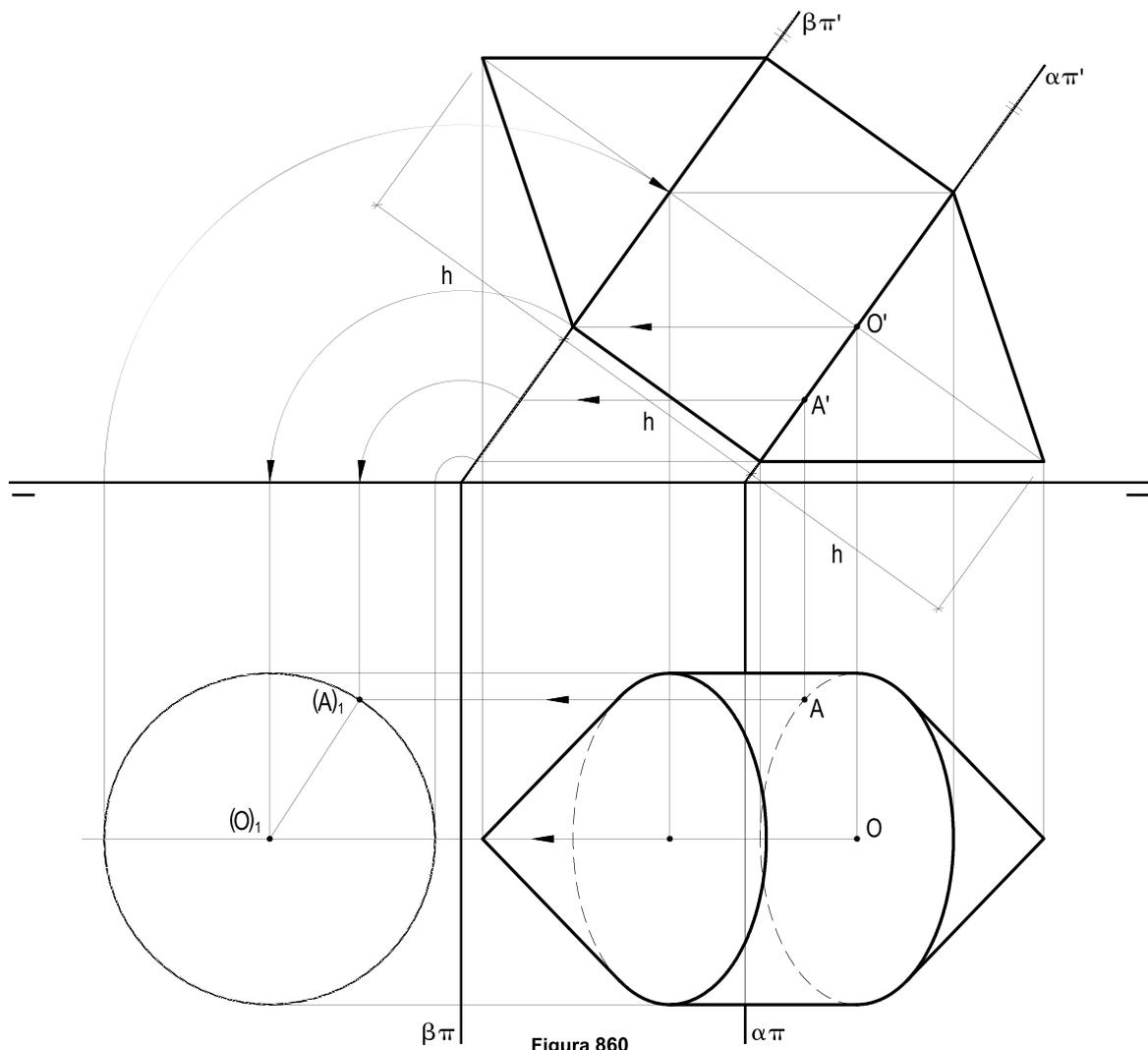


Figura 860

195.5 – Um cilindro de revolução está apoiado em  $(\pi)$  por sua base inferior, com centro no ponto (C) e 35 mm de raio. Na base superior é inscrito um conjunto de seis círculos iguais, tangentes consecutivamente e todos tangentes internamente à circunferência da segunda base do cilindro.

Tais círculos são bases de cones de revolução, apoiados no cilindro e exteriores a ele, de modo tal que, em sentido dextrógiro, suas alturas cresçam, em progressão aritmética, de razão igual ao raio desses círculos iguais, até que completem uma volta, e mais, retornando à posição inicial, isto é, compondo sete cones, o último envolvendo o primeiro, este com altura igual ao raio dos círculos iguais.

Pede-se construir as projeções do conjunto desses oito corpos redondos, sabendo que a altura do cilindro é igual ao raio das bases dos sete cones e que o ponto (C) forma com a interseção dos planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , dados por seus traços, um plano projetante em relação a  $(\pi)$  e que tem abscissa nula.

Considerar os planos transparentes e as superfícies dos corpos redondos opacas e escolher a posição do círculo base do primeiro cone com afastamento igual ao de (C) e abscissa menor que a de (C).

Solução: Porque os planos  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  têm traços verticais paralelos, sua interseção tem de ser uma reta (r) frontal (número 59) e, para que esta reta e o ponto (C) formem um plano projetante em relação a  $(\pi)$ , tal plano tem de ser frontal, com o que fica definido o ponto (C) e, então, o círculo da base inferior do cilindro, em V.G. em sua projeção horizontal.

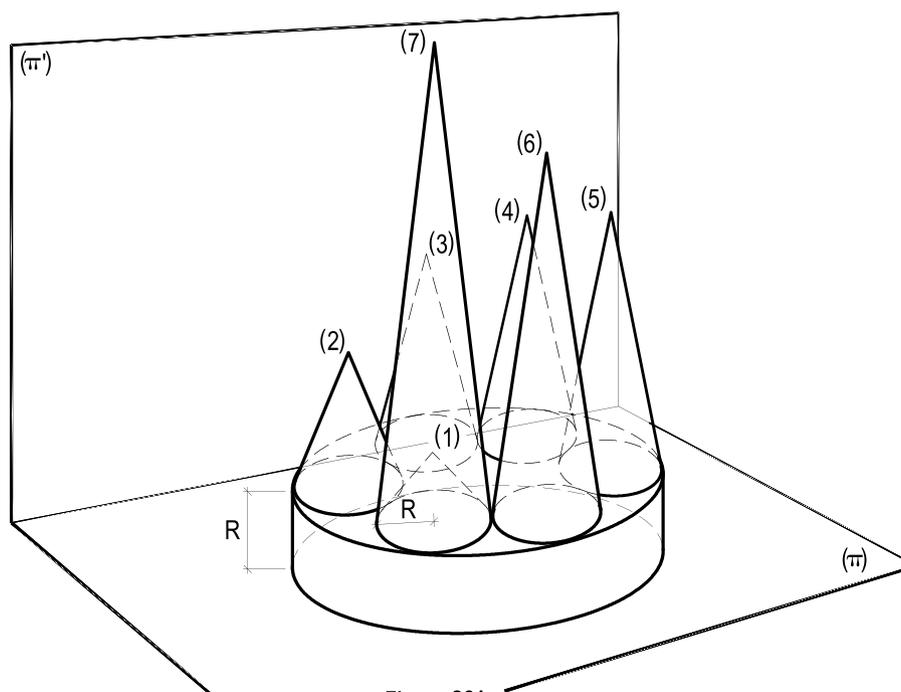


Figura 861

Inscrito o conjunto de seis círculos iguais naquela base (Figura 862), fica definido o valor de seus raios  $e$ , portanto, das alturas dos cones, que podem, então, ser construídos, determinada, como proposto, a posição do primeiro destes (Figuras 861 e 862).

A numeração dada aos vértices dos cones apenas colabora com a orientação imposta aos sólidos (Figuras 861 e 862).

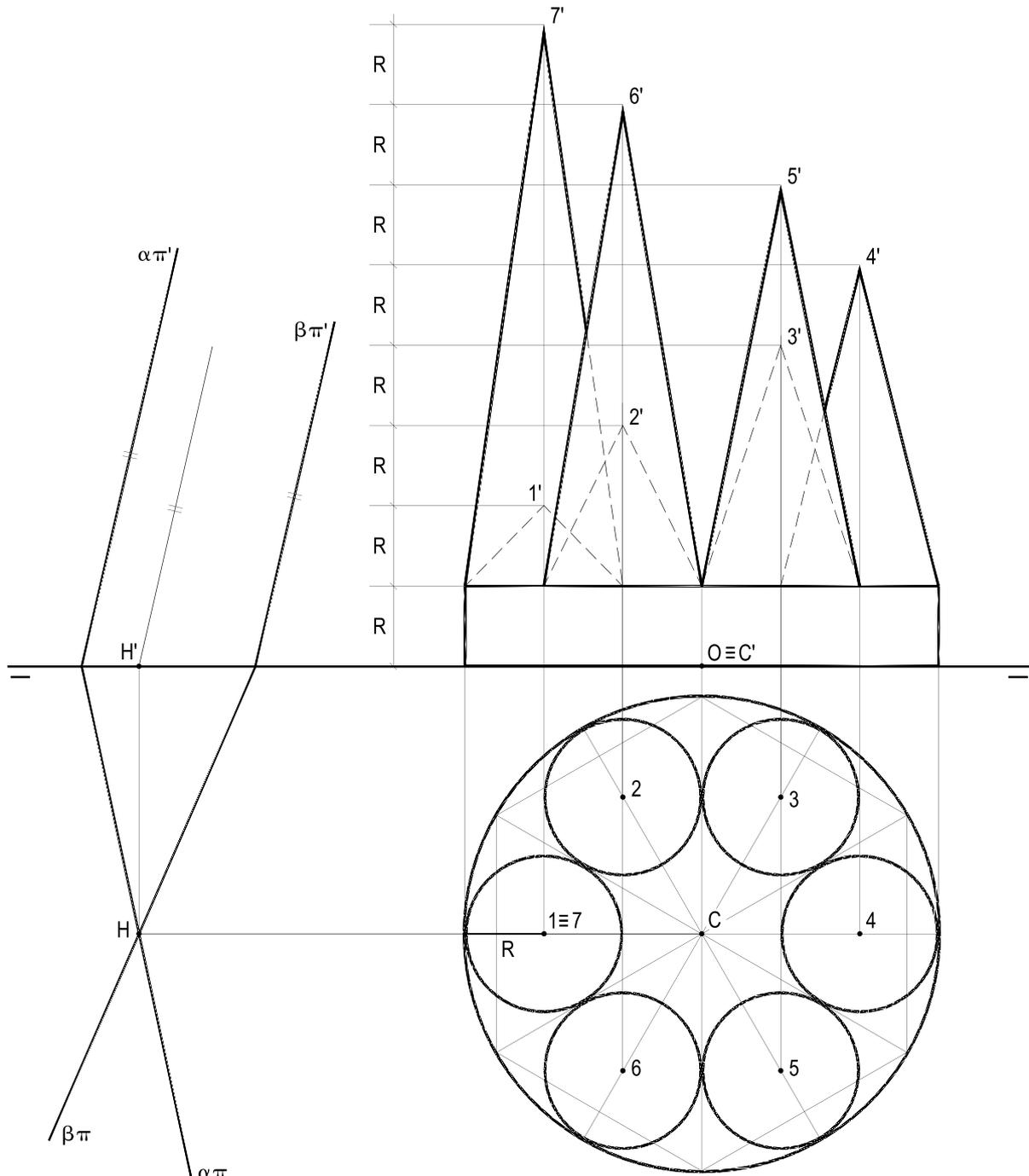


Figura 862

195.6 – Dados os pontos (V) e (O), por suas projeções, construir as projeções do cone de revolução de vértice (V), eixo (V)(O), o ponto (O) sendo o centro da base, sabendo que o raio da base do cone é igual à terça parte da cota do ponto (V).

Solução: Por se tratar de um cone de revolução, o plano ( $\alpha$ ), pertencente ao ponto (O) e construído perpendicularmente à reta (V)(O), há de ser o plano de base do sólido.

Com seu rebatimento, após determinar o valor de R do raio do círculo base, pode-se construí-lo, em V.G. (Figura 863) e, com seu alçamento, obter os eixos da elipse, projeção horizontal desse círculo e dois diâmetros conjugados de elipse, projeção vertical (Figura 863) e, enfim, completar as projeções do sólido.

Para a visibilidade, cabe observar que, pelos dados, o vértice (V) está à frente e acima do plano ( $\alpha$ ) da base.

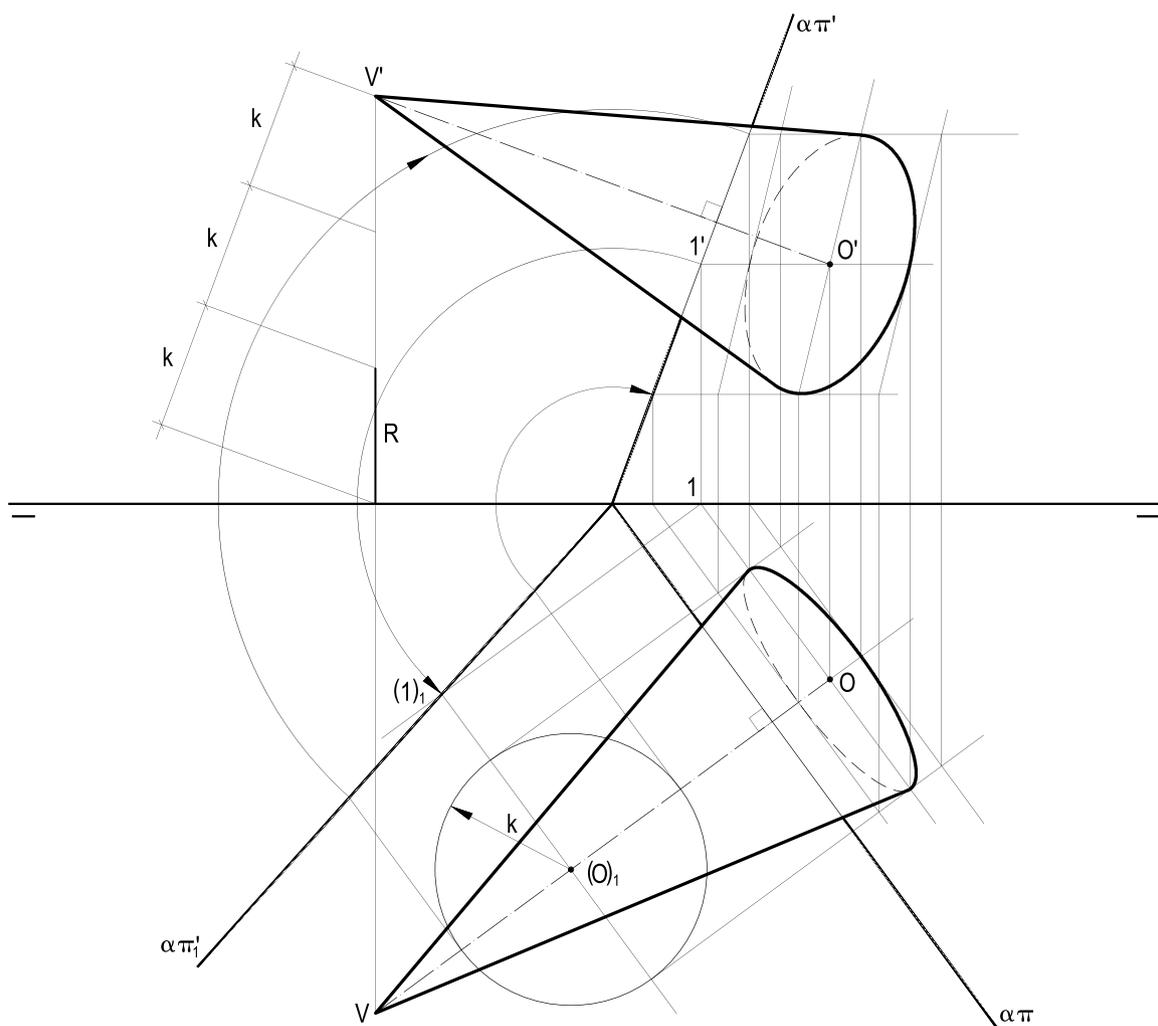


Figura 863

195.7 – Dada uma superfície cônica de revolução de duas folhas, por seu eixo vertical ( $e$ ), seu vértice ( $V$ ) e por uma geratriz ( $V$ )( $H$ ), determinar as projeções da seção nela produzida pelo plano secante, de topo, ( $\alpha$ ), transparente, dado por seus traços.

Solução: Posta frontal a geratriz ( $V$ )( $H$ ), mediante uma rotação em torno do eixo ( $e$ ), sua nova projeção vertical  $V'\bar{H}'$  (Figura 864) define a projeção vertical da superfície.

Por ser ( $\alpha$ ) de topo, a projeção vertical  $A'B'$  da seção fica, de imediato, definida e, pelo teorema de Dandelin (*Geometria Espacial*, número 209), a inscrição do círculo no triângulo  $V'A'B'$  fornece  $F'_1$ , projeção vertical de um dos focos da elipse seção.

Em projeção horizontal, determina-se o segundo foco  $F_2$  e, conhecido também seu eixo real  $AB$ , fica simples a construção da projeção horizontal da seção (*Cônicas*, número 11).

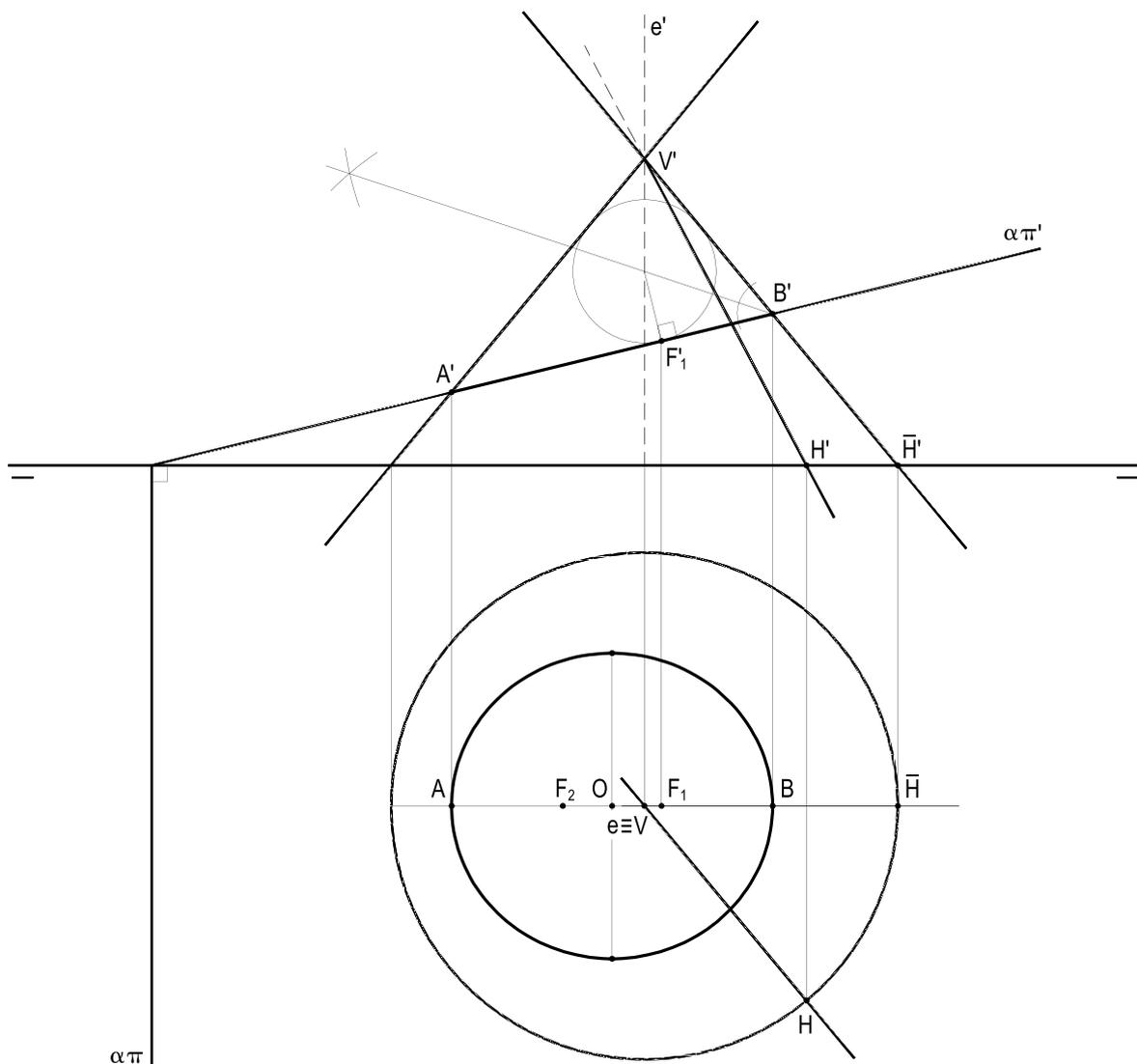


Figura 864

195.8 – Dada uma superfície cônica de revolução de duas folhas, com vértice (V), eixo vertical (e), com uma geratriz (V)(H) conhecida, determinar as projeções da seção nela produzida pelo plano transparente, de topo, ( $\alpha$ ), dado por seus traços.

Solução: Como no exemplo anterior, obtém-se, de pronto, a projeção vertical  $A'B'$  do eixo real de seção, agora uma hipérbole, já que o plano secante ( $\alpha$ ), oblíquo ao eixo (e), atinge as duas folhas de superfície (*Geometria Espacial*, número 209). E a esfera de Dandelin, representada, em projeção vertical, por um dos círculos exinscritos ao triângulo  $V'A'B'$  (Figura 865), fornece um primeiro foco  $F'_1$  e, então, a projeção horizontal correspondente  $F_1$  e, por simetria, a do segundo foco  $F_2$  da hipérbole que, assim, pode ser construída por pontos (*Cônicas*, número 91).

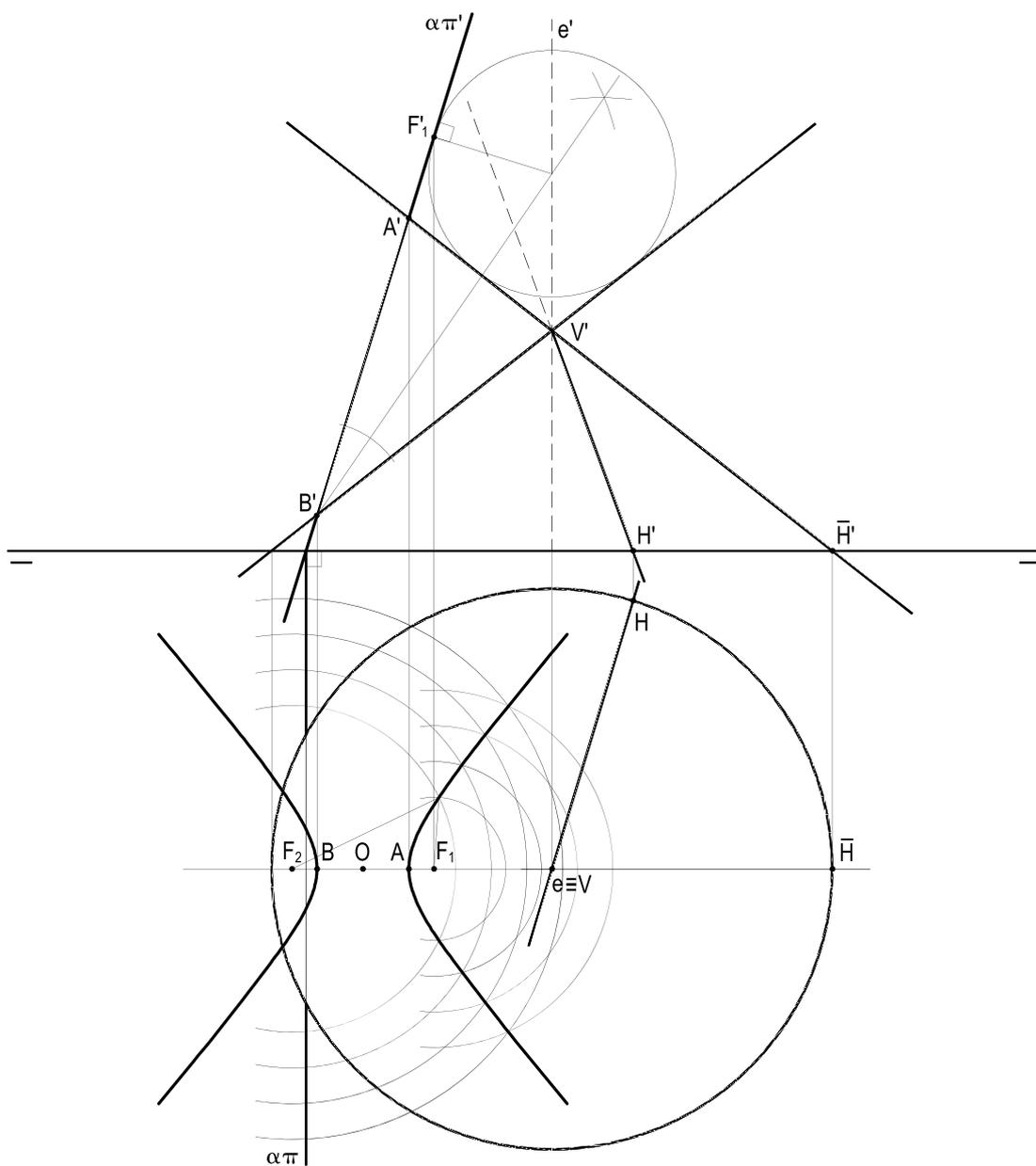


Figura 865

195.9 – Dada uma superfície cônica de revolução de duas folhas, com vértice (V), eixo vertical (e), com uma geratriz conhecida (V)(H), determinar as projeções da seção nela produzida por um plano de topo ( $\alpha$ ), dado por seus traços, paralelo a uma geratriz frontal (V)(G) da superfície.

Considerar ( $\alpha$ ) transparente.

Solução: Tal como nos dois exemplos anteriores, aproveita-se ser o plano secante ( $\alpha$ ) projetante em relação a ( $\pi'$ ) para definir a projeção vertical da seção que sabe-se (*Geometria Espacial*, número 209) ser uma parábola.

Utilizando a projeção vertical da esfera de Dandelin correspondente, bem como a interseção (d) do plano secante com o do paralelo do contato da esfera da Dandelin com a superfície cônica (*Geometria Espacial*, número 209), que é a diretriz da parábola seção, pode-se construir, por pontos, essa parábola, em projeção horizontal (*Cônicas*, número 145), conforme indicado na Figura 866.

A projeção vertical da seção é a semirreta de origem A' (Figura 866) pertencente ao traço vertical  $\alpha\pi'$  do plano secante.

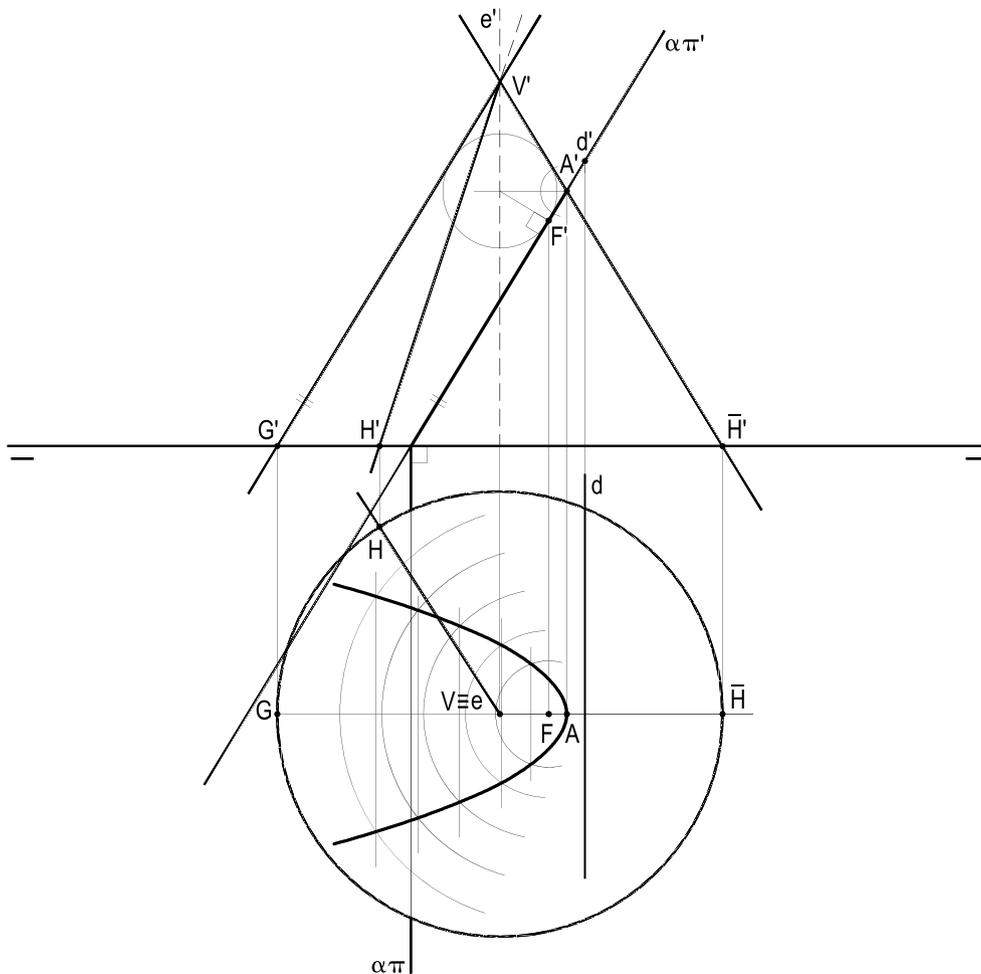


Figura 866

195.10 – O triângulo  $(V)(C)(A)$ , retângulo em  $(C)$ , pertencente a um plano horizontal, sofre uma rotação de  $225^\circ$  em torno de seu cateto  $(V)(C)$ , de modo tal que o cateto móvel  $(C)(A)$  aproxima-se de  $(\pi)$ , em sua rotação, chegando a quase tocá-lo.

Sabendo que  $(V)(C)$  mede o dobro de  $(C)(A)$ , conhecendo as projeções  $A'$ ,  $A$  e  $C$  e sabendo que  $(V)(C)(A)$  se situa no primeiro diedro, pede-se desenhar as projeções do sólido gerado no movimento proposto.

Solução: O sólido há de ser uma parte do cone de revolução do vértice  $(V)$ , eixo  $(V)(C)$ , tendo, então, sua base pertencendo a um plano  $(\alpha)$  que, contendo  $(C)$ , é perpendicular à horizontal  $(V)(C)$  e, por isso mesmo, é vertical, com traços de imediata construção (Figura 867).

Por ser horizontal, o triângulo  $(V)(C)(A)$  vem em V.G. na projeção horizontal. E, com um rebatimento de  $(\alpha)$ , sobre  $(\pi')$ , constrói-se, facilmente, em V.G., o setor circular de centro  $(C)_1$  e raios extremos  $(C)_1(A)_1$  e  $(C)_1(\bar{A})_1$ , que, alçado, produz as projeções da base do sólido pedido.

A tangente de  $V'$  à elipse, projeção vertical do círculo assim construído, completa a projeção vertical do sólido que, em projeção horizontal, aparece com seu contorno aparente triangular, além da geratriz final  $V\bar{A}$  (Figura 867), visível, tal a cota de  $(\bar{A})$ .

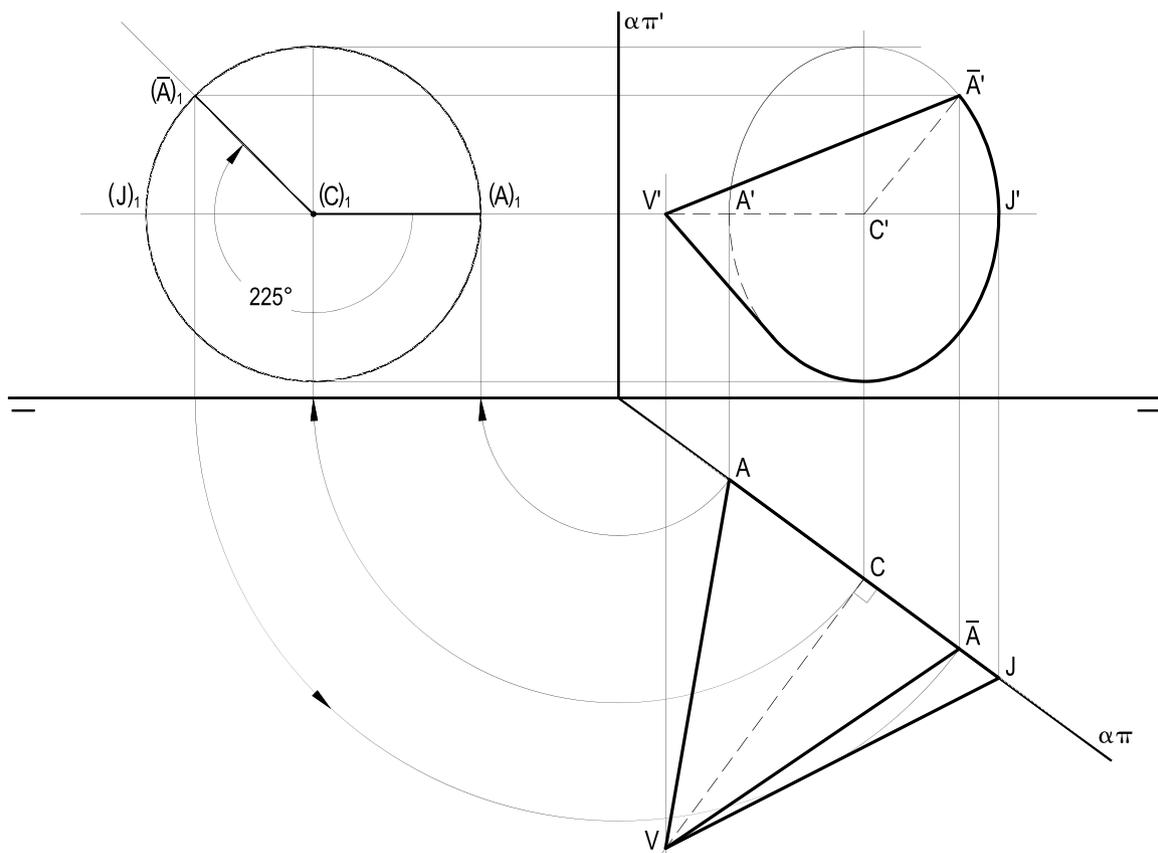


Figura 867

# CAPÍTULO XIX

## ESFERA

### 196 – Superfície esférica

Superfície esférica é a gerada pela rotação completa de uma semicircunferência em torno da reta suporte do diâmetro que a delimita. O centro (O) e o raio R da geratriz (Figura 868) são, então, denominados centro e raio da superfície esférica assim gerada.

Uma superfície esférica de centro (O) e raio R possui uma infinidade de diâmetros, como (A)(B) (Figura 869) – todos os segmentos que, contendo o ponto (O), ficam limitados, por seus extremos (A) e (B), pela superfície.

Tal superfície é (*Geometria Espacial*, número 183.4) o lugar geométrico dos pontos (A), distantes um valor igual a R do ponto fixo (O) (Figura 869).

A notação habitual para uma superfície esférica de centro (O) e raio R é (O, R).

Plano meridiano de uma superfície esférica é todo aquele que contém um qualquer de seus diâmetros. É claro que todo plano ( $\gamma$ ), meridiano de uma superfície esférica (O, R), produz por seção, nela, uma circunferência de círculo, com centro (O) e raio R (Figura 870).

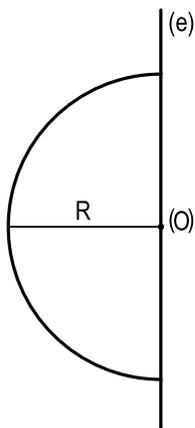


Figura 868

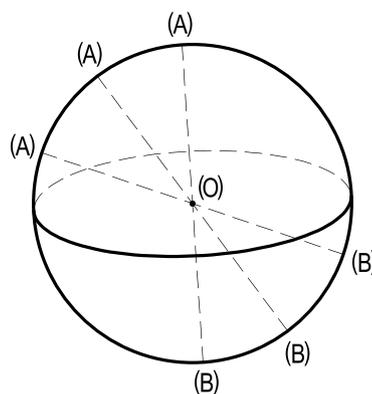


Figura 869

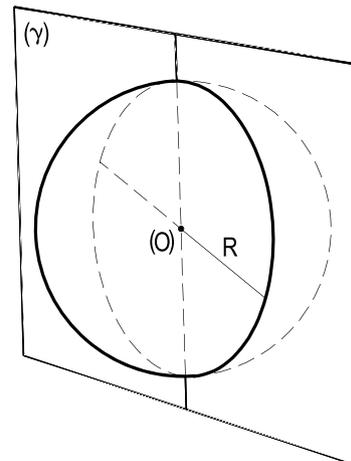


Figura 870

## 197 – Esfera

Esfera é o sólido gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno da reta suporte de seu diâmetro. O centro (O) e o raio R do semicírculo gerador são o centro e o raio da esfera (Figura 868).

É claro que uma esfera de centro (O) e raio R fica precisamente delimitada pela superfície esférica que tem tais centro e raio (Figura 869), sendo, então, anotada esfera (O, R).

É também imediato concluir que tal esfera é o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias ao ponto fixo (O) são iguais ou menores que o valor R.

## 198 – Propriedades

198.1 – Todas as seções planas numa esfera são circulares (*Geometria Espacial*, número 212.1). São denominadas paralelos. E mais, os raios dessas seções crescem à medida que o plano secante se aproxima do centro da esfera (Figura 871), alcançando seu valor máximo quando o plano secante contém o centro do sólido, tendo, no caso, a seção raio igual ao próprio raio da esfera (Figura 872), denominando-se, então, equador.

198.2 – Assim, quando se considera uma esfera (O, R) e os planos horizontal e frontal que passam pelo seu centro (O), produzindo, então, duas seções de raios R, uma horizontal e outra frontal, nota-se que tais círculos seções projetam-se em V.G., respectivamente, sobre  $(\pi)$  e sobre  $(\pi')$  (Figura 872), o que implica em que os contornos aparentes de ambas as projeções da esfera sejam círculos de raio R com centros nas projeções O e O' do centro do sólido (Figura 873).

Tais contornos aparentes são as projeções, em V.G., dos equadores horizontal e frontal, assim produzidos.

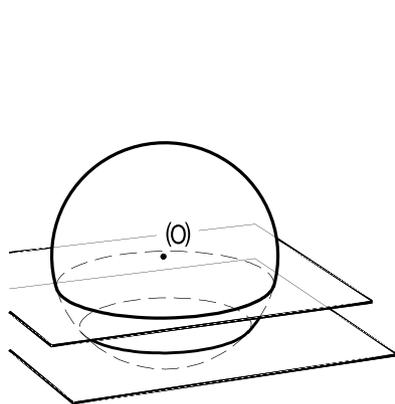


Figura 871

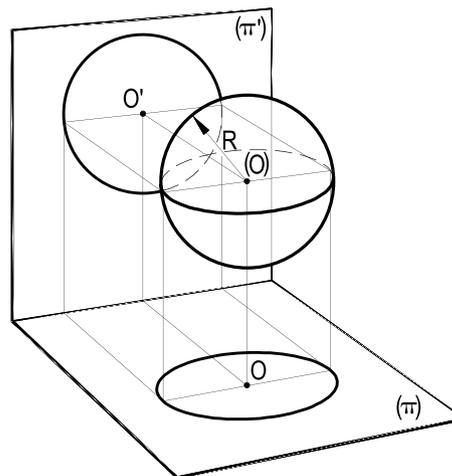


Figura 872

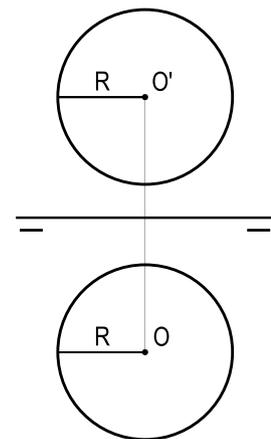


Figura 873

198.3 – Todo plano tangente a uma esfera é perpendicular ao raio relativo ao ponto de contato (*Geometria Espacial*, número 213) (Figura 874).

198.4 – Por um ponto qualquer de uma superfície esférica, pode-se traçar uma infinidade de tangentes à superfície, todas pertencentes ao plano tangente à superfície naquele ponto (*Geometria Espacial*, número 213) (Figura 875).

198.5 – Todas as tangentes de um ponto exterior a uma esfera são iguais. Entenda-se: os segmentos entre o ponto exterior e os pontos de contato das tangentes são iguais (*Geometria Espacial*, número 213) (Figura 876).

198.6 – Quando duas esferas são secantes, sua interseção é um círculo pertencente a um plano perpendicular à reta formada pelos centros das duas esferas (*Geometria Espacial*, número 215.1) (Figura 877).

198.7 – Quando duas esferas são tangentes, exterior ou interiormente, seu ponto de contato pertence à reta formada por seus centros (*Geometria Espacial*, número 215.2) (Figuras 878 e 879).

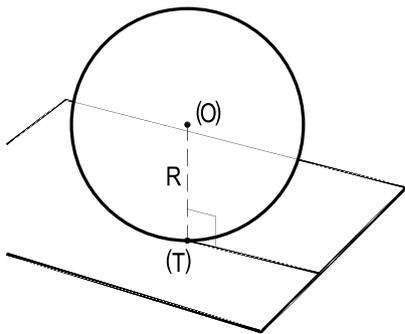


Figura 874

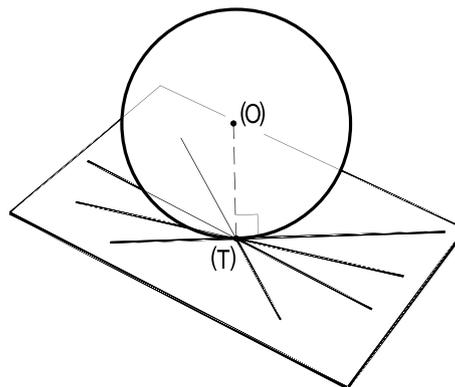


Figura 875

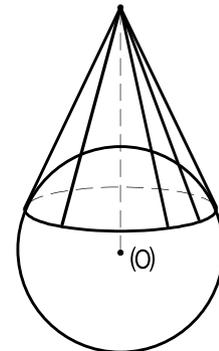


Figura 876

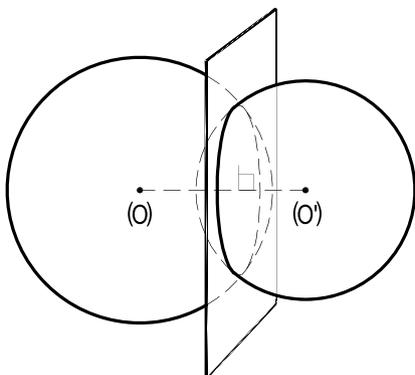


Figura 877

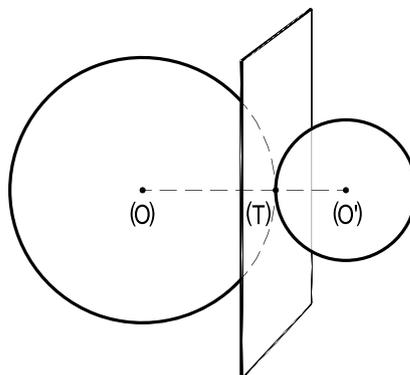


Figura 878

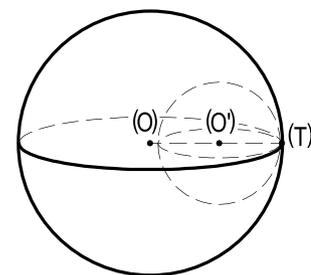


Figura 879

## 199 – Lugares geométricos

199.1 – O lugar geométrico dos pontos que distam um valor constante  $R$  de um ponto fixo (A) é a superfície esférica de centro (A) e raio  $R$ .

199.2 – O lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas, que passam por dois pontos distintos (A) e (B), é o plano mediador do segmento (A)(B) (*Geometria Espacial*, número 33).

199.3 – O lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que passam por três pontos não colineares (A), (B) e (C) é a reta (p), perpendicular ao plano do triângulo (A)(B)(C) e pertencente ao seu circuncentro (O) (Figura 880) (*Geometria Espacial*, número 34.2).

199.4 – Por quatro pontos não coplanares passa apenas uma superfície esférica, aquela, cujo centro é comum a todos os pares de planos mediadores dos diversos segmentos formados por aqueles pontos (Figura 881) (*Geometria Espacial*, número 34.3).

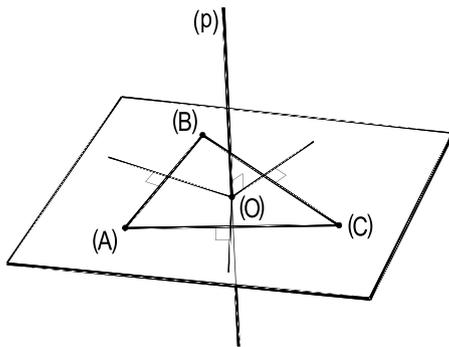


Figura 880

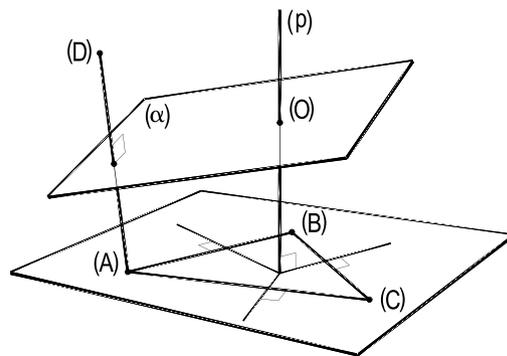


Figura 881

199.5 – O lugar geométrico dos centros das esferas internas a um diedro e tangentes às suas duas faces é o bissetor desse diedro (*Geometria Espacial*, número 55.3) (Figura 882).

199.6 – O lugar geométrico dos centros das esferas tangentes a dois planos secantes é o par de planos bissetores dos diedros formados por esses planos (*Geometria Espacial*, número 55.4) (Figura 883).

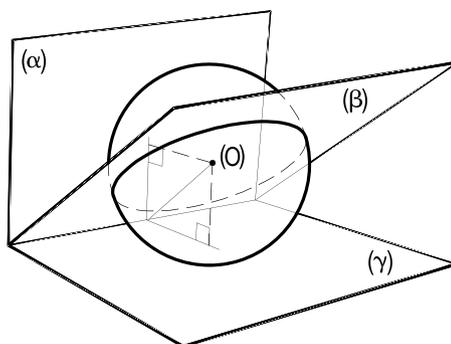


Figura 882

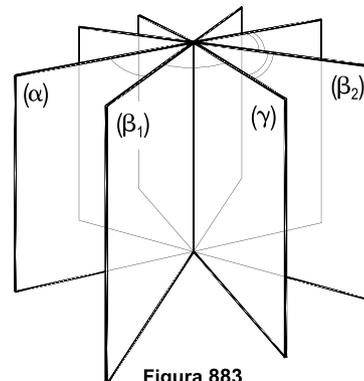


Figura 883

## 200 – Problemas diretos

Os problemas diretos consistem em determinar as projeções de uma esfera e de alguma seção plana nela produzida, tudo atendendo a determinado conjunto de condições impostas, como se passa a exemplificar:

200.1 – Dadas as projeções horizontais dos pontos (A) e (B), pede-se construir as projeções da esfera circunscrita ao tetraedro regular (J) – (A)(B)(C), assente por sua face (A)(B)(C) em ( $\pi$ ) e situado no primeiro diedro, bem como as projeções e a V.G. da seção que o plano ( $\gamma$ ), dado por seus traços, nela produz.

Solução: Construída, em V.G., a face (A)(B)(C) e determinada a altura  $h$  do tetraedro, obtém-se o centro (O) da esfera circunscrita e, sabendo-se (*Geometria Espacial*, número 107.1) que o raio  $R$  dessa esfera vale os três quartos da altura do tetraedro, é pronta a obtenção de seu valor, para construir os contornos aparentes das duas projeções da esfera com centros em  $O'$  e em O e raio  $R$  (Figura 884).

A V.G. da seção que ( $\gamma$ ), de perfil, produz na esfera, o círculo de centro (Z) e raio  $r$  vem, simples, num rebatimento de perfil.

A segunda posição possível para o vértice (C) foi abandonada porque não haveria seção pelo plano dado ( $\gamma$ ).

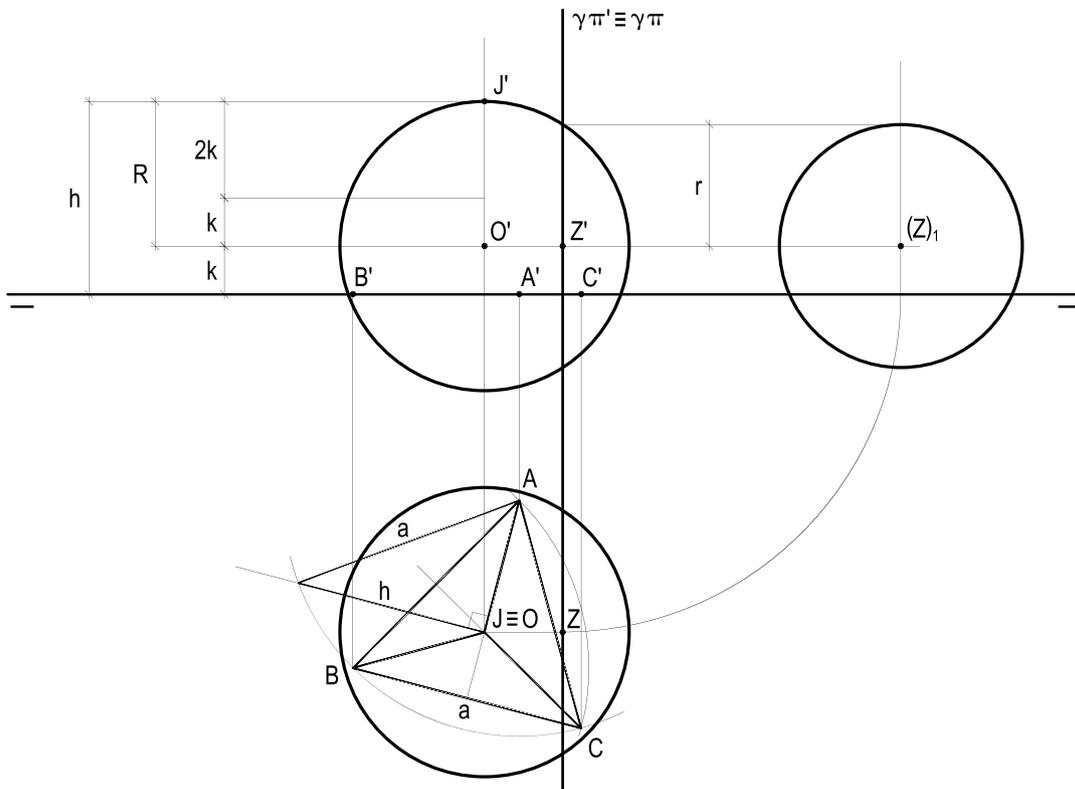


Figura 884

200.2 – O octaedro regular (J) – (A)(B)(C)(D) – (S), de faces opacas, tem sua diagonal (J)(S) vertical, (J) com cota superior a (S), e se situa no primeiro diedro.

Dadas as projeções A, A' e B, pede-se construir as projeções do octaedro, bem como as da esfera nele inscrita.

Solução: A construção do octaedro é muito simples, por ter sua seção diagonal quadrada (A)(B)(C)(D) projetada em V.G. sobre  $(\pi)$ , já que a diagonal (J)(S) é vertical.

Para a construção da esfera inscrita no octaedro, vale lembrar (*Geometria Espacial*, número 115.6) que seu diâmetro é igual à distância entre duas faces opostas do poliedro (Figura 885). Por isso, à parte (Figura 886), constrói-se o triângulo isósceles  $\bar{J}\bar{M}\bar{N}$ , já que a altura relativa a um dos lados iguais mede esse diâmetro  $2r$ .

Obtida tal medida, por ser o centro da esfera o próprio centro do octaedro, fica imediato desenhar os contornos aparentes das projeções da esfera, que restará invisível, pela opacidade imposta às faces do octaedro (Figura 887).

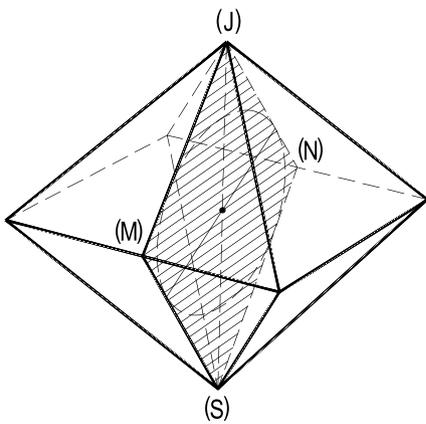


Figura 885

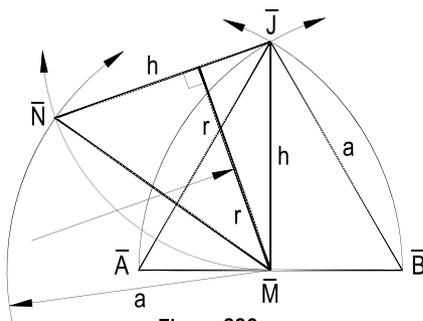


Figura 886

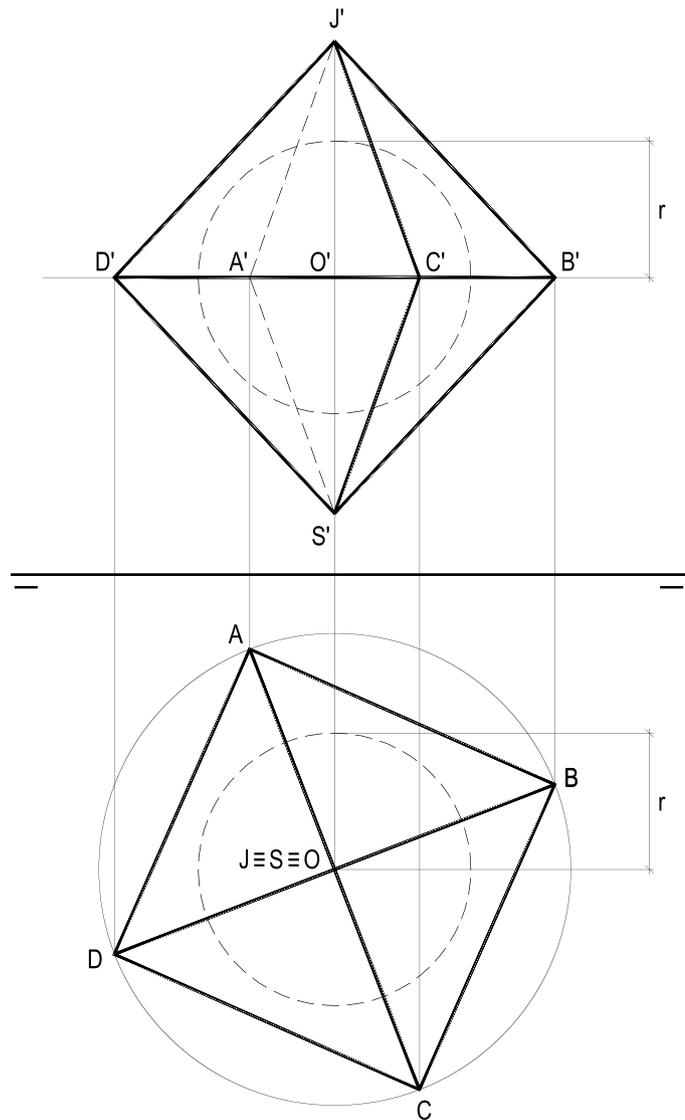


Figura 887

200.3 – O ortoedro (A)(B)(C)(D) – (R)(S)(T)(U), de bases quadradas, situa-se inteiramente no primeiro diedro. Sabendo que seu vértice (R) tem abscissa nula, pede-se construir suas projeções, as projeções da esfera (O) que o circunscreve e a verdadeira grandeza da seção produzida nessa esfera pelo plano ( $\gamma$ ), de perfil, com abscissa zero.

São dadas as projeções dos vértices (A) e (B) e sabe-se que, em é pura, os traços do plano ( $\alpha$ ), do quadrado (A)(B)(C)(D), formam  $60^\circ$ , voltados para a direita, no primeiro diedro.

Solução: O arco capaz de  $60^\circ$  para o segmento A'B proporciona o traço (J) de ( $\alpha$ ) com a linha da terra e, com o rebatimento de ( $\alpha$ ), pode-se construir a primeira base (A)(B)(C)(D) do ortoedro, em V.G.

As perpendiculares, por (A), (B), (C) e (D) a ( $\alpha$ ), e o traço (R) da primeira delas com ( $\gamma$ ), mais o traçado de paralelas, completam o prisma e a V.G.  $O'_1C'_1$  da semidiagonal (O) (C) fornece o valor do  $r$  do raio da esfera (Figura 888). A V.G.  $(c)_1$  do círculo, seção plana de ( $\gamma$ ) na esfera, é de simples obtenção, pelo rebatimento de ( $\gamma$ ) sobre ( $\pi'$ ) (Figura 888).

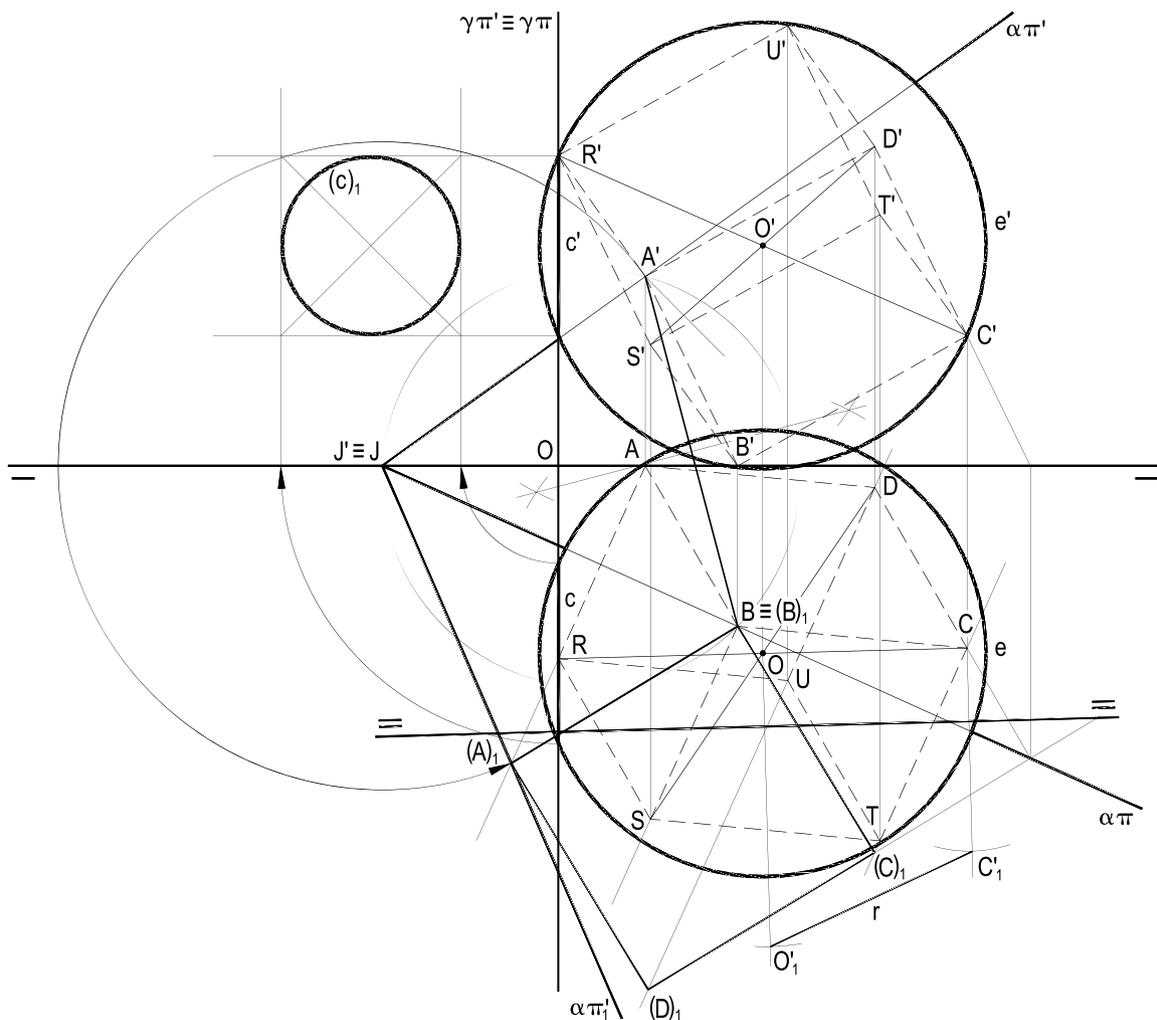


Figura 888

200.4 – Dados, por suas projeções, três pontos (R), (S) e (T), não colineares e, por seus traços, dois planos de topo ( $\gamma$ ) e ( $\varphi$ ), pede-se construir as projeções de duas superfícies esféricas concêntricas, uma passando por aqueles três pontos e outra tangente aos dois planos dados.

Solução: Para poder passar por três pontos não colineares, a primeira superfície esférica tem de ter o seu centro (O) sobre a perpendicular (p) ao plano do triângulo formado pelos três pontos, que contenha seu circuncentro (C) (número 199.3).

E, para ser tangente a dois planos não paralelos ( $\gamma$ ) e ( $\varphi$ ), a segunda superfície esférica deve ter seu centro – o mesmo centro (O) da primeira – num dos dois bissetores dos ângulos formados por esse dois planos (número 199.6).

Assim, para obter o centro (O) comum às duas superfícies esféricas, basta construir a reta (p) perpendicular ao plano ( $\alpha$ ) dos três pontos dados (R), (S) e (T), passando pelo circuncentro (C) do triângulo (R)(S)(T), e os bissetores ( $\beta_1$ ) e ( $\beta_2$ ) dos ângulos formados pelos planos ( $\gamma$ ) e ( $\varphi$ ), dados. O ponto (O) será a interseção de (p) com ( $\beta_1$ ) ou com ( $\beta_2$ ).

Nas Figuras 889 e 890 apresentamos apenas o bissetor ( $\beta_1$ ), enfatizando haver uma segunda solução para o ponto (O), salvo no caso muito particular de (p) ser paralela a ( $\beta_2$ ).

( $c_1$ ) e ( $c_2$ ) são as duas superfícies esféricas pedidas (Figura 890).

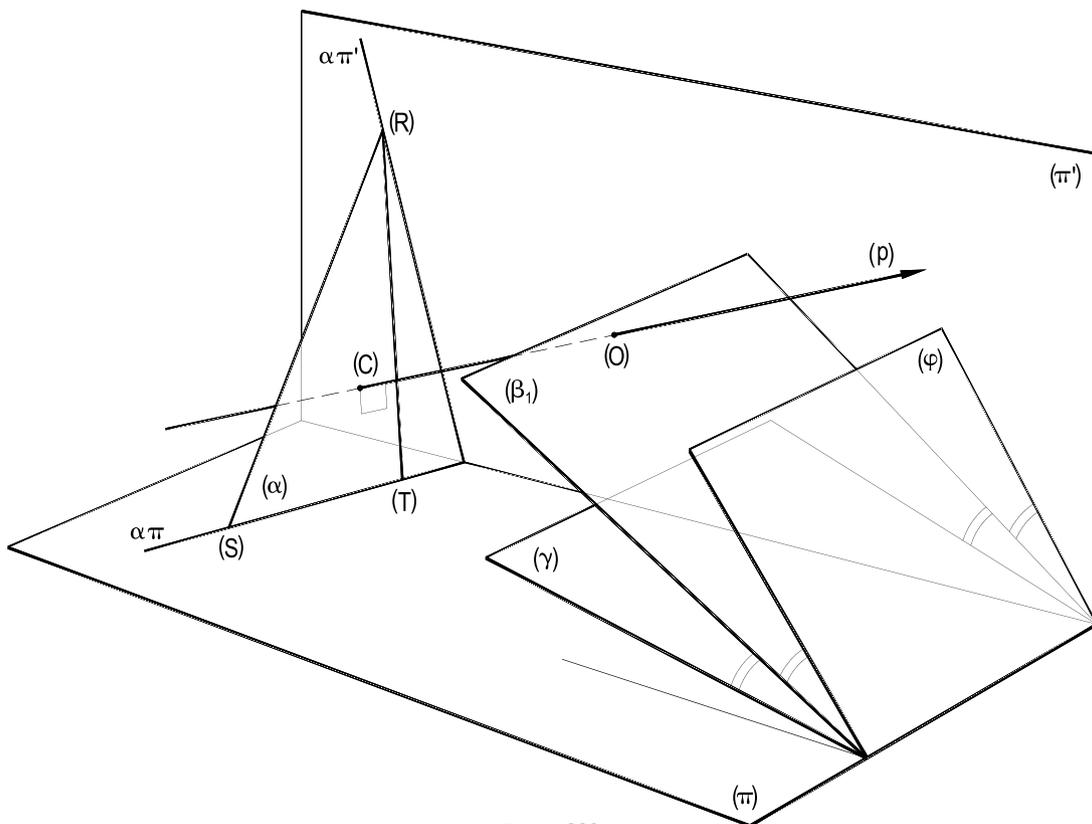


Figura 889

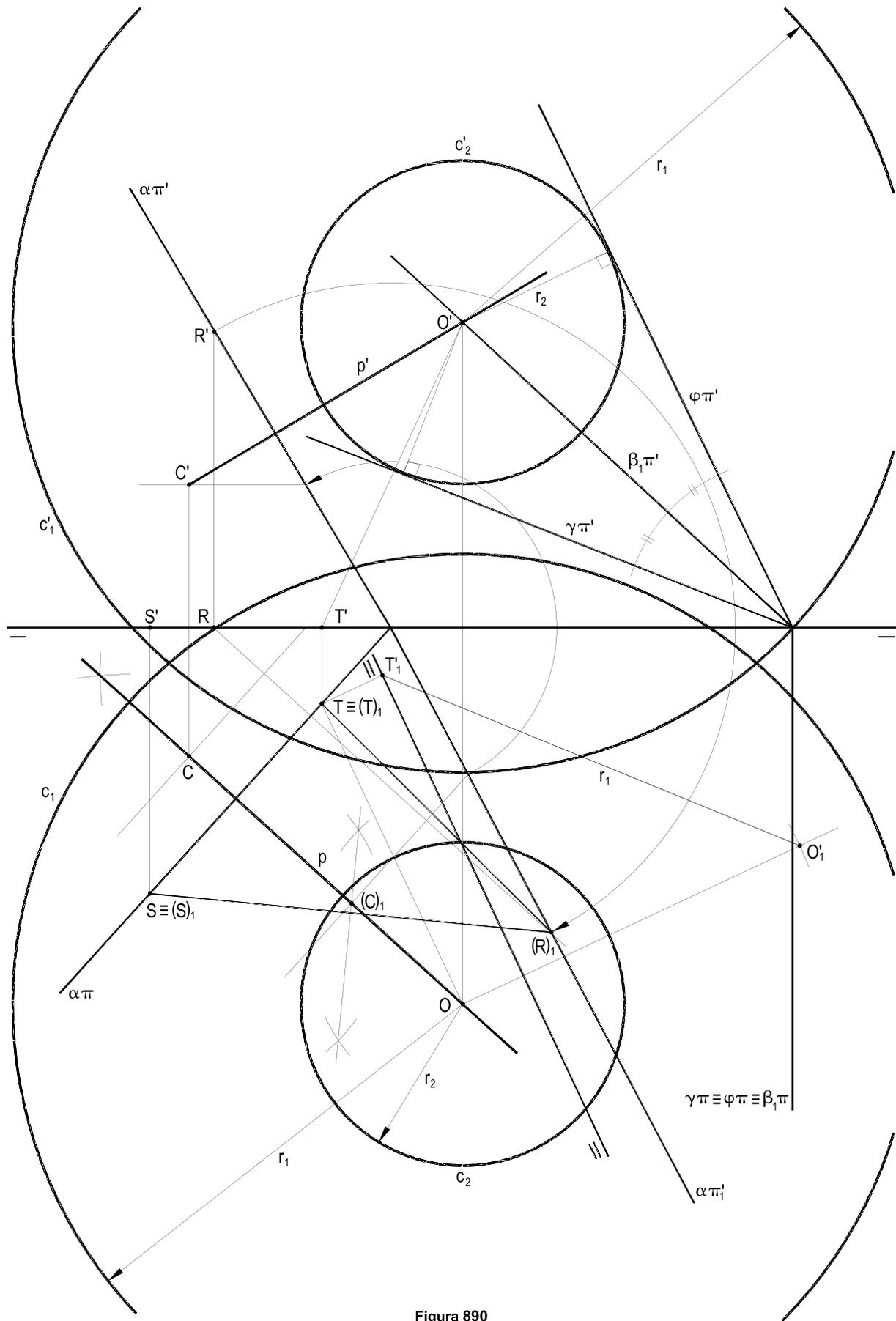


Figura 890

200.5 – A pirâmide hexagonal regular  $(V) - (A)(B)(C)(D)(E)(F)$ , situada no primeiro diedro, está assente, pela base, no plano  $(\alpha)$ , paralelo à linha de terra, tendo altura igual ao dobro de sua aresta básica.

Dadas as projeções dos vértices  $(A)$  e  $(B)$ , pede-se construir as projeções da pirâmide e da esfera nela inscrita, admitindo opacas todas as faces do poliedro.

Solução: Com os traços da reta  $(A)(B)$ , obtêm-se, de pronto, os traços do plano  $(\alpha)$  e, com seu rebatimento sobre  $(\pi)$ , constrói-se, em V.G., o hexágono regular  $(A)_1(B)_1(C)_1(D)_1(E)_1(F)_1$ , no primeiro diedro (Figura 893).

Utilizando-se um corte de perfil, além de se obter a vista lateral  $\bar{V}$  do vértice da pirâmide, consegue-se construir, a V.G.  $\bar{V} \bar{O} \bar{M}$  do triângulo  $(V)(O)(M)$ , (Figura 891), que permite determinar o valor  $r$  do raio da esfera inscrita na pirâmide, conforme a construção auxiliar apresentada na Figura 893, reunindo a altura  $\bar{V} \bar{O}$  da pirâmide e o apótema  $\bar{O} \bar{M}$  de sua base, repetindo o indicado nas Figuras 891 e 892.

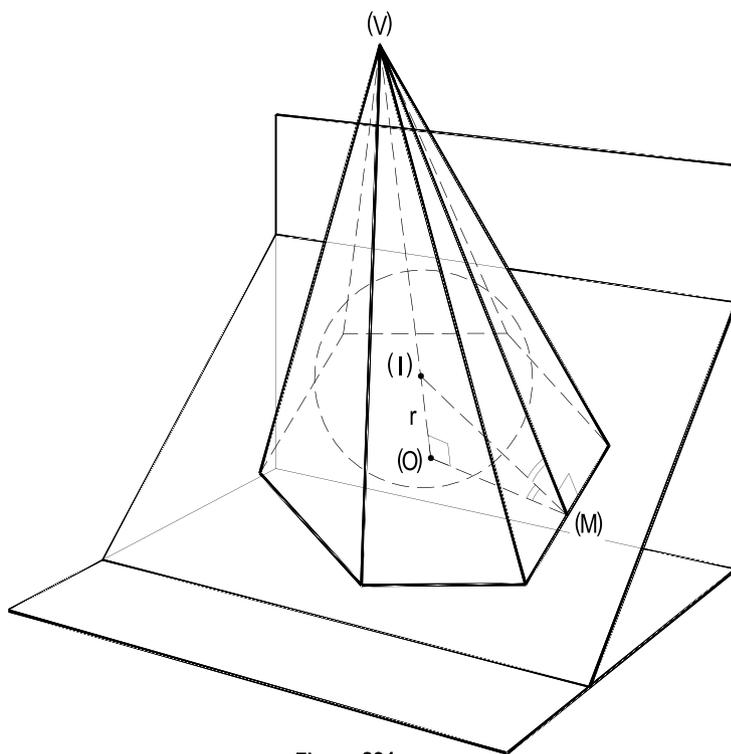


Figura 891

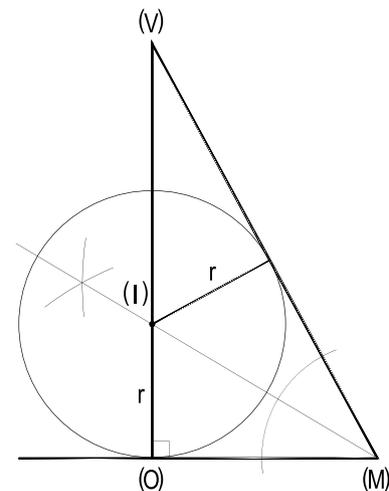


Figura 892

Em épura, os contornos aparentes da esfera, ambos tracejados, confirmam a opacidade imposta às faces da pirâmide (Figura 893).

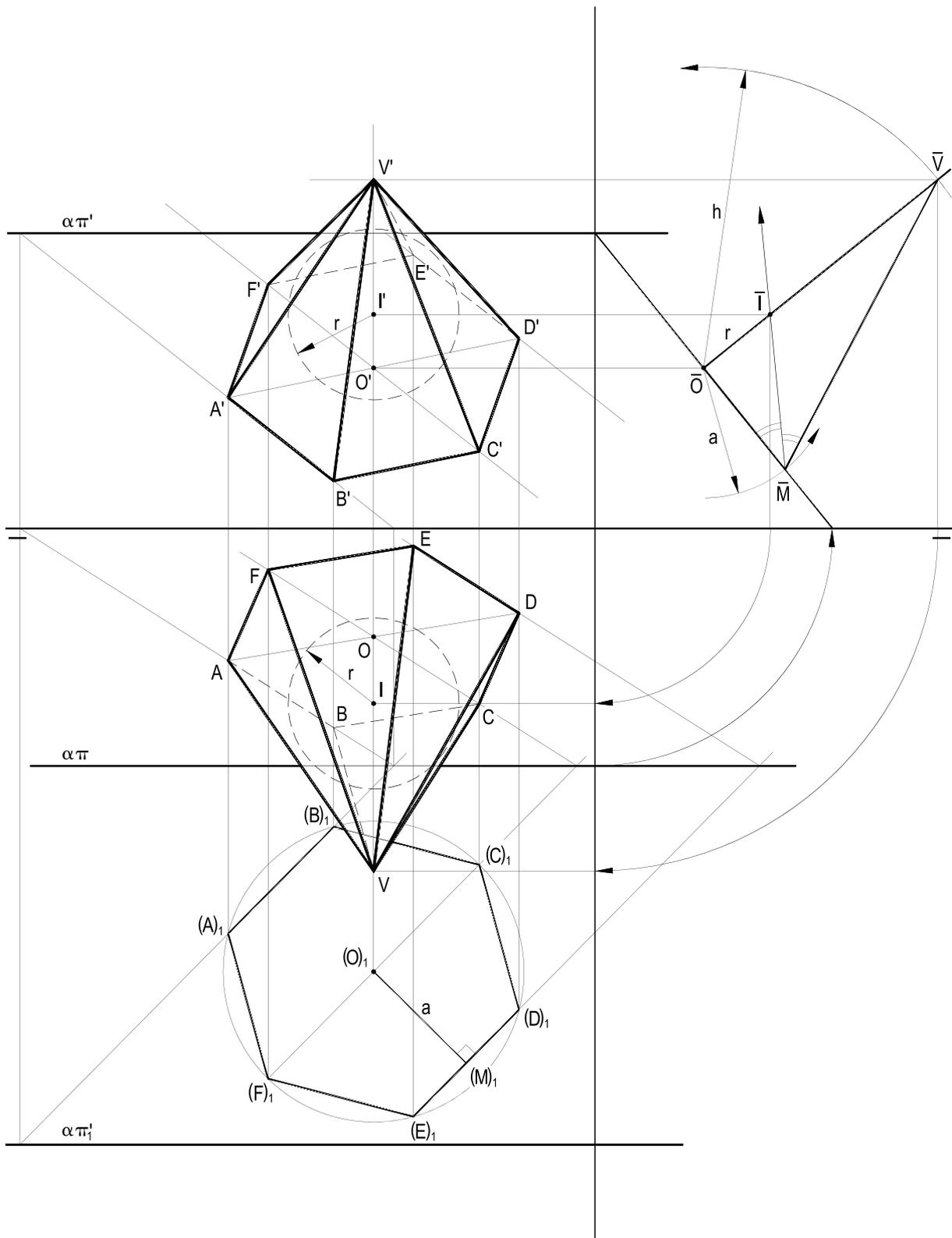


Figura 893

200.6 – O tetraedro irregular (J) – (A)(B)(C) tem sua aresta (J)(A) sobre a linha de terra, (J) com a abscissa inferior à de (A). As faces (J)(B)(C) e (A)(B)(C) são triângulos retângulos, respectivamente, em (J) e em (A).

Sendo dadas as projeções dos vértices (B) e (C), pede-se construir as projeções do tetraedro e da esfera a ele circunscrita, admitindo transparente a superfície da esfera, mas opacas as faces do tetraedro.

Análise: Sabe-se (*Geometria Plana*, número 128.3) que, em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade dessa hipotenusa, como raio que é do círculo circunscrito ao triângulo, que tem como um de seus diâmetros a hipotenusa desse triângulo (Figura 894).

Assim, o tetraedro em estudo, por ter duas faces (J)(B)(C) e (A)(B)(C), triângulos retângulos de mesma hipotenusa (B)(C), é tal que o ponto (M), médio de (B)(C), equidista dos quatro vértices do sólido, já que os quatro segmentos, (M)(B), (M)(C), (M)(J) e (M)(A) são todos iguais ao raio R da esfera circunscrita ao tetraedro (Figura 896).

A obtenção dos vértices (J) e (A) resume-se, então, na determinação dos dois pontos em que a linha de terra corta a superfície da esfera de diâmetro (B)(C) (Figura 896).

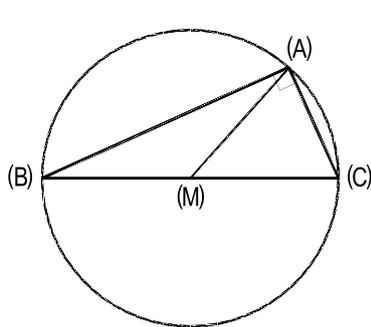


Figura 894

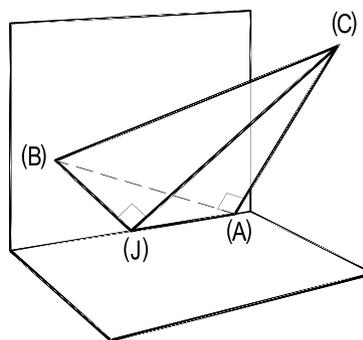


Figura 895

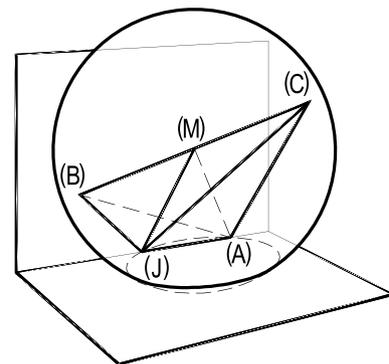


Figura 896

Mas, em verdade, há, para o caso, procedimento bem mais simples para as determinações dos vértices procurados (J) e (A) que a utilização da superfície esférica de centro (M) e diâmetro (B)(C), visto que (M), (J) e (A) definem um plano ( $\alpha$ ), pertencente à linha de terra (Figura 897), reduzindo a questão a uma trivial construção plana, como se verá na épura desenvolvida na Figura 898.

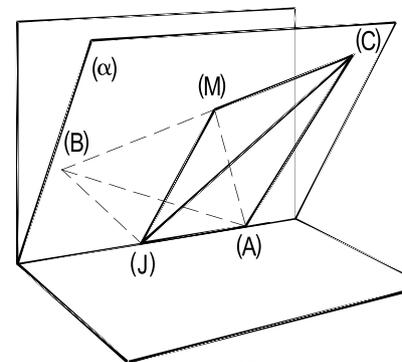


Figura 897

Solução: Determinado o ponto (M), médio de (B)(C) e, mediante uma mudança de ( $\pi$ ), a V.G. do raio R, distância de (M) a cada um dos vértices do sólido, com o rebatimento do plano ( $\pi'\pi$ )(M) sobre ( $\pi$ ) e o traçado, em V.G., da circunferência de centro (M)<sub>1</sub> e raio R, obtêm-se os pontos (J) e (A) procurados (Figura 898).

Para as visibilidades foram utilizadas as retas auxiliares de topo (1)(2) e vertical (3)(4), para comparar cotas e afastamentos das retas reversas (A)(B) e (J)(C) (ver número 167.7).

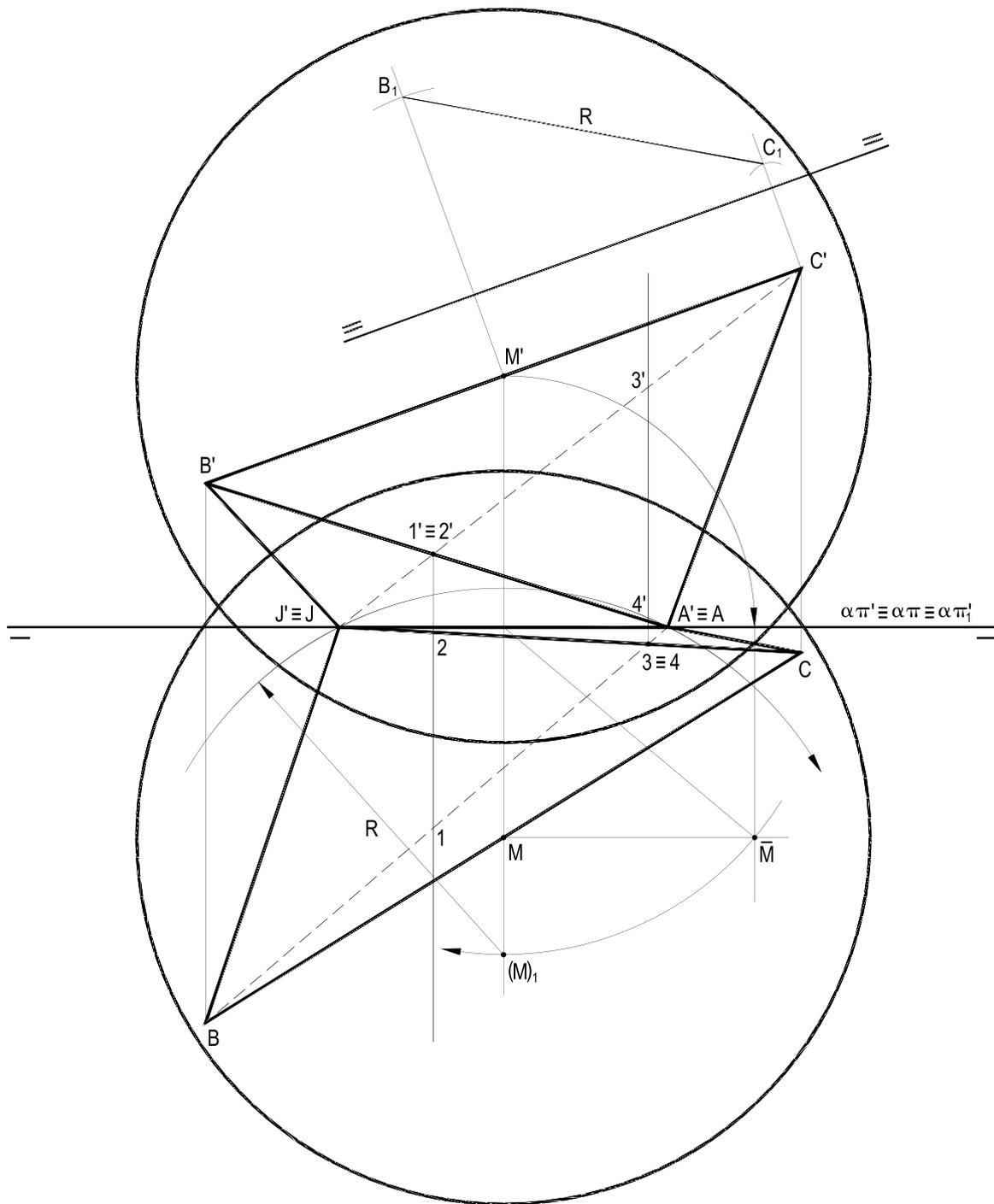


Figura 898

200.7 – Um cubo situado no primeiro diedro tem sua face (A)(B)(C)(D), em  $(\pi)$ , dada pelas projeções horizontais dos vértices (A) e (B).

Quatro esferas iguais, tangentes, consecutivamente, aos pares, tangentes, cada par, a cada face vertical do cubo, e todas assentes na face inferior (A)(B)(C)(D), são incluídas, no interior do cubo, e, além delas, uma quinta esfera, igual às primeiras, tangente a todas essas quatro e também situada no interior do cubo. Por último, uma superfície cônica de revolução, de eixo vertical, tem todas as suas geratrizes tangentes a essa quinta esfera, limitadas entre o vértice, exterior ao cubo, e aos pontos de contato com a superfície da quinta esfera, formando, todas,  $30^\circ$  com o eixo.

Pede-se construir o conjunto de sólidos envolvidos, considerando transparentes as faces do cubo e opacas todas as superfícies curvas das cinco esferas e da superfície cônica de revolução.

Solução: Construída, em V.G., na projeção horizontal, a face (A)(B)(C)(D) do cubo e incluídas as quatro circunferências contornos das projeções horizontais das quatro primeiras esferas, é bem simples completar suas projeções verticais, tanto quanto a do cubo (Figura 901).

A primeira questão que se põe é precisar a posição da quinta esfera, para o que se deve utilizar uma seção diagonal do cubo (Figura 899), aproveitando a tangência da seção meridiana dessa quinta esfera com as duas esferas da primeira camada, seccionadas por esse plano diagonal.

A segunda, ainda mais simples, é, também em seção meridiana, construir o contorno da superfície cônica de revolução, em projeção vertical e, portanto, em V.G.

Foi, para isso, utilizada a propriedade dos triângulos retângulos, com ângulos agudos iguais a  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , que lhes dá a hipotenusa igual ao dobro do menor cateto (*Geometria Plana*, número 200.3). Assim, dada uma circunferência (O, R), para obter sobre uma reta  $r$ , que contenha seu centro, um ponto V que envie a ela tangentes inclinadas de  $30^\circ$  em relação a  $r$ , basta construir uma circunferência igual à dada, com centro no ponto J, em que ela é cortada pela reta  $r$  (Figura 900).

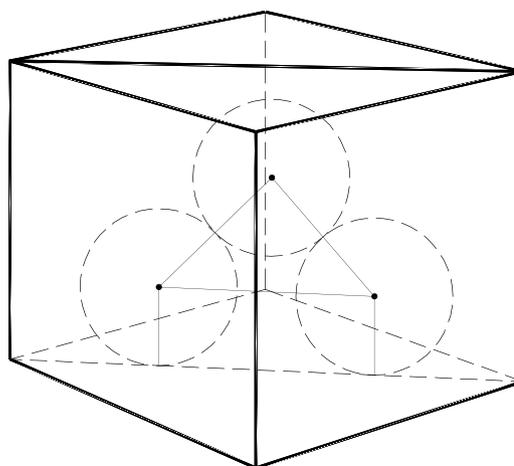


Figura 899

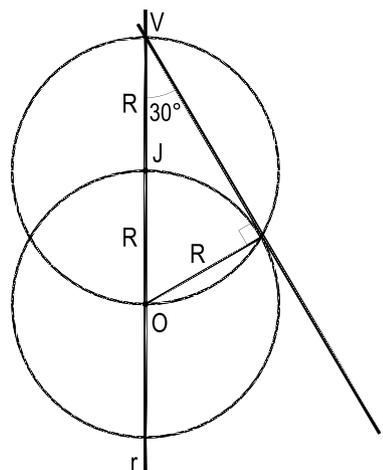


Figura 900

Essa é a construção utilizada, na Figura 901, que resolve a questão proposta, para precisar a projeção vertical  $V'$  do vértice da superfície cônica de revolução pedida.

Na Figura 901 foram incluídas as projeções do paralelo de contato entre a superfície cônica e a da quinta esfera, assim como as da seção circular que a face mais alta do cubo provoca nessa superfície cônica.

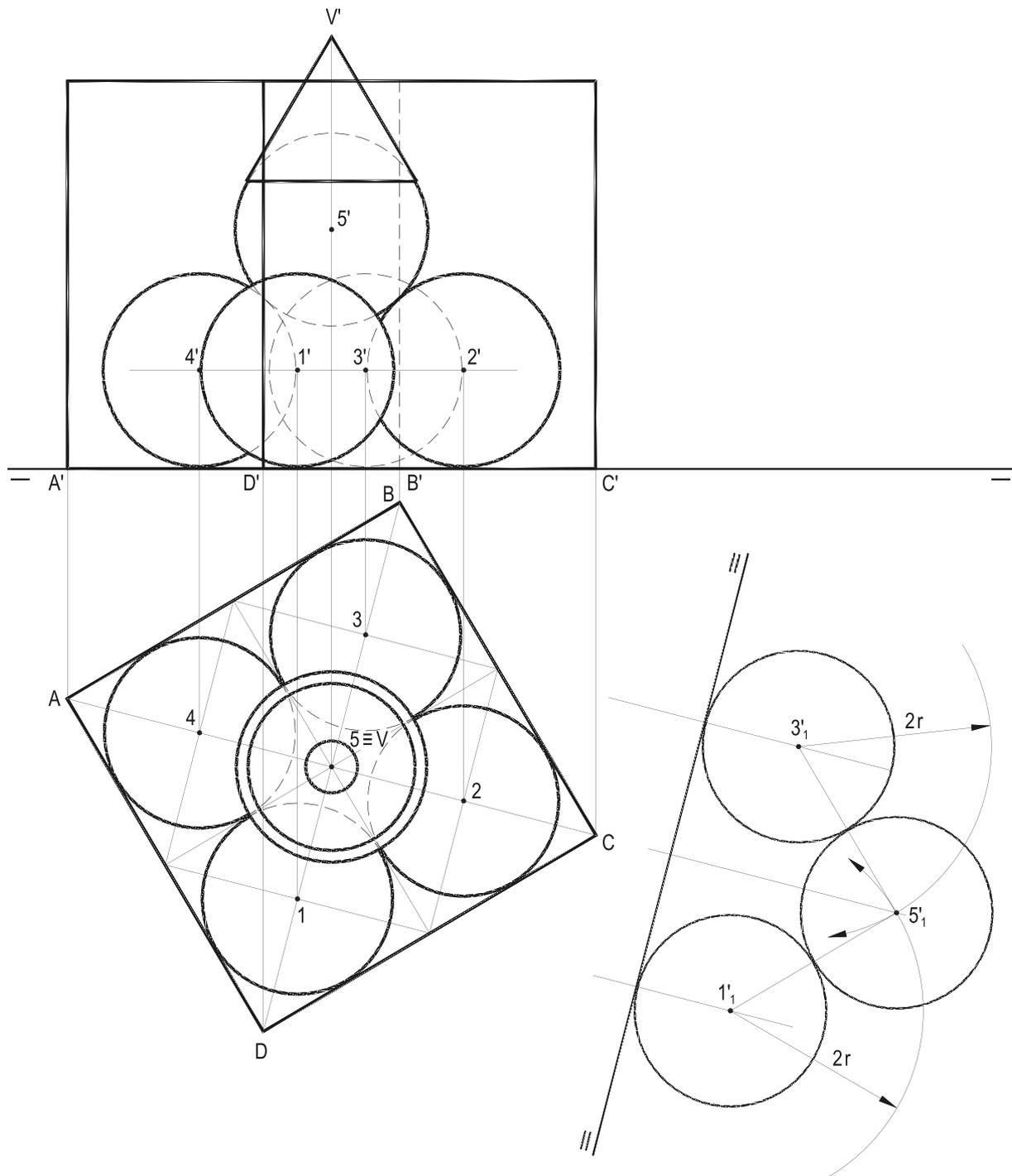


Figura 901

200.8 – Construir as projeções da esfera ( $e$ ), situada no primeiro diedro, e tangente a ( $\pi$ ), a ( $\pi'$ ) e ao plano ( $\alpha$ ), dado por seus traços, sabendo que seu raio é igual à abscissa do ponto ( $\alpha\pi'\pi$ ).

Solução: Para tangenciar ( $\pi$ ) e ( $\pi'$ ), tendo raio  $k$ , igual à abscissa do traço de ( $\alpha$ ) com ( $\pi'\pi$ ) e pertencendo ao primeiro diedro, a esfera ( $e$ ) pedida deve ter seu centro ( $O$ ) na reta ( $r$ ), fronto-horizontal, com cota e afastamento iguais a  $k$  (Figura 902).

E para ser tangente a ( $\alpha$ ), esse ponto ( $O$ ) deve pertencer a um dos planos ( $\gamma$ ) ou ( $\varphi$ ), paralelos a ( $\alpha$ ), distantes  $k$  desse plano.

Assim, o ponto ( $O$ ) há de ser a interseção de ( $r$ ) com ( $\gamma$ ) (Figura 902) ou com ( $\varphi$ ).

A segunda solução, correspondente ao plano ( $\varphi$ ), não foi incluída na é pura, mas é de muito simples obtenção, semelhante à utilizada para a determinação do ponto ( $O$ ) apresentado.

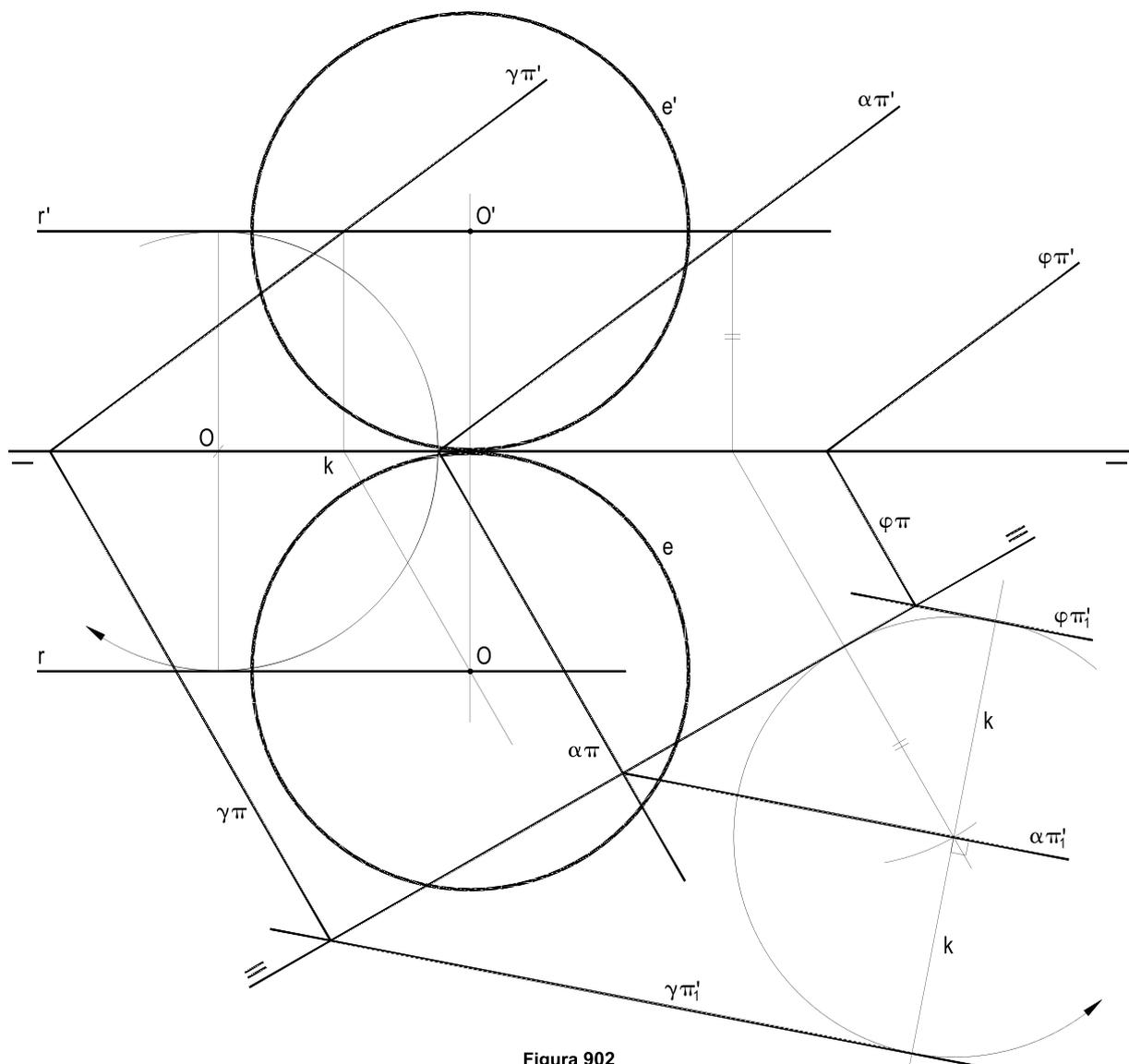


Figura 902

# CAPÍTULO XX

## PARTES DA ESFERA

### 201 – Fuso esférico e cunha esférica

Fuso esférico e cunha esférica são, respectivamente, as porções de uma superfície esférica, ou de uma esfera, compreendidas entre as faces de um diedro, cuja aresta contenha o centro da superfície ou do sólido (Figura 903). O ângulo existente entre as faces do diedro é denominado ângulo do fuso ou da cunha.

Há, portanto, fusos e cunhas esféricas agudos, retos ou obtusos, conforme, respectivamente, seus ângulos sejam menores, iguais ou maiores que  $90^\circ$ .

### 202 – Zona esférica e calota esférica

Zona esférica é a porção de uma superfície esférica compreendida entre dois planos paralelos que a seccionam. A distância  $h$  entre esse planos (Figura 904) é denominada altura da zona e as duas seções são suas bases.

Calota esférica é uma das porções de uma superfície esférica obtida pelo seccionamento da superfície por um plano qualquer (Figura 905). Em não havendo referência específica, quando se corta uma superfície esférica por um plano e se menciona apenas uma das calotas formadas, estará sendo considerada a menor das duas.

A seção produzida na formação da calota é designada sua base e polo o ponto da calota mais distante dessa base. A distância  $h$  desse polo (P) ao plano ( $\alpha$ ) da base (Figura 905) é a altura da calota.

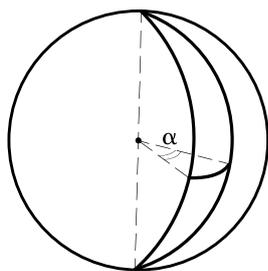


Figura 903

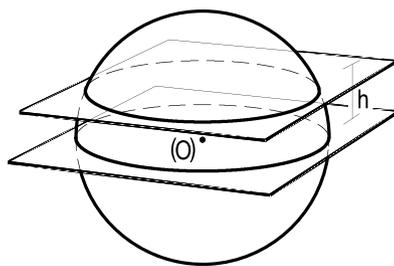


Figura 904

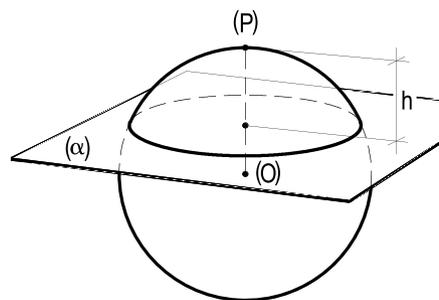


Figura 905

## 203 – Segmentos esféricos

A porção de uma esfera compreendida entre dois planos paralelos que a seccionam é denominada segmento esférico de duas bases. A distância  $h$  entre esses planos (Figura 904) é denominada altura do segmento. Tais sólidos ficam, então, limitados entre dois círculos de planos paralelos e, lateralmente, por uma zona esférica.

Quando um plano corta uma esfera, ficam formados dois sólidos, limitados por um círculo e por uma calota esférica, cada um, sendo ambos denominados segmentos esféricos de uma base (Figura 905). As alturas desses segmentos são a mesma altura das calotas que os limitam.

## 204 – Setor esférico

Setor esférico é o sólido gerado pela revolução de um setor circular em torno de uma reta com ele coplanar, que contenha seu centro e que não o atravesse.

Desse modo, a superfície de um setor esférico, conforme as posições relativas do setor circular girante e do eixo da rotação, pode ser composta por uma zona esférica e pelas superfícies laterais de dois cones de revolução (Figura 906), ou por uma calota esférica e pela superfície lateral de um cone de revolução (Figura 907), ou, enfim (Figura 908), por uma zona esférica, por um círculo e pela superfície lateral de um cone de revolução.

Em todos os casos, denomina-se altura do setor esférico o comprimento  $h$  da projeção do arco (A)(B) girante sobre o eixo (e) de revolução (Figuras 906, 907 e 908), que mede a própria altura da zona ou da calota esférica que limitam, lateralmente, os sólidos.

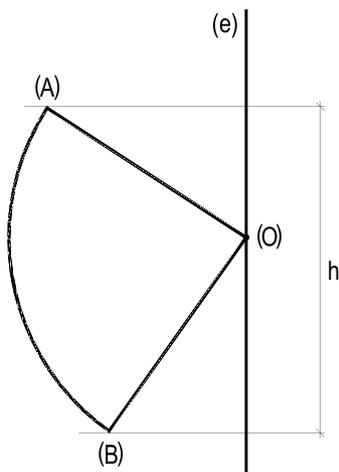


Figura 906

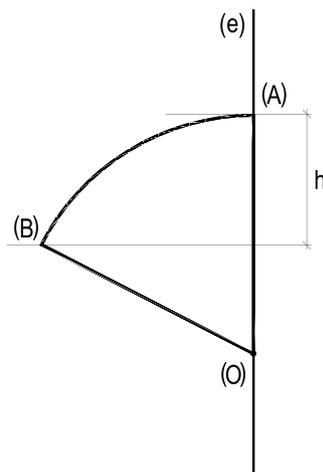


Figura 907

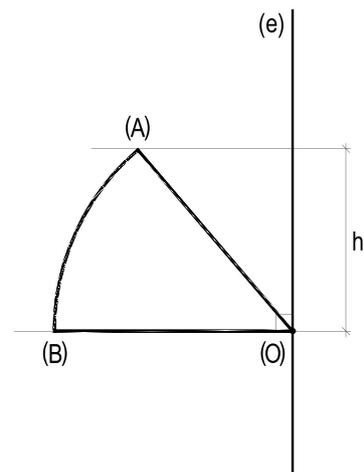


Figura 908

## 205 – Anel esférico

Anel esférico é o sólido gerado pela revolução de um segmento circular em torno de uma reta com ele coplanar, que contenha o centro do círculo ao qual ele pertence e que não o atravesse.

Assim, a superfície de um anel esférico pode ser composta por uma zona esférica e pela superfície lateral de um tronco de cone de revolução de primeira espécie (Figura 909), ou por uma zona esférica e pela superfície lateral de um cilindro de revolução (Figura 910), ou, enfim, por uma calota esférica e pela superfície lateral de um cone de revolução (Figura 911).

Em todos os casos, denomina-se altura ( $h$  nas Figuras 909, 910 e 911) do anel o comprimento da projeção do arco girante (A)(B) sobre o eixo ( $e$ ) de revolução.

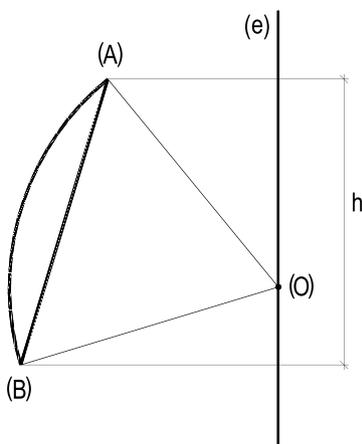


Figura 909

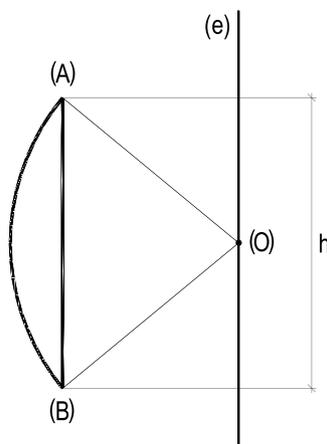


Figura 910

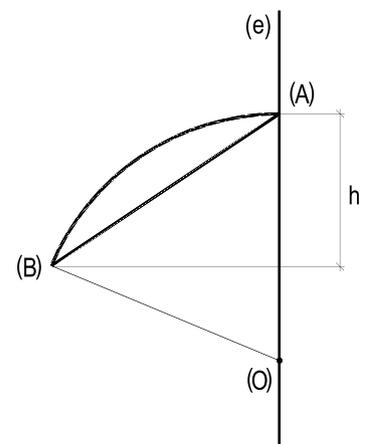


Figura 911

## 206 – Problemas diretos

Os problemas diretos consistem em construir um sólido, parte de uma esfera ou de uma porção de uma superfície esférica, em obediência a determinadas condições estabelecidas, assim como determinar as projeções e as verdadeiras grandezas de seções planas nelas produzidas, conforme condicionamentos impostos.

Seguem alguns exemplos.

206.1 – Uma esfera tem centro (O), dado por suas projeções, e é tangente a ( $\pi$ ).

A esfera é seccionada por dois planos verticais ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) que contêm seu centro e que são respectivamente paralelos às retas reversas ( $r$ ) e ( $s$ ), dadas, ambas, por suas projeções, ficando, assim, formadas quatro cunhas esféricas, das quais, apenas uma se situa inteiramente no primeiro diedro.

Pede-se determinar os traços dos planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), bem como construir as projeções da cunha esférica escolhida.

Solução: Por ser tangente a ( $\pi$ ), o raio  $R$  da esfera em estudo é igual à cota de seu centro ( $O$ ), sendo, por isso, imediato obter suas projeções (Figura 912).

Bem simples, também, a construção dos traços dos planos verticais ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ), paralelos às reversas dadas ( $r$ ) e ( $s$ ), pela condução de seus traços horizontais paralelamente às projeções horizontais dessas duas retas (Figura 913).

Por serem projetantes, os planos ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ) proporcionam, para a projeção horizontal da cunha esférica, o setor circular  $OPQ$  (Figura 913), único inteiramente pertencente ao primeiro diedro.

As projeções verticais das duas semi-elipses de eixos e semieixos  $A'B'$  e  $O'P'$  e  $A'B'$  e  $O'Q'$ , que limitam a projeção vertical da cunha, foram construídas diretamente (*Cônicas*, número 86) (Figura 913).

Quanto à visibilidade, é de destacar que, pela posição da cunha e por serem verticais suas duas faces planas, a projeção horizontal resume-se a seu contorno aparente e, na projeção vertical, apenas  $A'B'$  resta invisível (Figura 913), por seu menor afastamento.

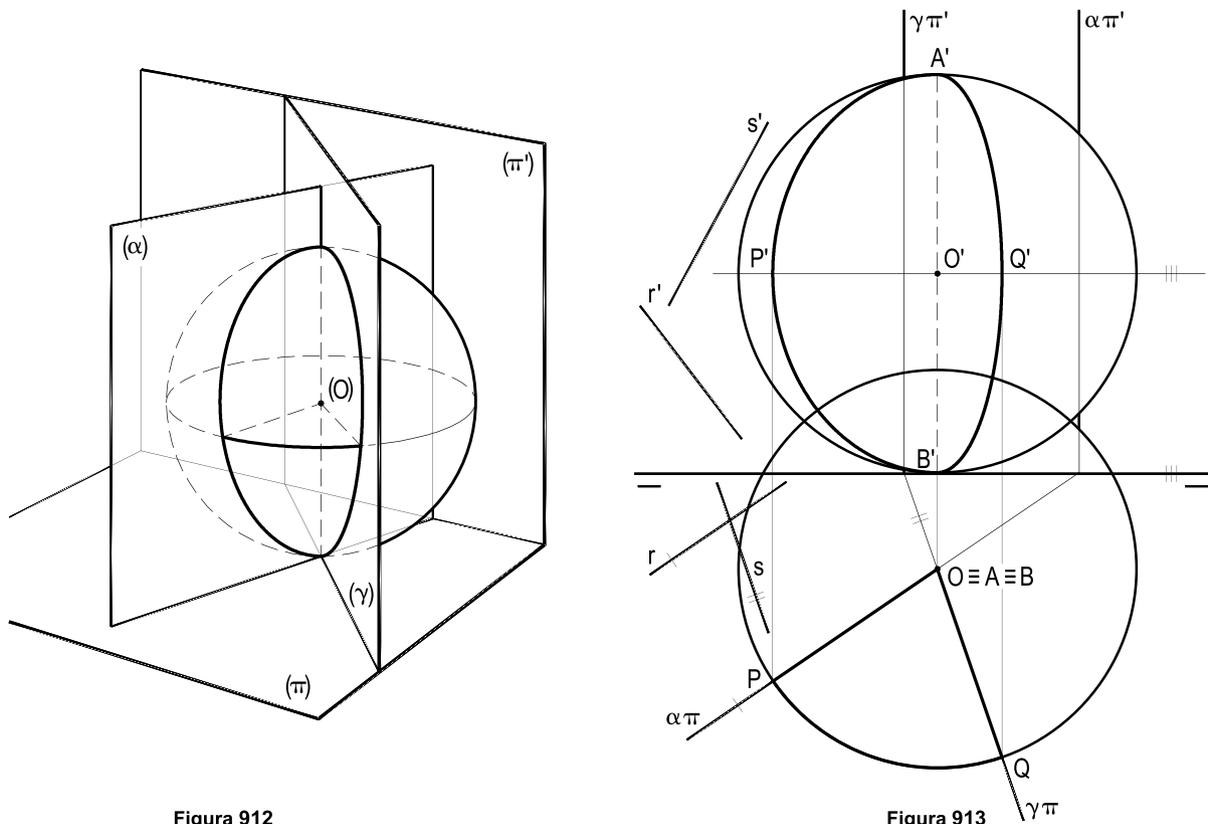


Figura 912

Figura 913

206.2 – Uma esfera é dada pelas projeções de seu centro (O) e pelo valor de seu raio, igual à metade da cota de (O).

Pede-se construir as projeções do maior segmento esférico de uma base que o plano de topo ( $\alpha$ ), transparente, dado por seu traço  $\alpha\pi'$ , produz na esfera, ao seccioná-la.

Solução: Tanto as determinações das projeções da esfera quanto da projeção vertical da seção que ( $\alpha$ ) cria na esfera são imediatas, por ser ( $\alpha$ ) projetante em relação a ( $\pi'$ ), restando, apenas, como questão, a construção da elipse, projeção horizontal dessa seção e base do segmento esférico, para o que apresentamos duas resoluções.

Na primeira, são utilizados os eixos AB e CD dessa elipse, o primeiro de topo e o segundo frontal, aplicando-se a construção da curva a partir de seus eixos (Cônicas, número 86), conforme desenvolvido na Figura 914.

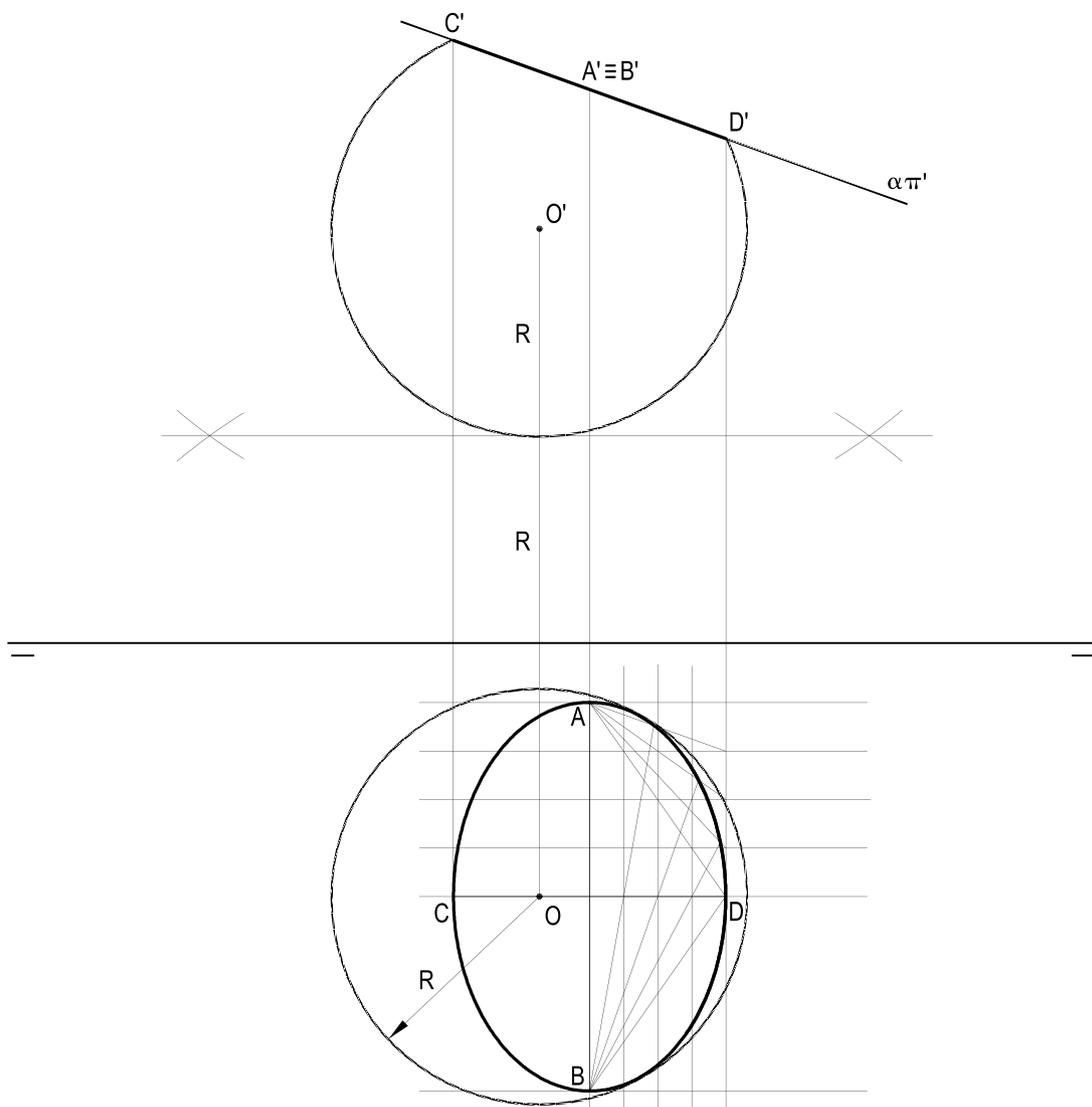


Figura 914

Na segunda (Figura 915), a construção da elipse é feita por pontos, obtidos com o auxílio de diversos planos auxiliares ( $\gamma$ ), todos horizontais, que cortam a superfície da esfera segundo circunferências concêntricas com a do contorno, que se projetam em V.G. sobre ( $\pi$ ). Tais planos auxiliares cortam o plano dado ( $\alpha$ ), segundo retas de topo.

São as interseções, ordenadas, dessas circunferências com tais retas de topo que fornecem os pontos da elipse, projeção horizontal da base do segmento esférico pedido.

Quanto à visibilidade, a elipse da projeção horizontal do segmento esférico é visível pela grande cota da base do sólido (Figuras 914 e 915).

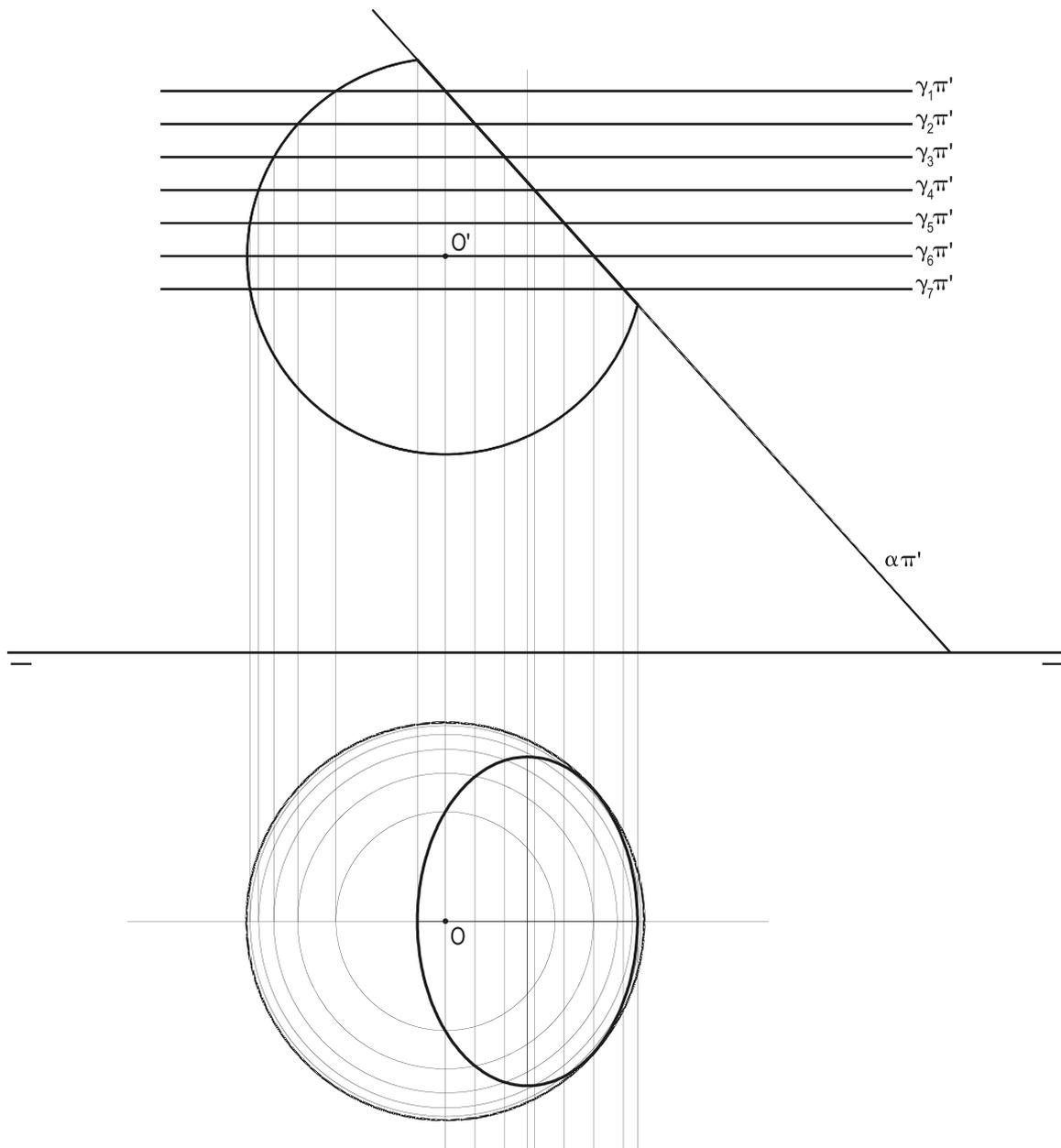


Figura 915

206.3 – Determinar as verdadeiras grandezas das duas bases do segmento esférico produzido na esfera de centro (C) e raio R pelos dois planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ), ambos de perfil, dados por seus traços.

Sabe-se que o ponto (C) tem abscissa nula, pertence ao plano das retas (r) e (s), dadas por suas projeções e a ( $\beta_{13}$ ) e que o raio R é igual ao dobro da abscissa de plano ( $\beta$ ).

Solução: Determinada a interseção (i) do plano das retas (r) e (s), dadas, com ( $\beta_{13}$ ), uma fronto-horizontal, como a reta (s), fica imediato obter o centro (C) da esfera, por sua abscissa nula. E, como o raio R da esfera é, também, de simples conhecimento, pode-se traçar as projeções da esfera, bem como as do segmento esférico pedido (Figura 916).

As verdadeiras grandezas ( $c_1$ )<sub>1</sub> e ( $c_2$ )<sub>1</sub> das duas bases do segmento esférico são facilmente obtidas pelos rebatimentos de seus planos ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) (Figura 916).

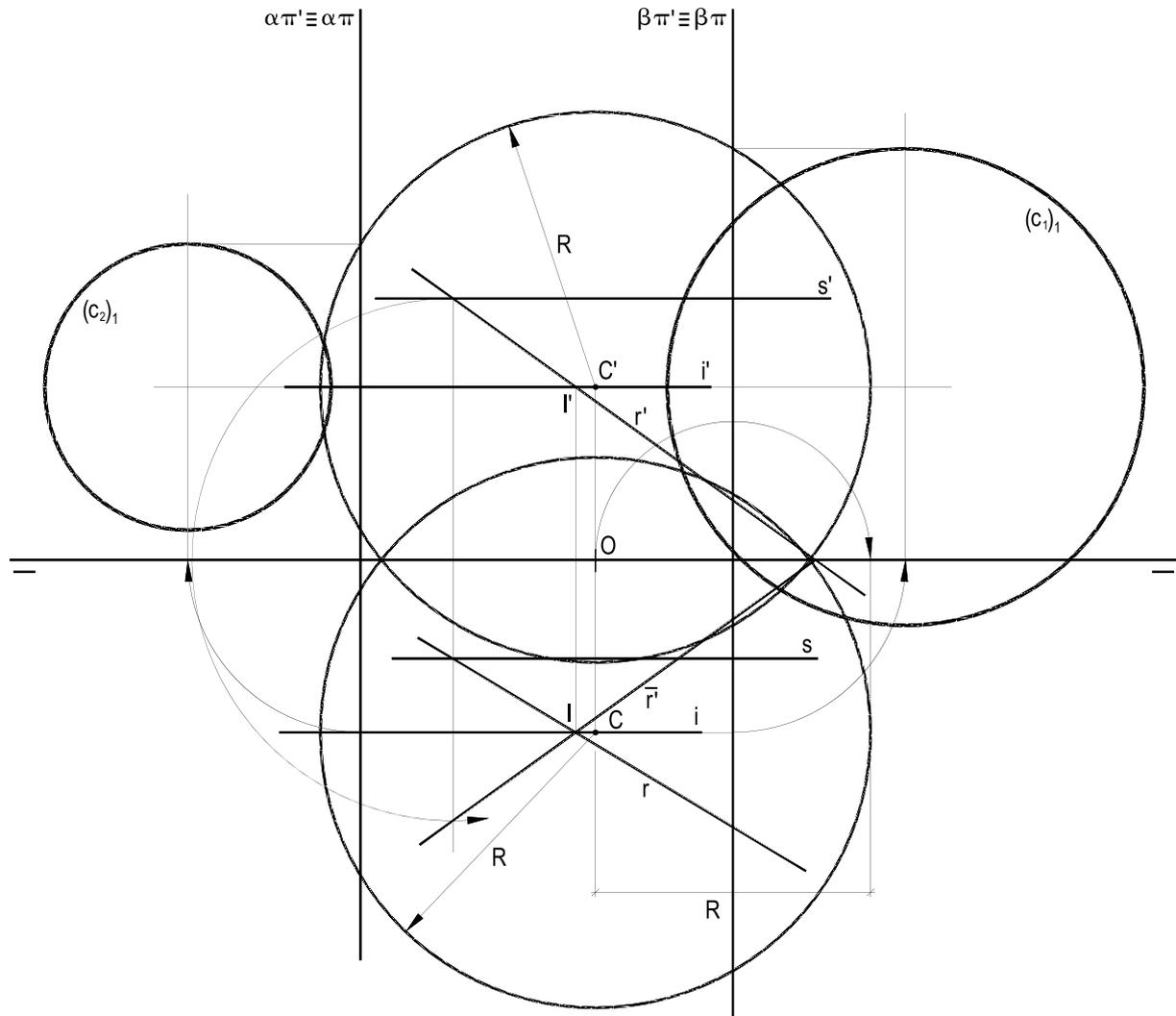


Figura 916

206.4 – Construir as projeções do setor esférico gerado pela rotação completa do setor circular (O)(A)(B), em torno do eixo vertical (e), que contém o centro (O) do círculo a que pertence o setor circular, para as três posições dadas para o setor circular (O)(A)(B), dado por suas projeções e situados, em todas elas, em planos frontais.

Solução: Sabe-se (número 204) quais as naturezas das superfícies dos setores esféricos gerados, para cada uma das três posições dadas, o que simplifica as construções das projeções dos sólidos pedidos (Figura 917).

Vale observar as visibilidades, para cada uma das hipóteses estudadas (Figura 917).

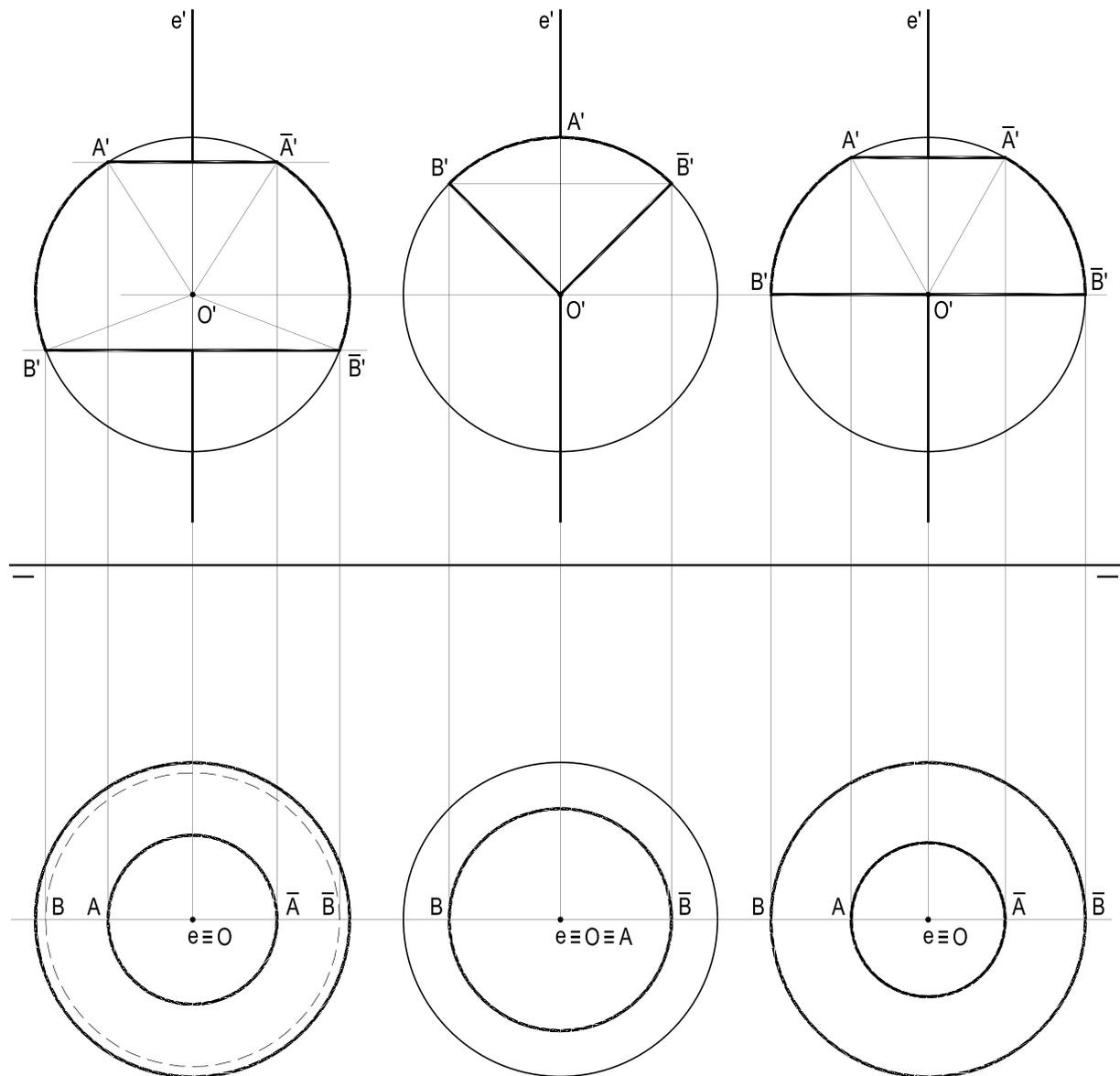


Figura 917

206.5 – Construir as projeções dos anéis esféricos gerados pelas revoluções completas dos segmentos circulares (A)(B), pertencentes a círculos de centros (O), em torno do eixo vertical (e), que passa por (O), em todos os três casos considerados.

Os três segmentos circulares dados situam-se, todos, em suas posições iniciais, em planos frontais, pertencentes ao eixo de revolução (e), dado.

Solução: Os anéis esféricos gerados pelos segmentos circulares dados, girando em torno do eixo vertical (e) (Figura 918), têm superfícies conhecidas (ver número 205), o que facilita, sobretudo, as construções pedidas.

Cabe observar as visibilidades de cada projeção, para as hipóteses estudadas (Figura 918).

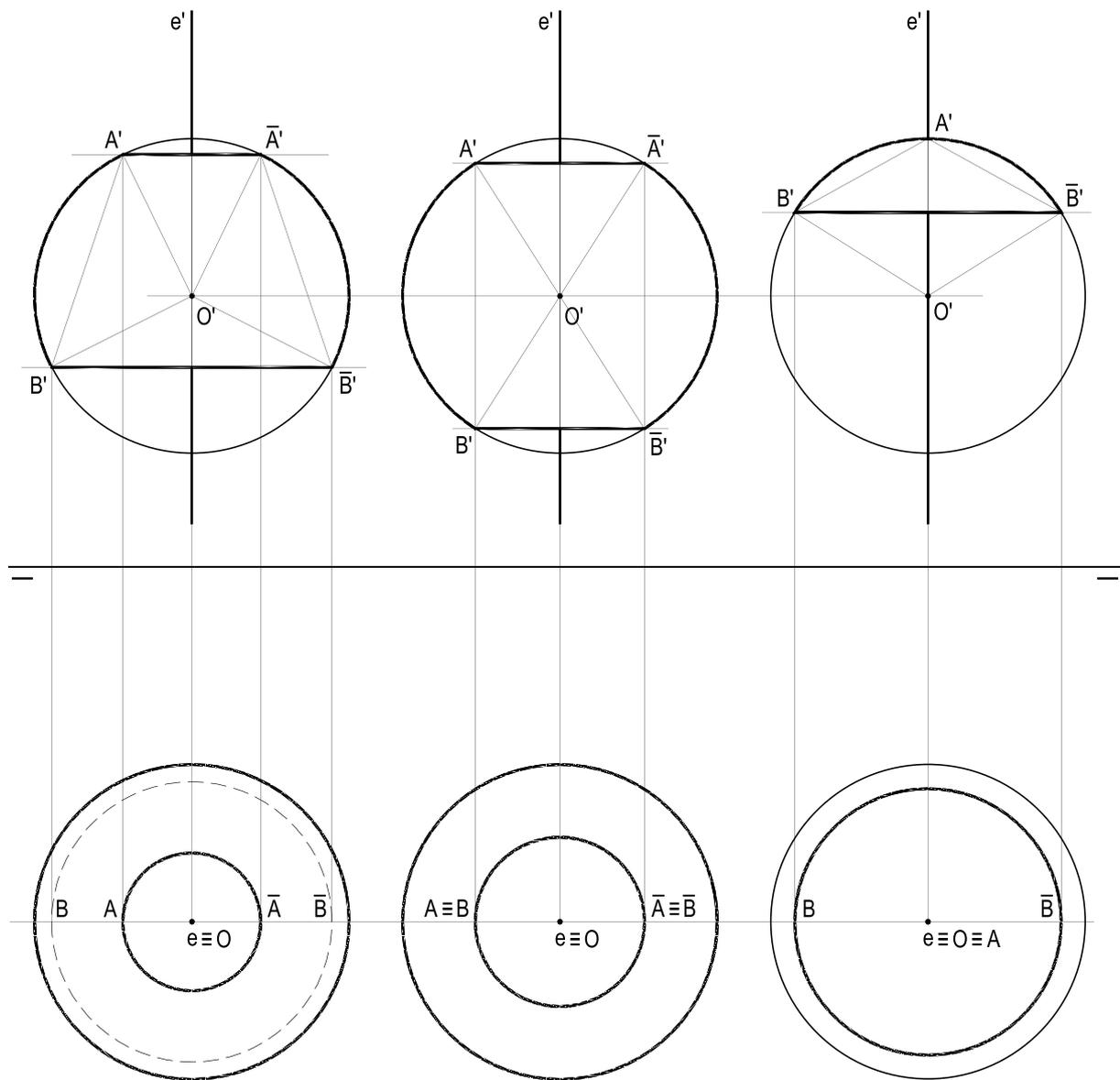


Figura 918



DADOS INTERNACIONAIS PARA CATALOGAÇÃO NA  
PUBLICAÇÃO (CIP)

---

A447g

Almeida, Célio Pinto de, 1937-  
Geometria Descritiva / Célio Pinto de Almeida. – Rio de Janeiro :  
G. Ermakoff, 2020.  
336 p. : il. ; 28 cm.

.  
ISBN - 978-65-87730-00-4  
1. Geometria Descritiva. I. Título.

CDD - 516.6

---

ROBERTA MARIA DE O. V. DA COSTA BIBLIOTECÁRIA CRB7 N. 5587

Este livro foi composto na tipografia Minion pro em  
corpo 12,5/17,3, impresso em papel offset 90g/m<sup>2</sup>,  
na gráfica Santa Marta – São Paulo.